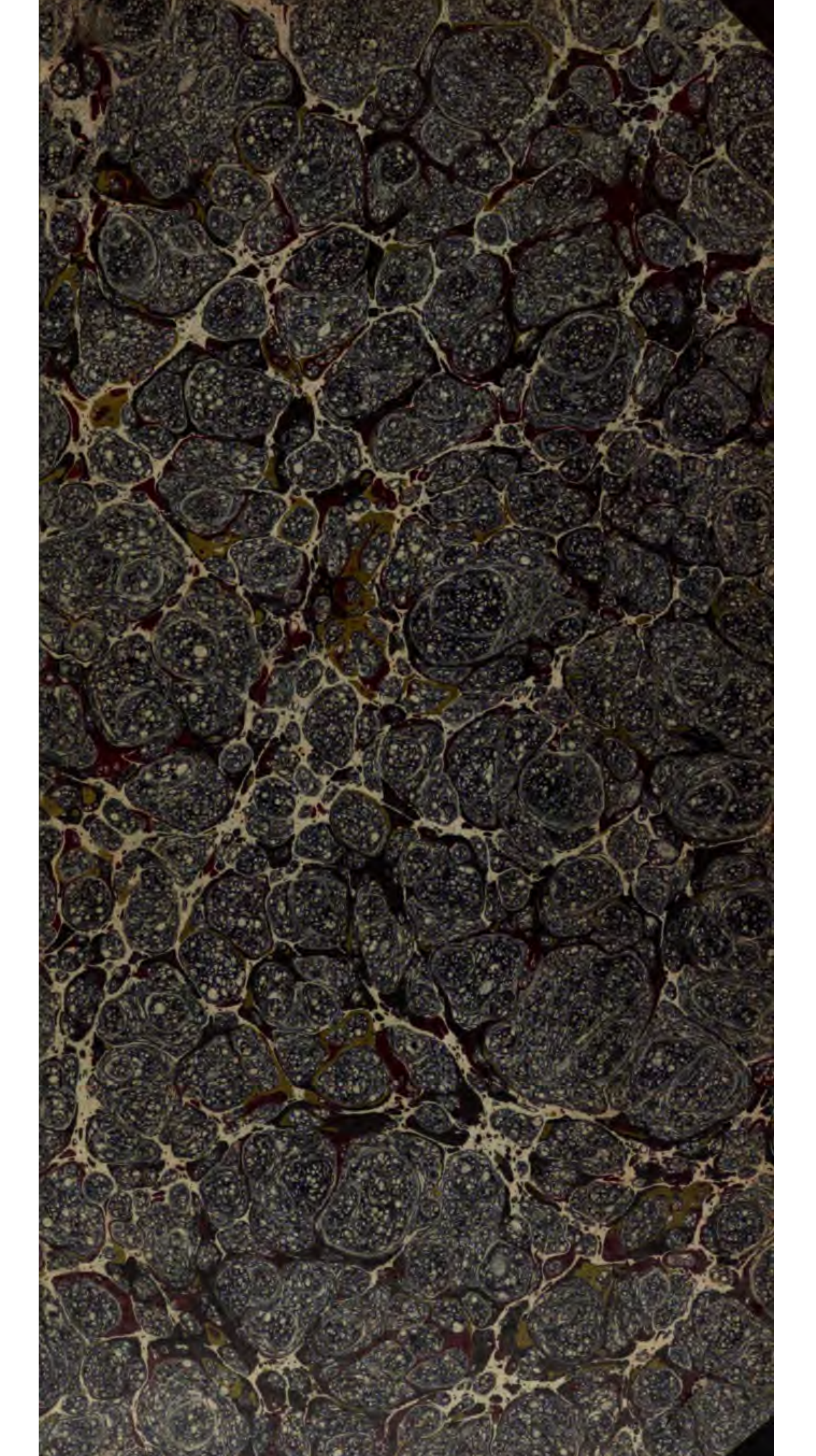












(7)

ARCHIV

der

MATHEMATIK UND PHYSIK

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Gegründet von

J. A. Grunert,

fortgesetzt von

R. Hoppe,

Dr. ph. Prof. an d. Univ. Berlin.

Zweite Reihe.

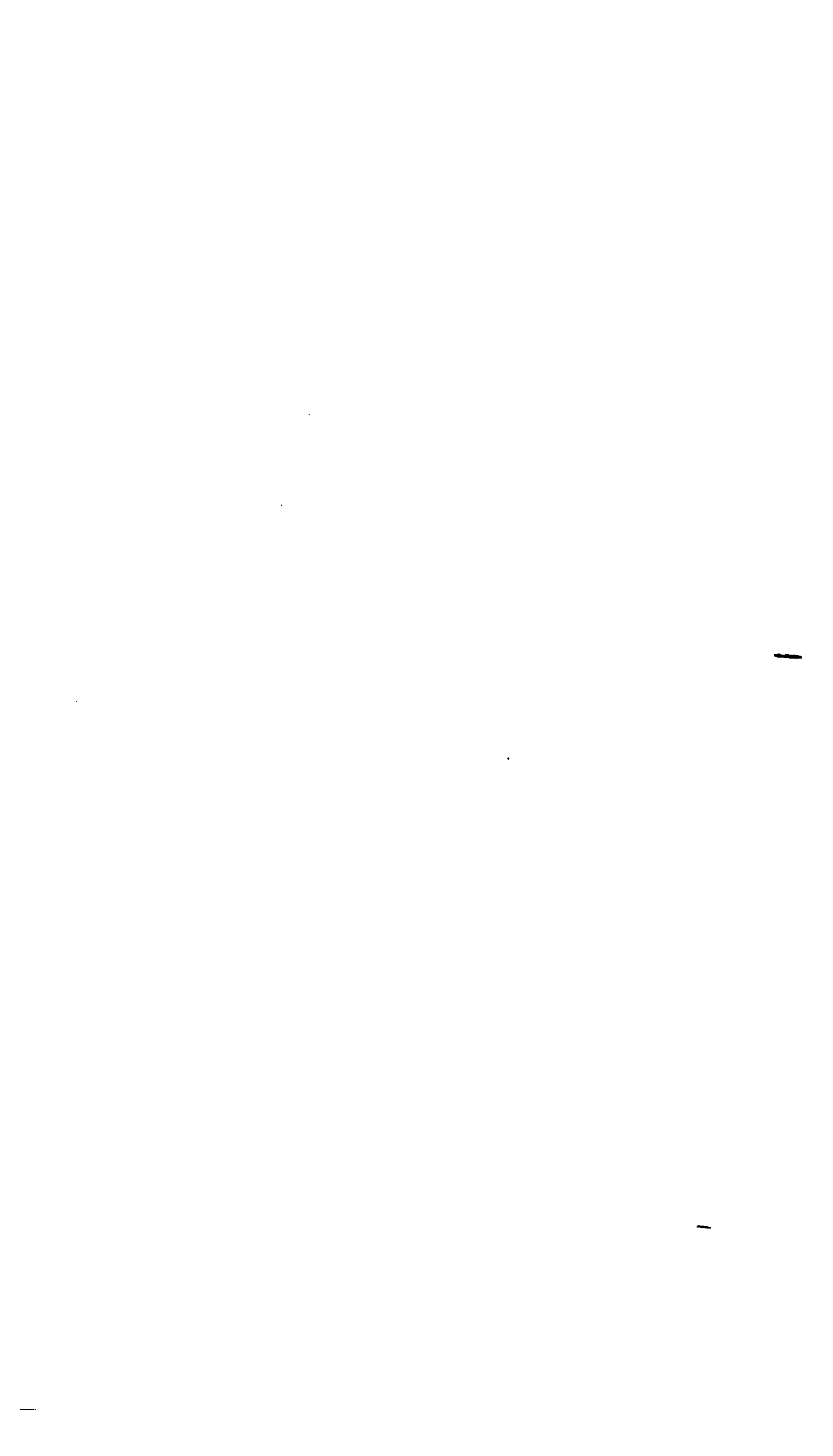
Dritter Teil.

Leipzig.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

J. Sengbusch.

1886.



MATE

ichniss

eils.

ine Analysis

ng.

n. Von Emil

Decimalbruchs

ersten 1500

dritten und

gsmethode

der biqua

n

hulze

Gomes

n P. Seel

ng.

V

Von

Inhalts-Verzeichniss

des dritten Teils.

№ der Abhandlung. Heft. Seite.

Geometrie der Ebene.

Geometrie des Raumes.

Mechanik.

Erd- und Himmelskunde.

Litterarische Berichte.

XII. Wiener (bin. Formen). Lie (Class. Flch.). Holst (synth. Meth.). Mack (3kant). Cremona (fig. réc. (Bossut) — proj. geom. (Leudesdorf)). Schüler (anal. G.). Streissler (Kart.). Petersen (Kin.). Peschka (darst. G.). Canad. Inst. (Proc. II.). Besso (Per. d. Mat. I.). Circ. mat. Palermo (Rend.). Bourget, Longchamps (J. d. Math. spéc. — élém. IV.). Mansion (Math. V.).

Druckfehler im 3. Teil.

Seite		Zeile		statt		setze	
Seite	53	Zeile	9 v. ob.	statt	vierseitigen	setze	viereckigen
		„	13 v. unt.	„	F_1	„	P_1
„	54	„	8 „ „	„	BC_1	„	BC
„	55	„	4 v. ob.	„	6	„	3
		„	15 „ „	„	zweiten	„	des zweiten
„	57	„	24 „ „	„	XYZ	„	xyz
„	59	„	3 „ „	„	— —	„	= —
„	60	„	2 v. unt.	„	Beziehungs	„	Bedingungs
„	63	„	3 u. 6. v. ob.	„	a, b, c	„	$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$
„	64	„	7 v. unt.	„	deren	„	von deren
„	65	„	8 v. ob.	„	b = Wkl. c	„	$\mathfrak{b}$ = Wkl. $\mathfrak{c}$
„	68	„	16 „ „	nach	E'	ergänze	von O
„		„	6 u. 4 v. unt.	statt	Z	setze	z
„	69	„	3 v. ob.	„	i_1	„	l_1
„	71	„	9 „ „	„	setzt	„	ersetzt
		„	8 u. 7 v. unt.	„	$X_p Y_p Z_p$	„	xyz
„	72	„	15 „ „	„	der	„	als
		„	14 „ „	„	F	„	P
„	73	„	22 u. 23 v. ob.	„	$\varepsilon\varepsilon'$	„	ε_1
		„	7. v. unt.	„	$\frac{4}{3}$	„	$\frac{8}{3}$.



I.

Die Abbildung des Aeussern eines Kreisbogenpolygons auf eine Kreisfläche.

Von

Th. Sanio.

Die Theorie der conformen Abbildungen, welche gegenwärtig in der Weiterentwicklung der höheren Analysis eine ähnliche Rolle spielt, wie sie in den beiden vorigen Jahrhunderten bei der Entwicklung der Principien des Infinitesimalcalculs den Theorien der Tangenten und der Maxima zu Teil wurde, umfasst, ganz ähnlich wie jede jener beiden, zwei Reihen von Aufgaben, welche sich durch den sehr verschiedenen Grad ihrer durchschnittlichen Schwierigkeit sofort als dem elementaren und dem höheren Teil dieser Lehre angehörig ausweisen, und welche man in genauer Analogie mit den beiden Reihen von Aufgaben der Tangententheorie als die directen und die inversen Aufgaben der Abbildungslehre bezeichnen kann.

Die Probleme der ersten Art, wie sie in dem für diesen Teil der Theorie sehr vollständigen Elementarwerk von Holzmüller [„Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften" etc.] zur Darstellung kommen, lassen sich sämtlich unter die Form subsumiren: Eine Function $\zeta = f(z)$ ist direct gegeben; gesucht werden die geometrischen (und sonstigen) Eigenschaften der durch diese Form vermittelten Abbildungsart.

Die Probleme der zweiten Art, welche als die inversen Aufgaben bezeichnet wurden, lassen sich, wie dieses bei den höheren und schwierigeren Untersuchungen einer mathematischen Disciplin gewöhnlich der Fall zu sein pflegt, nicht unter einen Gesichtspunkt zusammenfassen, und man wird die bis jetzt behandelten Probleme

in mehrere wesentlich verschiedene Gruppen einzuteilen haben, was freilich an dieser Stelle zu weit führen würde und daher unterbleiben mag. Das gemeinsame Band der Aufgaben besteht nur darin, dass bei allen die Abbildungsfunction gesucht wird; woraus sich dann in den concreten Fällen ergiebt, dass sie in der Regel der Integralrechnung angehören.

Die Theorie derselben, welche bekanntlich durch den Satz von Riemann, dass zwei im Uebrigen beliebig gestaltete, einfach zusammenhängende ebene Flächenstücke stets gegenseitig eindeutig und conform auf einander abbildbar sind, ihre Grundlage erhielt, machte den nächsten wichtigen Fortschritt durch die Abhandlung von Schwarz: „Ueber einige Abbildungsaufgaben“[1]).

Die darin behandelten Probleme gehören zur Gruppe derjenigen, bei welchen die zu suchende Abbildungsfunction durch Festsetzung der Begrenzung der beiden Gebiete, welche einander entsprechen sollen, bestimmt wird.

Die Lösung der Aufgabe, den Kreis auf der Fläche eines von geraden Linien begrenzten Polygons conform abzubilden findet sich allerdings auch in einer früher als die von Schwarz erschienenen Arbeit von Christoffel: Sul problema delle temperature stationarie e la rappresentazione di una data superficie. 1867. Im ersten Bande der Annali di Matematica, secunda serie. Dagegen ist das Problem, die unendliche Halbebene (oder, was davon nicht wesentlich verschieden ist, den Kreis) conform auf ein von Kreisbögen begrenztes Polygon abzubilden, von Schwarz in der genannten Abhandlung zuerst gelöst worden, und bildet die Analyse desselben, welche überdies auch einer Anwendung auf andere Abbildungsprobleme fähig ist [Ein Beispiel wird in § 1. der vorliegenden Arbeit gegeben werden] den eigentlichen Fortschritt der Theorie.

Die in dem Folgenden behandelte Aufgabe, die Halbebene auf das Aeussere eines von Kreisbögen begrenzten Polygons abzubilden, welcher näher getreten zu sein ich der Güte des Herrn Professor Lindemann verdanke, erledigt sich durch die oben erwähnten von

---

1) In Crelle's Journal der Math. Band 70. veröffentlicht und vom Februar 1869 datirt. Die unmittelbar darauf in eben demselben Bande gedruckte vom September 1868 datirte Arbeit desselben Autors enthält zwar ebenfalls die für die Abbildung geradliniger Polygone charakteristische Integralfunction, sie enthält aber nicht das analytische Princip, welches wohl den wichtigsten Fortschritt der Theorie involvirt, und welches sich in der zuerst genannten Abhandlung findet.

Schwarz gegebenen Hilfsmittel, und es zeigt sich sogar, dass sie von der entsprechenden Aufgabe für das Innere des Kreisbogenpolygons nicht wesentlich verschieden ist, indem beide Probleme auf Differentialgleichungen von ganz derselben Form führen, welche sich nur durch die Werte ihrer Parameter von einander unterscheiden.

Dieses Resultat war vermöge der bekannten Eigenschaften der linearen Substitution, welche in der Transformation der Figuren durch Kreisverwandtschaft ihren geometrischen Ausdruck finden, vorauszusehen, und man würde es wohl als selbstverständlich und keiner besondern Untersuchung würdig erachten, wenn nicht Christoffel in der Abhandlung: Sopra un problema proposto da Dirichlet[2]), einem Zusatze zu der vorhin genannten grösseren, gezeigt hätte, dass die Aufgaben für das Innere und das Aeussere eines geradlinigen Polygons auf zwei verschiedene Abbildungsfunctionen führen; auch unterscheidet sich die Analyse des letztern Problems in einem Punkte wesentlich von der des erstern.

Nachdem das Resultat gewonnen war, dass die beiden für geradlinige Polygone verschiedenen Probleme für Kreisbogenpolygone coincidiren, war es wünschenswert, zu zeigen, dass Christoffel's Analyse des zweiten Problems, wenn man sie auf Kreisbogenpolygone ausdehnt, zu keiner andern Differentialgleichung führt, als die ohne diesen Zusatz, also auf dem einfachsten Wege vorgenommene Anwendung der Schwarz'schen Principien.

Ferner war es nötig, die allgemeine und einheitliche Lösung der Abbildungsaufgabe des Kreisbogenpolygons zur Herleitung der bekannten Lösungen der beiden auf das geradlinige Polygon (als eines speciellen Falles des Kreisbogenpolygons bezüglichen Aufgaben zu benutzen, um zu zeigen, dass in der Tat die Christoffel'schen Abbildungsfunctionen für das Innere und für das Aeussere des Polygons sich beide auf diesem Wege ermitteln lassen.

Das ist nun für das Dreieck, also für den Fall, in welchem die zur Anwendung kommende Differentialgleichung diejenige der hypergeometrischen Reihe ist, durchgeführt worden.

Was aber die Polygone mit mehr als drei Ecken anbelangt, so unterliegt die Behandlung derselben einer Schwierigkeit. Während nämlich die Parameter der hypergeometrischen Differentialgleichung durch die Angabe der Winkel des abzubildenden Kreisbogendreiecks vollständig bestimmt sind, genügt die Angabe der n Winkel des ab-

---

2) Annali di Matematica, Serie 2, Band 4.

zubildenden Kreisbogenpolygons, wenn $n > 3$ ist, nicht mehr zur Bestimmung der $2n - 3$ Parameter, welche die auf die einfachste Form gebrachte Differentialgleichung des Problems ausser den singulären Punkten noch enthält.

Die vollständige Durchführung der Constantenbestimmung für das Schwarz'sche Problem, wenn sie geleistet wäre, also die Lösung derjenigen Aufgabe für Kreisbogenpolygone, welche für geradlinig begrenzte Polygone in der Abhandlung von Schlaefli: „Ueber die allgemeine Möglichkeit der conformen Abbildung einer von Geraden begrenzten ebenen Figur in eine Halbebene“[3]) in Angriff genommen ist, würde allerdings auch für das hier vorliegende Problem alles Wünschenswerte erreichen lassen; diese Aufgabe in ihrer Allgemeinheit dürfte aber doch sehr erheblichen Schwierigkeiten unterliegen.

Wenn man ein Kreisbogenpolygon unter Zugrundelegung der gewöhnlichen (Gauss'schen) geometrischen Repräsentation des Imaginären, durch eine lineare Substitution oder, was damit gleichbedeutend ist, zweimal durch reciproke Radien oder einmal durch reciproke Radien und alsdann durch Umklappung transformirt, so bleiben hierbei bekanntlich, wie im allgemeinen (nämlich abgesehen von singulären Fällen) durch j e d e analytische Transformation — die Winkel des Polygons u n v e r ä n d e r t. Diese Winkel sind aber nicht die einzigen Invarianten des Polygons; bezeichnet man nämlich irgend vier Punkte der ursprünglichen Figur durch $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$, so ist bekanntlich das D o p p e l v e r h ä l t n i s s derselben, nämlich die Function

$$\frac{\zeta_1 - \zeta_3}{\zeta_2 - \zeta_3} : \frac{\zeta_1 - \zeta_4}{\zeta_2 - \zeta_4}$$

für die allgemeine l i n e a r e Substitution ebenfalls eine absolute Invariante.

Seien jetzt $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ die E c k e n des Kreisbogenpolygons, welche als die den singulären Punkten der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung entsprechenden Punkte des ζ-Gebietes analytisch definirbar sind. Die $n(n-1)(n-2)(n-3)$ Doppelverhältnisse, welche sich aus den Grössen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$ bilden lassen, sind durch $n - 3$ von ihnen, etwa durch die Doppelverhältnisse

$$(\zeta_1 \zeta_{n-2} \zeta_{n-1} \zeta_n),\ (\zeta_2 \zeta_{n-2} \zeta_{n-1} \zeta_n),\ \ldots,\ (\zeta_{n-3} \zeta_{n-2} \zeta_{n-1} \zeta_n)$$

bestimmt. Bezeichnet man die Werte dieser letzteren durch $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_{n-3}$, die Winkel des Polygons aber, abgesehen von dem ge-

3) Im 76ten Bande des Crelle'schen Journals.

meinsamen Factor π, durch $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, so sind, wenn n eine ungerade Zahl ist, jedenfalls die λ von den $\varkappa$ unabhängig, da es in diesem Falle möglich ist, wenn die n Eckpunkte beliebig festgesetzt sind, dem Polygon die Winkel λ zu geben. (Für gerades n sind freilich die Winkel von der Wahl der Ecken nicht ganz unabhängig.) Es muss daher, zum Mindesten für Polygone von ungerader Seitenanzahl, möglich sein, die $n-3$ von einander unabhängigen Doppelverhältnisse und die Winkel des Polygons neben einander als invariante Parameter in das Problem einzuführen. Die genauere Untersuchung dieser Verhältnisse wird nicht wenig durch den Umstand gefördert, dass, wie Wedekind gezeigt hat[4]), das Doppelverhältniss von vier complexen Punkten sich durch zwei reelle, von einander unabhängige Winkel auf eine einfache Weise darstellen lässt. [Dass ein beliebig gegebenes Doppelverhältniss der obigen Art als complexe Grösse für zwei lineare Parameter zählt, versteht sich ohnehin von selbst.] Auch das Kreisbogenpolygon von gerader Seitenanzahl wird durch dieses Hilfsmittel einer analogen Behandlungsweise zugänglich, und es ergiebt sich, dass der vorhin nur als möglich angedeutete Unterschied zwischen Gerade und Ungerade in Wirklichkeit stattfindet, dass nämlich für Polygone von gerader Seitenanzahl einer der Winkel durch die übrigen und die Doppelverhältnisse mit bestimmt ist.

Das Endergebniss dieser Betrachtnng lässt sich so aussprechen: Durch Polygonwinkel und Doppelverhältnisse werden die $3n-3$ Parameter der Differentialgleichung des Problems (hier sind auch die im Endlichen gelegenen singulären Punkte mit eingerechnet) für ein ungerades n bis auf zwei, für ein gerades bis auf drei, bestimmt.

Vermittelst einer solchen Darstellung wird es möglich sein, die beiden allgemeinen Probleme der Abbildung des Innern und des Aeussern eines gegebenen Kreisbogenpolygons auf einander zu beziehen, indem man in den Parametern der Differentialgleichung des einen überall $2-\lambda_h$ für λ_h substituirt, die $\varkappa$ aber unverändert lässt.

Wegen des genauen Zusammenhanges unseres Problems mit dem Gegenstande der mehrerwähnten Schwarz'schen Untersuchungen und der Nötigung, die geringen Unterschiede der auf das Aeussere und das Innere der Kreisbogenpolygone bezüglichen Aufgaben festzustellen und hervorzuheben, schien es geboten, zur Einleitung die Hauptpunkte der von Schwarz geschaffenen Methode zu reproduciren, während

5) Wedekind, Beiträge zur geometrischen Interpretation binärer Formen. Erlangen 1875. Inauguraldissertation. Im Auszuge math. Ann. Bd. IX.

hinsichtlich des Details jener Entwickelungen auf die betreffenden Originalarbeiten hingewiesen werden durfte.[5])

Die gewählte Darstellungsweise des reproductiven Teils bietet vielleicht in so fern ein selbständiges Element, als die das Kreisbogenpolygon betreffende Schwarz'sche Aufgabe umgekehrt wird, indem wir sie, von der allgemeinen Form der linearen Differentialgleichung ausgehend, so gefasst haben: Diejenigen linearen Differentialgleichungen zu suchen, welche auf Abbildungen mit Kreisbögen führen.

§ 1.

Wenn man der Einfachheit wegen das z-Gebiet (anstatt eines Kreises) die unendliche positive Halbebene über der x-Axe sein lässt und sich die Aufgabe stellt, diese Halbebene in dem ζ-Gebiet auf dem Innern oder Aeusseren einer gegebenen eckigen Begrenzungsfigur conform abzubilden, so wird es zunächst darauf ankommen, die einzelnen Curvenbögen — die Seiten des Polygons — als Linien von einem und demselben geometrischen Charakter aufzufassen. Nachdem dieses geschehen, kann man sich dann die Aufgabe stellen, diejenige Art von Functionen $\zeta = \varphi(z)$ ausfindig zu machen, vermittelst deren im allgemeinen Stücke der x-Axe des z-Gebietes durch Curvenbögen von der verlangten Art in dem ζ-Gebiete abgebildet werden.

Um das gleichförmige Verfahren, dessen man sich zu bedienen hat, zu kennzeichnen, mögen successive die drei Beispiele ins Auge gefasst werden:

a) dass die Polygonseiten gerade Linien sind;
b) dass sie Kreisbögen sind;
c) dass sie concentrische gleichseitige Hyperbeln sind.

Im ersten Falle bleibt der Charakter einer Linie von der Art derer, welche die Polygonseiten darstellen, durch die Transformation

$$\zeta_1 = a\zeta + b \text{ unverändert,}$$

im zweiten Falle durch die Transformation

$$\zeta_1 = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d},$$

---

5) So namentlich auf die Abhandlung von Schwarz: „Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elements darstellt“, im 75ten Bande des Crelle'schen Journals.

im dritten Falle durch die Transformation

$$\zeta_1 = a\zeta^2 + b.$$

Denkt man sich jetzt die Variabeln ζ und ζ_1 als Functionen von z, so gelingt es jedesmal, aus den ζ und deren Derivirten nach z eine Function Ψ herzustellen, welche die in den vorstehenden Functionen vorkommenden constanten Parameter nicht mehr enthält und ausserdem die Eigenschaft hat, dass

$$\Psi\left(\zeta_1, \frac{d\zeta_1}{dz}, \ldots\right) = \Psi\left(\zeta, \frac{d\zeta}{dz}, \ldots\right)$$

wird. Man findet nämlich für $\Psi(z)$

im ersten Falle $\frac{d}{dz}\log\frac{d\zeta}{dz}$,

im zweiten Falle $\frac{d^2}{dz^2}\log\frac{d\zeta}{dz} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\log\frac{d\zeta}{dz}\right)^2$;

im dritten Falle $\frac{d}{dz}\log\left(\zeta.\frac{d\zeta}{dz}\right)$.

Ist nun $F(z)$ eine sonst beliebige Function von z, welche aber für reelles z reell bleibt, so giebt die Lösung einer Differentialgleichung

$$\Psi = F$$

diejenigen Abbildungsarten, bei welchen im allgemeinen Stücken der x-Axe des z-Gebietes

im ersten Falle Stücke von geraden Linien,

im zweiten Falle Kreisbögen,

im dritten Falle Bögen concentrischer gleichseitiger Hyperbeln des ζ-Gebietes entsprechen.

Der Beweis ist in jedem Falle leicht; er mag für den dritten Fall, welcher sich in den in der Einleitung citirten Arbeiten des Urhebers dieser Theorie nicht findet, hier geführt werden.

Aus der Gleichung

$$\frac{d}{dz}\log\left(\zeta.\frac{d\zeta}{dz}\right) = F(z),$$

wenn man in ihr $z = x$ setzt, also reell sein lässt und $\zeta = \xi + i\eta$ setzt, folgen durch Separation des Reellen und des Imaginären die beiden Gleichungen:

$$\xi'\xi' + \xi\xi'' - \eta'\eta' - \eta\eta'' = F.(\xi\xi' - \eta\eta'),$$
$$2\xi'\eta' + \xi\eta'' + \eta\xi'' = F.(\xi\eta' + \xi'\eta),$$

oder:

$$F = \frac{d}{dx}\log\frac{d(\xi^2-\eta^2)}{dx} = \frac{d}{dx}\log\frac{d(\xi\eta)}{dx},$$

also durch Integration die Gleichung

$$\xi^2 - \eta^2 - p\xi\eta = q,$$

worin p und q zwei willkürliche Constanten sind. Das ist aber die allgemeine Form der Gleichungen derjenigen gleichseitigen Hyperbeln, welche den Coordinatenanfangspunkt der ξ, η-Ebene zum gemeinsamen Mittelpunkt haben.

Was die viel wichtigeren Fälle a) und b) anbetrifft, so sei es verstattet, den Ort anzugeben, wo man sie ausführlicher behandelt findet.[6])

Versuchen wir es noch, das in diesen Beispielen liegende Princip, welches angemessen als das Schwarz'sche Princip zu bezeichnen ist, allgemeiner zu formuliren.

Sei $\zeta_1 = \varphi(\zeta)$ eine gegebene Function von ζ mit mehreren constanten Parametern, und man kenne eine Function Ψ von ζ und $\frac{d\zeta}{dz}, \frac{d^2\zeta}{dz^2}, \ldots$ von der Eigenschaft, dass die Gleichung

$$\Psi\left(\zeta_1, \frac{d\zeta_1}{dz}, \ldots\right) = \Psi\left(\zeta, \frac{d\zeta}{dz}, \ldots\right)$$

identisch erfüllt wird, wenn man in sie

$$\zeta_1 = \varphi(\zeta), \quad \frac{d\zeta_1}{dz} = \varphi'(\zeta)\cdot\frac{d\zeta}{dz}, \quad \frac{d^2\zeta_1}{dz^2} = \varphi''(\zeta)\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 + \varphi'(\zeta)\cdot\frac{d^2\zeta}{dz^2}, \quad \text{etc.}$$

einsetzt, indem man ζ und daher auch ζ_1 als Functionen einer dritten Variabeln z ansieht. Ist nun $\zeta = f(z)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Psi\left(\zeta, \frac{d\zeta}{dz}, \ldots\right) = F(z),$$

so ist offenbar

$$\varphi(f(z)),$$

wenn einige der in der Function φ enthaltenen constanten Parameter in der Differentialgleichung nicht vorkommen, eine allgemeinere Lösung derselben Differentialgleichung. Die Differentialgleichung $\Psi = F$ sei von der $n$ten Ordnung, und sie enthalte n von den Parametern nicht, welche in $\varphi(\zeta)$ vorkommen.

---

6) Schwarz, Christoffel und Schaeffli in den oben genannten Abhandlungen, und sub b): Pochhammer „Notiz über die Abbildung der Kreisbogenpolygone", Crelle's Journal, Bd. 76.

In diesem Falle erhält man aus jeder Particularlösung $f(z)$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, indem man $\varphi(f(z))$ bildet. Die Differentialgleichung kann (von singulären Lösungen etwa abgesehen) keine Lösung besitzen, welche nicht unter der Form $\varphi(f)$ enthalten wäre. Nun sei $z = x_1$ bis $z = x_2$ ein solches Intervall der reellen Axe des z-Gebietes, für welches die Differentialgleichung irgend eine reelle Lösung $f(z)$ besitzt, so wird jede particuläre Lösung (also mit Ausnahme der etwa vorhandenen singulären Lösungen jede Lösung überhaupt), da sie als Transformirte von f vermittelst der Substitution $\varphi(f)$ angesehen werden darf, die Eigenschaft besitzen: wenn z das genannte Intervall der x-Axe durchläuft, so beschreibt der durch jene Lösung repräsentirte Punkt ζ einen Bogen einer Curve, welche zu den durch die Gleichung $\zeta = \varphi(x)$ charakterisirten gehört. [x bezeichnet eine reelle Variabele, und die einzelnen Curvenindividuen, welche zu dieser Curvenfamilie gehören, entstehen dadurch, dass man denjenigen Parametern von φ, welche in der Differentialgleichung nicht vorkommen, bestimmte passende Werte erteilt.]

§ 2.

Die Betrachtungen des vorhergehenden Paragraphen beziehen sich nur auf die Begrenzungen, nicht auf das Innere der beiden Gebiete, welche durch die Abbildung zu einander in Beziehung gesetzt werden sollen. Die Abbildung in Riemann's Sinne erfordert aber ein gegenseitig eindeutiges Entsprechen sämmtlicher Punkte von Object und Bild. Hieraus folgt nach fundamentalen Sätzen der Theorie der Functionen einer complexen Variabeln, dass innerhalb keines der beiden zu einander in Beziehung zu setzenden Flächenstücke Verzweigungspunkte vorhanden sein dürfen.

Die Begrenzung des ζ-Gebietes muss, wenn dasselbe ein Polygon sein soll, einen vollständig geschlossenen, sich nirgends schneidenden Contour bilden. Allerdings wäre dann im Riemann'schen Sinne nicht ausgeschlossen, dass sich Theile des vollständig begrenzten und einfach zusammenhängenden Flächenstücks in mehreren über einander liegenden Blättern der Riemann'schen Fläche befinden, wodurch scheinbare [illegible] von Unstetigkeitspunkten und scheinbares Sich-selbst-schneiden der Begrenzung in gewissen Punkten entstehen könnte. Halten wir aber, wie es bei Abbildungsaufgaben wohl meistens geschieht, an dem engeren Begriffe der Eindeutigkeit im alten Sinne fest, welcher erheischt, dass das ganze Flächenstück sich in einem und demselben Blatte der Riemann'schen Fläche ausgebreitet befinden muss, so

tritt die Bedingung hinzu, dass keiner der Winkel des Polygons grösser als 2π sein darf, und wir haben ein (krummliniges) Polygon im antiken Sinne des Wortes.

Wir treten nun unserer Aufgabe näher, indem wir uns fortan auf die Discussion derjenigen Abbildungsarten beschränken, welche auf Kreisbogenpolygone Bezug haben, also auf eine solche functionelle Verknüpfung von z und ζ, welche durch eine Differentialgleichung von der Eorm

$$\frac{d^2}{dz^2}\log\frac{d\zeta}{dz} - \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}\log\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 = F(z)$$

oder, wenn man die Differentiationen auf der linken Seite des Gleichheitszeichens ausführt,

$$\frac{2\zeta'\zeta''' - 3\zeta''\zeta''}{2\zeta'\zeta'} = F(z)$$

charakterisirt wird.

Die Integration derselben ist bekanntlich auf die einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführbar, wie durch Kummer entdeckt worden ist [7]). Die Natur dieses Zusammenhanges ist in den folgenden Theoremen ausgesprochen, welche hier anzuführen verstattet sei; die Herleitung findet man bei Schwarz, Abhandl. in Crelle's J. Bd. 75, II.

„Der Quotient zweier Lösungen einer linearen homogenen „Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + p\frac{d\omega}{dz} + q\omega = 0,$$

„deren Coefficienten mit der Function $F(z)$ durch die Relation

$$2q - \frac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dz} = F(z)$$

„verbunden sind, ist eine Lösung der Differentialgleichung dritter „Ordnung

$$\frac{2\zeta'\zeta''' - 3\zeta''\zeta''}{2\zeta'\zeta'} = F(z).\text{“}$$

Das charakteristische Moment hierbei ist, dass die Coefficienten der zur Anwendung kommenden linearen Differentialgleichung 2. O. nicht völlig bestimmt sind, dass vielmehr einer derselben beliebig gewählt

---

7) Kummer: „De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis“, Osterprogramm 1834 des Gymnasiums zu Liegnitz. Die daselbst behandelte Differentialgleichung ist noch etwas allgemeiner als diejenige des obigen Ab-

werden darf. Das hierdurch scheinbar auftretende willkürliche Element in der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 3. O. wird aber dadurch beseitigt, dass folgender Satz gilt:

„Sämtliche Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^2\omega}{dz^2}+p\frac{d\omega}{dz}+q\omega=0$$

„für welche die Function

$$2q-\tfrac{1}{2}p^2-\frac{dp}{dz}$$

„denselben Wert hat, haben die Eigenschaft, dass zwischen dem „Quotienten zweier Lösungen der einen und dem Quotienten zweier „Lösungen irgend einer andern eine lineare Relation besteht“ [8]).

§ 3.

Die Aufgabe, die unendliche Halbebene des z-Gebietes auf dem Innern eines geradlinigen Polygons des ζ-Gebietes abzubilden, löst man, wie Christoffel und Schwarz gezeigt haben, vermittelst der Function

---

bildungsproblems. — Uebrigens findet sich der charakteristische Differentialausdruck der letzteren auch bei Lagrange. (Sur la construction des cartes géographiques, in Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin 1779. cf. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, p. 74. in der Anmerkung.)

8) Man kann nämlich vermittelst der bekannten Substitution

$$\omega = u.v$$

aus der linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2}+p\frac{d\omega}{dz}+q\omega=0$$

den Coefficienten des ersten Differentialquotienten fortschaffen, indem sich

$$u=e^{-\int\frac{1}{2}p\,dz},$$

und alsdann die transformirte Differentialgleichung

$$\frac{d^2v}{dz^2}+\left(q-\tfrac{1}{4}p^2-\tfrac{1}{2}\frac{dp}{dz}\right)v=0$$

ergiebt, so dass also alle diejenigen Differentialgleichungen, für welche $2q-\frac{1}{2}p^2-\frac{dp}{dz}$ denselben Wert hat, auf eine und dieselbe reducirte Differentialgleichung führen.

$$\zeta - \zeta_0 = C \int_{z_0}^{z} (z-a_1)^{\lambda_1 - 1} (z-a_2)^{\lambda_2 - 1} \dots (z-a_n)^{\lambda_n - 1} dz.$$

Das Polygon hat im Allgemeinen $n+1$ Ecken; die Winkel desselben sind $\pi\lambda_1, \pi\lambda_2, \dots, \pi\lambda_n$ und $\pi\lambda$, worin

$$\lambda = n - 1 - \sum_1^n \lambda_h;$$

dieselben folgen in dem Polygon auf einander, wie die reellen Zahlen $a_1, a_2, \dots a_n$ und ∞. Diese letzteren, als Punkte der x-Axe des z-Gebietes aufgefasst, entsprechen den Eckpunkten des Polygons in dem ζ-Gebiet.

Die Forderung, dass die gesamte Fläche des Polygons als in einem und demselben Blatte der Riemann'schen Fläche befindlich vorstellbar sein soll, woran wir festhalten, erheischt, dass keiner der Polygonwinkel grösser als 2π sein darf; die λ müssen also sämtlich positive, zwischen 0 und 2 liegende Zahlen sein; insbesondere gilt das von der Zahl λ, woraus noch folgt, dass

$$n - 3 < \sum_1^n \lambda_h < n - 1$$

sein muss.

Der Grenzfall $\lambda_h = 0$ ist auszuschliessen, weil dann der dem Punkte $z = a_h$ entsprechende Functionswert logarithmisch unendlich wird.

Um es zu vermeiden, dass eine der Ecken des Polygons gerade dem Punkte Unendlich des z-Gebietes entspricht (weil hierin eine Specification des allgemeinen Abbildungsproblems liegt), kann man das $(n+1)$ Eck in ein n Eck verwandeln, indem man den Winkel der genannten Ecke gleich π macht, was durch Hinzunahme der Bedingung

$$\sum_1^n \lambda_h = n - 2$$

erreicht wird.

Das Aeussere eines Polygons ist zuerst von Christoffel abgebildet worden [9]). Lässt man an die Stelle der inneren Polygonwinkel die äusseren treten und bezeichnet jetzt diese letzteren durch $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ und λ — welches die dem Zusammenhange der beiden

---

9) Sopra un problema proposto da Dirichlet. In den Annali di Matematica, Serie 2, Band 4. (1870).

Probleme entsprechendste Nomenclatur ist — so tritt in der diesem Problem entsprechenden Abbildungsfunction zu den unter dem Integralzeichen stehenden Factoren der vorigen noch der Factor $\frac{1}{[(z-A)^2+B^2]^2}$ hinzu. Die abgebildete Fläche des ζ-Gebietes muss nämlich jetzt auch den Punkt Unendlich, und zwar im Innern enthalten; einer der Factoren unter dem Integralzeichen muss daher jedenfalls für einen gewissen complexen Wert $z = A+Bi$ unendlich werden. Dieser Factor wird demnach gleich einer negativen Potenz von $z-A-Bi$ sein müssen. Hieraus folgt aber, weil die Function

$$\Psi = \frac{d}{dz} \log \frac{d\zeta}{dz}$$

für reelles z notwendiger Weise reell bleiben muss (§ 1.), das Vorhandensein einer eben solchen Potenz von $z-A+Bi$. Was aber den Exponenten der Potenz von $(z-A)^2+B^2$ anbelangt, so kann er nicht gleich -1 sein, weil hieraus ein logarithmisches Unendlichwerden und demnach eine unendliche Vieldeutigkeit von ζ in der Umgebung von $z = A+Bi$ folgen würde; überhaupt schliesst die Forderung des gegenseitig eindeutigen Entsprechens von z und ζ in der Umgebung von $z = A+Bi$ jede andere Potenz aus, ausser der -2ten, so dass also der Factor $\frac{1}{[(z-A)^2+B^2]^2}$ gefordert wird.

Auch das Vorkommen mehrerer Factoren von der soeben genannten Form ist ausgeschlossen, weil, wenn der Punkt $\zeta = \infty$ zwei verschiedenen Punkten $z = A+Bi$ und $z = A'+B'i$ entspräche, z als Function von ζ betrachtet nicht auf einer einblättrigen Riemann'schen Fläche eindeutig darstellbar wäre.

Die Abbildungsfunction für das Aeussere eines geradlinigen Polygons wird daher von der Form:

$$\zeta - \zeta_0 = C \int_{z_0}^{z} (z-a_1)^{\lambda_1-1}(z-a_2)^{\lambda_2-1} \ldots (z-a_n)^{\lambda_n-1} \times \frac{dz}{[(z-A)^2+B^2]^2}.$$

Hierin ist der Punkt $z = A+Bi$ nicht beliebig. Die Entwicklung der Function unter dem Integralzeichen in der Umgebung von $z = A+Bi$ liefert nämlich im allgemeinen auch Glieder mit $(z-A-Bi)^{-1}$, und die Integration derselben Logarithmen. Damit letztere sich gegenseitig aufheben, muss

$$\sum_1^n \frac{\lambda_h - 1}{B+Bi-a_h} - \frac{1}{Bi} = 0$$

gemacht werden, woraus sich durch Separation des Reellen von dem Imaginären zwei Gleichungen zur Bestimmung von A und B ergeben.

Der Winkel $\pi\lambda$ des $(n+1)$-Ecks, dessen Eckpunkt dem Punkte $z=\infty$ des z-Gebietes entspricht, folgt aus den andern Winkeln vermittelst der Formel

$$\lambda = n+3-\sum_1^n \lambda_h,$$

woraus dann noch, weil jeder der Winkel zwischen 0 und 2π liegen muss, die Bedingung folgt:

$$n+1 < \sum_1^n \lambda_h < n+3.$$

Will man die dem Winkel λ entsprechende Ecke ausfallen lassen (aus demselben Grunde wie bei dem vorigen Problem), so ist wieder $\lambda = 2$ zu setzen.

Uebrigens wollen wir bei den allgemeinen Formeln für λ

$$\lambda = n-1-\sum_1^n \lambda_h \quad \text{für das Innere}$$

und

$$\lambda = n+3-\sum_1^n \lambda_h \quad \text{für das Aeussere}$$

des $(n+1)$-Ecks stehen bleiben, weil sie die analytisch einfacheren sind.

§ 4.

Jede der beiden betrachteten Abbildungsfunctionen kann als Lösung einer linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung.

$$\frac{d^2\zeta}{dz^2}+p\frac{d\zeta}{dz}=0$$

angesehen werden; im ersten Falle ist

$$p = -\left(\frac{\lambda_1-1}{z-a_1}+\frac{\lambda_2-1}{z-a_2}+\dots+\frac{\lambda_n-1}{z-a_n}\right),$$

im zweiten Falle

$$p = \frac{2}{z-(A+Bi)}+\frac{2}{z-(A-Bi)}-\left(\frac{\lambda_1-1}{z-a_1}+\frac{\lambda_2-1}{z-a_2}+\dots+\frac{\lambda_n-1}{z-a_n}\right).$$

Ferner ist bekannt (aus den oben citirten Abhandlungen von Schwarz im 70. und 75. Bande des Crelle'schen Journals), dass die-

jenige Differentialgleichung, vermittelst deren Lösungen die Abbildung der unendlichen Halbebene auf dem Innern eines von Kreisbögen begrenzten Dreiecks dargestellt wird, die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe (oder eine ihr äquivalente Differentialgleichung) ist.

Diese homogenen linearen Differentialgleichungen 2ter Ordnung haben alle die Eigenschaft, dass ihre Coefficienten rationale Functionen von z sind, und dass ihre Lösungen nur wie Potenzen unstetig werden oder sich verzweigen. Die besonderen Fälle, in welchen in den Lösungen Logarithmen auftreten, mussten nämlich ausgeschlossen werden.

Man wird hieraus schliessen, dass auch die beiden allgemeineren Probleme, die unendliche Halbebene auf dem Innern oder dem Aeusseren eines aus Kreisbögen gebildeten Polygons abzubilden, von welchen in dem vorigen Paragraphen bereits constatirt wurde, dass sie auf eine homogene lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung zurückführbar sind, auf eine solche führen müssen, deren Lösungen nur wie Potenzen unstetig werden oder sich verzweigen.

Derartige Differentialgleichungen sind, nachdem durch die Arbeiten von Gauss und Riemann über die hypergeometrische Differentialgleichung und deren Erweiterung [13]) ein besonders interessanter specieller Fall seine Erledigung gefunden hatte, wohl zuerst von Fuchs in seiner für die Theorie der linearen Differentialgleichungen bahnbrechenden Abhandlung „zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten" [14]) als eine besondere Classe linearer Differentialgleichungen hingestellt und eingehend behandelt worden. Sie sind dann auch ein Gegenstand der Studien mehrerer anderer Autoren gewesen.

Um der Einheit der Darstellung willen [illegible], die für unsere Aufgabe [illegible] hier kurz zu entwickeln, indem wir uns auf die Differentialgleichungen zweiter Ordnung beschränken, weil diese allein für das [illegible] Abbildungsproblem in Betracht kommen.

---

[13]) Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam [illegible]. Werke Band III. — Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen. Aus den Abhandlungen der König. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Band 7.

[14]) [illegible] Journal für Mathematik. Band 66.

Die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung haben bekanntlich die Eigenschaft, dass, wenn man ein particuläres Integral derselben kennt, ein zweites mit Hilfe des ersten durch eine Quadratur gefunden werden kann; ein Umstand, welcher die folgende einfache Betrachtung ermöglicht.

Wir fragen zunächst: Wie müssen die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + p\frac{d\omega}{dz} + q\omega = 0$$

beschaffen sein, damit für jeden singulären Punkt $z = a$, für welchen eine Particularlösung vorhanden ist, welche sich in der Umgebung dieses Punktes wie eine Potenz von $z-a$ verhält, noch eine zweite (von der ersten unabhängige) Particularlösung von eben derselben Eigenschaft existire?

Sei ω_1 die erste der beiden Particularlösungen, von welcher also vorausgesetzt wird, dass sie von der Form $\omega_1 = (z-a)^\lambda . \varphi(z)$ sei, wo φ eine nach dem Taylor'schen Lehrsatz nach Potenzen von $z-a$ entwickelbare und für $z = a$ von Null verschiedene Function sein muss.

ω_2 sei die zweite Particularlösung, so folgt leicht

$$\omega_2 \frac{d^2\omega_1}{dz^2} - \omega_1 \frac{d^2\omega_2}{dz^2} + \mu\left(\omega_2 \frac{d\omega_1}{dz} - \omega_1 \frac{d\omega_2}{dz}\right) = 0$$

und hieraus durch Integration:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \int \frac{dz}{\omega_1^2} e^{-\int p dz}$$

da ω_2 von ähnlicher Form wie ω_1 werden soll, so folgt, dass

$$e^{-\int p dz} = (z-a)^\mu . \psi(z)$$

sein muss, und ψ eine Function von derselben Beschaffenheit wie φ, woraus sich dann

$$-p = \frac{\mu}{z-a} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$$

ergiebt [12]).

---

12) Die Gleichung

$$\omega_2 \frac{d\omega_1}{dz} - \omega_1 \frac{d\omega_2}{dz} = Ce^{-\int p dz}$$

ist, wie Schwarz in No. II. der Abhandlung im 75. Bande des Crelle'schen Journals bemerkt hat, zuerst von Abel (Crelle's J. Bd. 2, pag. 24—25) ange-

Damit ist erwiesen, dass für jeden im Endlichen gelegenen Unstetigkeitspunkt $z = a$

p_1 nach steigenden Potenzen von $z - a$ entwickelt, mit einem Gliede

$$\frac{\alpha}{z - a}$$

beginnen muss.

Alsdann wird

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \int (z - a)^{-(2\lambda + \alpha)} . [1 + \ldots] dz,$$

worin der in [ ] stehende Ausdruck eine nach positiven ganzen Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe mit dem Anfangsgliede 1 bezeichnen soll. Die Integration der Potenzreihe unter dem Integralzeichen liefert im allgemeinen eine Reihe von ähnlicher Form; ausgenommen ist nur der Fall, dass $-(2\lambda + \alpha)$ eine negative ganze Zahl ist, weil dann in dem Integral der Reihe ein Logarithmus auftreten würde. Wir werden hierauf später mit Beziehung auf unsere Aufgabe genauer einzugehen haben.

Die analoge Betrachtung für den Punkt $z = \infty$ ergiebt, dass die Entwicklung von p nach fallenden Potenzen von z mit einem Gliede $\frac{\text{const}}{z}$ beginnen muss.

Aus diesen beiden Ergebnissen folgt mit Notwendigkeit, dass die Function p nur eine Summe einfacher Partialbrüche sein kann. Also gilt der Satz:

Die Bedingung $p = \Sigma \frac{a_h}{z - a_h}$ ist die notwendige (und im allgemeinen auch hinreichende) Bedingung dafür, dass an jeder Stelle des z-Gebietes, wo die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + p \frac{d\omega}{dz} + q\omega = 0$$

eine Particularlösung vom Charakter einer Potenz hat, sie noch eine zweite, von jener unabhängige Particularlösung hat, welche ebenfalls den Charakter einer Potenz besitzt.

---

geben worden. Also dürfte der Letztere als Entdecker des Zusammenhanges zwischen den beiden Particularlösungen der linearen Differentialgleichung 2. O. anzusehen sein.

Es bleibt noch übrig, q so zu bestimmen, dass die Differentialgleichung an jeder Stelle des z-Gebietes eine Particularlösung von der Form

$$(z-a)^\rho\{1+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots\}$$

und für hinreichend grosse z eine von der Form

$$\left(\frac{1}{z}\right)^\rho\left\{1+\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z^2}+\ldots\right\}$$

wirklich besitzt (und alsdann nach dem obigen Satze — ganz specielle, vorläufig ausser Acht zu lassende Fälle ausgenommen — auch eine zweite).

Die Methode der unbestimmten Coefficienten liefert leicht für q die folgenden beiden Bedingungen:

1) q muss für jeden Wert $z=a$ nach steigenden ganzen Potenzen von $z-a$ entwickelbar sein, und die Entwicklung darf keine niedrigere Potenz enthalten, als die -2te;

2) q muss für hinreichend grosse Werte des Arguments nach fallenden Potenzen von z entwickelbar sein, und die höchste Potenz der Entwicklung darf keine höhere sein als die -2te.

Hieraus folgt, dass q eine rationale Function sein muss von der Form

$$q=\Sigma\frac{\beta_{hh}}{(z-a_h)^2}+\Sigma\frac{\beta_h}{z-a_h},$$

worin die Coefficienten β_{hh} beliebig, die Coefficienten β_h aber durch die Relation

$$\Sigma\beta_h=0$$

verbunden sind.

Hinsichtlich der singulären Punkte einer linearen Differentialgleichung gilt bekanntlich der Satz, dass die Lösungen einer solchen keine andern singulären Punkte besitzen können, als den Punkt $z=\infty$ und diejenigen Punkte, für welche die Coefficienten der Differentialgleichung unstetig werden[13]).

Also sind die vorhin betrachteten Unstetigkeitspunkte die einzigen.

Für unsere Aufgabe hat sich durch die obigen Ueberlegungen vor der Hand das Resultat ergeben, „dass die zu suchende Differen-„tialgleichung 2. O., auf welche dieselbe zurückführbar sein muss

---

13) Crelle's Journal Bd. 66, Abhandl. von Fuchs, S. 146.

$$\frac{d^2\omega}{dz^2}+p\frac{d\omega}{dz}+q\omega=0$$

„nur solche Coefficienten p, q haben wird, welche in der Form

$$p=\Sigma\frac{\alpha_h}{z-a_h},$$

$$q=\Sigma\frac{\beta_{hh}}{(z-a_h)^2}+\Sigma\frac{\beta_h}{z-a_h},\quad \Sigma\beta_h=0$$

„enthalten sind."

Eine fernere Reduction wird durch den Umstand verstattet, dass (zufolge § 2.) hinsichtlich der hier vorliegenden Abbildungsprobleme jede zwei Differentialgleichungen, für welche die Function $2q-\frac{1}{2}p^2-\frac{dp}{dz}$ denselben Wert behält, als äquivalent zu betrachten sind, wenn man die aus einer von ihnen gefundene Abbildung durch eine passend zu bestimmende lineare Substitution

$$\zeta_1=\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}$$

transformirt.

Man darf sich also unter allen Differentialgleichungen von der genannten Eigenschaft die einfachste aussuchen.

Da

$$2q-\frac{1}{2}p^2-\frac{dp}{dz}=\Sigma\frac{2\beta_{hh}-\frac{1}{2}\alpha_h^2+\alpha_h}{(z-a_h)^2}+\Sigma\frac{2\beta_h-\alpha_h B_h}{z-a_h}$$

wird, worin

$$B_h=\frac{\alpha_1}{a_h-a_1}+\frac{\alpha_2}{a_h-a_2}+\ldots+\frac{\alpha_{h-1}}{a_h-a_{h-1}}+\frac{\alpha_{h+1}}{a_h-a_{h+1}}+\ldots\frac{\alpha_n}{a_h-a_n},$$

so darf man die Parameter α_h, β_h und β_{hh} der ursprünglich gegebenen Differentialgleichung so ändern, dass die Ausdrücke

$$2\beta_{hh}+\alpha_h-\frac{1}{2}\alpha_h^2 \quad\text{und}\quad 2\beta_h-\alpha_h B_h$$

i n v a r i a n t bleiben.

Unterscheiden wir für den Augenblick die neuen Parameter von den ursprünglich gegebenen durch Striche, so muss den beiden Systemen Bedingungen Genüge geleistet werden:

$$2\beta_{hh}+\alpha_h-\frac{1}{2}\alpha_h^2=2\beta'_{hh}+\alpha'_h-\frac{1}{2}\alpha'^2_h,$$
$$2\beta_h-\alpha_h B_h=2\beta'_h-\alpha'_h B'_h.$$

Ausserdem ist von früher bekannt, dass die β_k jederzeit der Bedingung

$$\Sigma\beta_k = 0$$

unterworfen werden müssen.

Hieraus folgt, dass die $\beta'_{kk} = 0$ gesetzt und die α'_k dem entsprechend bestimmt werden können. Mit den α'_k sind dann auch zugleich die β'_k bestimmt, und die letzteren gehorchen (wie man vermöge der Identität $\Sigma\alpha_k B_k = 0$ leicht einsieht) von selbst der Bedingung $\Sigma\beta'_k = 0$, wenn die ursprünglich gegebenen β_k, von denen man ausging, dieser Bedingung gehorchten.

Wir dürfen also in dem Folgenden

$$p = \Sigma \frac{\alpha_k}{z - a_k}, \quad q = \Sigma \frac{\beta_k}{z - a_k} \quad \text{und} \quad \Sigma\beta_k = 0 \quad \text{annehmen.}$$

Diese Reduction vereinfacht die Differentialgleichung nicht nur in so fern als die Anzahl ihrer Parameter um n vermindert wird — das liesse sich auch auf andere Weise, so namentlich durch Fortschaffung des Coefficienten p, erreichen — sondern auch hinsichtlich der Beschaffenheit der Hauptintegrale.

Bildet man nämlich, um den charakteristischen Exponenten ϱ dieser Hauptintegrale zu ermitteln, die determinirende Fundamentalgleichung für jeden singulären Punkt [14]), so findet man für den Punkt a_k:

$$\varrho^2 - (1 - \alpha_k)\varrho = 0$$

und für den Punkt ∞:

$$\varrho^2 + (1 - \Sigma\alpha_k)\varrho + \Sigma\beta_k a_k = 0.$$

Also wird für jeden im Endlichen gelegenen singulären Punkt einer der beiden charakteristischen Exponenten ϱ gleich Null, und somit eines der beiden zu diesem Punkte gehörigen Hauptintegrale **regulär**.

Um die Analogie der zuletzt erhaltenen Differentialgleichung mit derjenigen der hypergeometrischen Reihe in der von Gauss gewählten Form hervor zu heben, kann man an Stelle zweier der bisher benutzten Constanten die Exponenten der beiden Hauptintegrale des Punktes Unendlich einführen, welche durch α, β zu bezeichnen sind.

Vermöge der Relationen

---

[14]) cf. Crelle J. d. Math. Bd. 68, pag. 361 und 367.

$$\Sigma\alpha_h - 1 = \alpha + \beta, \quad \Sigma\beta_h a_h = \alpha\beta, \quad \Sigma\beta_h = 0$$

wird

$$p = \frac{(\alpha+\beta+1)z^{n-1}+\ldots}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}, \quad q = \frac{\alpha\beta z^{n-2}+\ldots}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}.$$

„Die Probleme, das Innere eines Kreises oder (was damit „äquivalent ist) die unendliche Halbebene auf dem Innern oder dem „Aeussern eines von Kreisbögen gebildeten Polygons conform abzu- „bilden, lassen sich auf die Integration linear homogener Differen- „tialgleichungen zweiter Ordnung von der Form

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{(\alpha+\beta+1)z^{n-1}+\ldots}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)} \cdot \frac{d\omega}{dz} + \frac{\alpha\beta z^{n-2}+\ldots}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}\omega = 0$$

„zurückführen“.

Für $n = 2$, wenn man eines der a gleich Null und das andere gleich 1 setzt, bekommt man die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe.

„Die Hauptintegrale der obigen Differentialgleichung für die „Umgebung des singulären Punktes $z = \infty$ werden von der Form

$$\left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha}(1+\ldots) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{z}\right)^{\beta}(1+\ldots),$$

„und die übrigen singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots a_n$ besitzen je ein „Hauptintegral von der Form

$$1 + c_1(z-a_h) + \ldots,$$

„während die charakteristischen Exponenten der zweiten Hauptinte- „grale durch Zerlegung des Coefficienten von $\frac{d\omega}{dz}$ in Partialbrüche „gefunden werden; hat man nämlich $p = \Sigma\frac{\alpha_h}{z-a_h}$ gefunden, so wird „das zweite Hauptintegral des Punktes a_h von der Form

$$(z-a_h)^{1-\alpha_h}.(1+\ldots)“.$$

Die Coefficienten α_h sind übrigens für unser Problem als Parameter sehr geeignet (freilich reicht ihre Anzahl nicht hin, so dass ausser ihnen noch andere Parameter nötig sind). Auch zeigen sie eine offenbare Analogie zu dem Parameter γ des Nenners der Coefficienten der hypergeometrischen Reihe, worüber folgende Bemerkung verstattet sein möge.

Man beweist leicht den Satz: Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung 2. O. in der Umgebung von $z = a$ ein Integral von der Form

$$(z-a)^\varrho\{1+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\ldots\}$$

besitzt, so sind die Nenner der Coefficienten c_1, c_2, $c_3 \ldots$ jederzeit von der Form:

$$\text{respective } \gamma,\quad 1.2\gamma(\gamma+1),\quad 1.2.3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2) \quad \text{u. s. w.}$$

Existirt nun an derselben Stelle noch ein zweites Integral von eben derselben Form, und bezeichnet man die charakteristische Constante der Nenner der Coefficienten durch γ', so ist immer

$$\gamma+\gamma'=2$$ [15].

Dasselbe gilt auch für den Punkt $z=\infty$.

Für die besondere Form der Differentialgleichung, welche vorhin betrachtet wurde, ergiebt sich (bei Einführung der entsprechenden Bezeichnung):

$$\gamma_h=\alpha_h,\quad \gamma'_h=2-\alpha_h.$$

Bezeichnen endlich γ_∞ und γ'_∞ die betreffenden charakteristischen Constanten der Entwicklung der Hauptintegrale des singulären Punktes $z=\infty$, so wird

$$\gamma_\infty=\alpha-\beta+1,\quad \gamma'_\infty=\beta-\alpha+1,$$

wenn α und β, wie vorhin, die charakteristischen Exponenten dieser Hauptintegrale bedeuten.

§ 5.

Wenn unter den Parametern α_h der zuletzt entwickelten Differentialgleichung ganze Zahlen vorkommen, so treten in der Entwicklung des einen der betreffenden Hauptintegrale im allgemeinen Logarithmen auf; man kann dieselben aber durch Festsetzung gewisser Relationen zwischen den α_h und β_h fortschaffen.

Da für unsere Aufgabe nur der Fall $\alpha_h=2$ zur Anwendung kommen wird, so wollen wir uns auf die Untersuchung dieses Falles beschränken. Es hat keine Schwierigkeit, die betreffende Relation — für Differentialgleichungen zweiter Ordnung giebt es für jede der

---

15) Für lin. hom. Differentialgleichungen höherer Ordnungen gilt etwas Entsprechendes. Die Nenner der Entwicklungscoefficienten werden für die rentialgleichung 3. O. von der Form:

$$\gamma.\delta,\quad 1.2\gamma(\gamma+1)\delta(\delta+1) \quad \text{u. s. w.},$$

und zwischen den Coefficienten γ, δ und den entsprechenden γ', δ' etc., der Differandern Lösungen herrscht die Beziehung:

$$\gamma+\gamma'+\gamma''+\delta+\delta'+\delta''=2..3.$$

betreffenden singulären Stellen nur eine — direct herzuleiten; um aber so viel als möglich an die allgemeine Theorie der linearen Differentialgleichungen anzuknüpfen, bedienen wir uns zu dem genannten Zwecke der von Frobenius [16]) gegebenen allgemeinen Formeln. Zur Bequemlichkeit des Lesers sei es verstattet, dieselben hier anzuführen.

Eine Differentialgleichung λter Ordnung gehöre zu der Classe derjenigen, welche unter der allgemeinen Form

$$p(x).x^\lambda y^{(\lambda)} + p_1(x)x^{\lambda-1}y^{(\lambda-1)} + \ldots + p_\lambda(x)y = 0$$

enthalten sind, worin p, $p_1 \ldots p_\lambda$ Potenzreihen von x sein sollen, welche für $x = 0$ endlich bleiben; ausserdem soll die Function p für $x = 0$ von Null verschieden sein.

Bildet man die Function

$$f(x,\varrho) = \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-\lambda+1)p(x) + \varrho(\varrho-1)\ldots(\varrho-\lambda+2)p_1(x) + \ldots + p_\lambda(x)$$

und setzt dieselbe $= \Sigma f_\nu(\varrho)x^\nu$, indem man nach Potenzen von x entwickelt, so wird

$$f(\varrho) = 0$$

die determinirende Fundamentalgleichung des singulären Punktes $x = 0$.

Sei jetzt ϱ_0, $\varrho_1 \ldots \varrho_k$ eine Gruppe von Wurzeln dieser Gleichung, welche nur um ganze Zahlen von einander unterschieden sind. Dieselben seien nach fallender Grösse ihrer ganzzahligen Teile geordnet.

Bildet man die Determinante

$$(-1)^\nu h_\nu(\varrho) = \begin{vmatrix} f_1(\varrho+\nu-1) & f_2(\varrho+\nu-2) & \ldots & f_{\nu-1}(\varrho+1) & f_\nu(\varrho) \\ f(\varrho+\nu-1) & f_1(\varrho+\nu-2) & \ldots & f_{\nu-2}(\varrho+1) & f_{\nu-1}(\varrho) \\ 0 & f(\varrho+\nu-2) & \ldots & f_{\nu-3}(\varrho+1) & f_{\nu-2}(\varrho) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & f(\varrho+1) & f_1(\varrho) \end{vmatrix}$$

so sind die Gleichungen

$$\begin{array}{lll} h_\nu(\varrho) = 0 & \text{für} & \nu = \varrho_{k-1} - \varrho_k \\ h'_\nu(\varrho) = 0 & „ & \nu = \varrho_{k-2} - \varrho_k \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ h_\nu^{(k-1)}(\varrho) = 0 & „ & \nu = \varrho_0 - \varrho_k, \end{array}$$

16) „Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen". Crelle J. Bd. 76.

wenn sie durch den Wert $\varrho = \varrho_k$ befriedigt werden, die Bedingungen dafür, dass in dem zur Wurzel ϱ_k gehörigen Integral der Differentialgleichung keine Logarithmen auftreten.

Die Anwendung dieses Satzes auf unsere Aufgabe, indem wir einen der dort vorkommenden Coefficienten α_h gleich 2 setzen und das entsprechende β und a durch Fortlassen des Index markiren, also die Differentialgleichung 2. O.

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left(\frac{2}{z-a} + \Sigma \frac{\alpha_h}{z-a_h}\right)\frac{d\omega}{dz} + \left(\frac{\beta}{z-a} + \Sigma \frac{\beta_h}{z-a_h}\right)\omega = 0$$

ins Auge fassen, ergiebt leicht, da hier die Gruppe nur aus den beiden Exponenten

$$\varrho_0 = 0, \quad \varrho_1 = -1$$

besteht, als einzige Bedingung die Relation

$$\beta = \Sigma \frac{\alpha_h}{a-a_h}.$$

Das Summenzeichen bezieht sich auf alle a_h mit Ausnahme dessen, welches durch Fortlassung des Index ausgezeichnet worden ist; haben mehrere Coefficienten α_h den Wert 2, so gilt für jeden der entsprechenden singulären Punkte a eine Bedingung von der angegebenen Form.

Wir wollen demnächst die Winkel der den reellen singulären Punkten a_h in dem ζ-Gebiet entsprechenden Ecken des durch den Quotienten zweier Lösungen unserer Differentialgleichung darstellbaren Kreisbogenpolygons durch die Coefficienten α_h und die beiden Exponenten α und β ausdrücken — die beiden letzteren Buchstaben jetzt wieder in dem zu Ende des vorigen Paragraphen angegebenen Sinne gebraucht.

Für die hypergeometrische Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{(\alpha+\beta+1)z-\gamma}{z(z-1)} \cdot \frac{d\omega}{dz} + \frac{\alpha\beta}{z(z-1)}\omega = 0$$

werden, wenn man mit Schwarz die den singulären Werten $x = 0$, $x = \infty$, $x = 1$ entsprechenden Polygonwinkel des ζ-Gebietes durch $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ bezeichnet, dieselben den absoluten Beträgen von

$$(1-\gamma)\pi, \quad (\alpha-\beta)\pi, \quad (\gamma-\alpha-\beta)\pi$$

gleich [17]). Führt man die Coefficienten α_1, α_2 ein, indem man den Bruch $\frac{(\alpha+\beta+1)z-\delta}{z(z-1)}$ in Partialbrüche zerlegt, so wird

$$\lambda\pi = [1-\alpha_1]\pi, \quad \mu\pi = [\alpha-\beta]\pi, \quad \nu\pi = [1-\alpha_2]\,\pi$$

(die eckigen Klammern bezeichnen die absoluten Beträge).

Für ein beliebiges Polygon mögen die den Punkten $a_1, a_2 \ldots a_n$ entsprechenden Winkel durch $\lambda_1\pi$, $\lambda_2\pi \ldots \lambda_n\pi$ und der dem Punkte $z=\infty$ entsprechende Winkel durch $\lambda\pi$ ohne Index bezeichnet werden. Alsdann wird, wie sich vermittelst der Resultate des vorigen Paragraphen leicht ergiebt:

$$\lambda_h\pi = [1-\alpha_h]\pi, \quad (h = 1, 2 \ldots n) \quad \text{und} \quad \lambda\pi = [\alpha-\beta]\pi.$$

Um Alles beisammen zu haben, was zur Beurteilung des Zusammenhanges von z und ζ nötig ist, bedarf es noch eines Ausdruckes für das Differentialverhältniss $d\zeta : dz$, welcher leicht beschafft werden kann.

Seien f und g zwei von einander unabhängige Particularlösungen der I. Differentialgleichung [zwei Hauptintegrale mit ihren stetigen Fortsetzungen], also

$$\zeta = \frac{Af+Bg}{Cf+Dg}$$

die Abbildungsfunction.

Aus der Gleichung

$$gf''-fg''+p(gf'-fg') = 0$$

folgt:

$$gf'-fg' = \text{Const}\,(z-a_1)^{-\alpha_1}(z-a_2)^{-\alpha_2} \ldots (z-a_n)^{-\alpha_n}$$

und

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{(AD-BC)\cdot(gf'-fg')}{(Cf+Dg)^2} = \text{Const}\,\frac{(z-a_1)^{-\alpha_1}(z-a_2)^{-\alpha_2}\ldots(z-a_n)^{-\alpha_n}}{(Cf+Dg)^2}$$

Wir wollen jetzt kurz nachweisen,

„dass zwischen allen Punkten der Halbebene des z-Gebietes und „des correspondirenden ζ-Gebietes ein gegenseitig eindeutiges Ent„sprechen stattfindet, unter der Voraussetzung, dass:

„a) in den Coefficienten p und q der linearen Differentialgleichung „2. O. ausser den reellen Punkten a_1, $a_2 \ldots a_n$ und ∞ keine singu„lären Punkte weiter vorkommen;“

---

17) Crelle J. Bd. 75. a. a. O. Nr. 3.

„b) die absoluten Beträge

$$[1-\alpha_1],\ [1-\alpha_2] \ldots [1-\alpha_n] \quad \text{und} \quad [\alpha-\beta]$$

„sämtlich zwischen 0 und 2 liegen, und keine ganzen Zahlen sind".

Der erste Teil der unter b) gemachten Voraussetzungen ist zu Anfang des § 2. motivirt worden (dass nämlich jeder der Winkel des Polygons kleiner als 2π sein soll); was aber den zweiten Teil anbelangt, so würde die entgegengesetzte Annahme, dass einer oder einige jener absoluten Beträge die Werte 0, 1 oder 2 besitzen, sich mittels der in diesem Paragraphen (und in dem vorigen) angegebenen Hilfsmittel erledigen lassen, aber hier den Gang der allgemeinen Betrachtungen unterbrechen; übrigens gehört ihre Untersuchung mit der ganz analogen der Adjungirung complexer singulärer Punkte zusammen, welche den Gegenstand des nächstfolgenden Paragraphen bilden soll.

Da die Functionen f und g als Lösungen einer linearen Differentialgleichung unter der Voraussetzung a) ausser den am Rande der Halbebene gelegenen Punkten $z = a_1, a_2 \ldots a_n$ und ∞ keine weiteren singulären Punkte besitzen, so ist die aus ihnen auf rationale Weise zusammengesetzte Function ζ an jeder Stelle im Innern des z-Gebietes nach ganzen Potenzen des Increments von z entwickelbar. Damit aber von z, als Function von ζ betrachtet, ein Gleiches gelte, ist nachzuweisen, dass das Innere des z-Gebietes keine sogenannten Brennpunkte [18]) enthält, für welche das Gesetz der Conformität eine Ausnahme erleidet. Wenn unter denjenigen Punkten z, für welche ζ endlich bleibt, ein Brennpunkt vorhanden wäre, so müsste für ihn $\frac{d\zeta}{dz}$ verschwinden; dass Letzeres ausser den singulären Punkten $a_1 \ldots a_n$ für keinen Punkt des z-Gebietes statthaben kann, lehrt der für $\frac{d\zeta}{dz}$ gegebene Ausdruck.

Es bleibt noch übrig, diejenigen Punkte $z = p$ zu untersuchen, für welche etwa ζ unendlich wird. Entwickeln wir in diesem Falle ζ in der Umgebung von $z = p$ nach Potenzen des Increments δ, so wird

$$\zeta = \frac{(Af(p)+Bg(p))+\delta(Af'(p)+Bg'(p))+\ldots}{\delta(Cf'(p)+Dg'(p))+\frac{1}{2}\delta^2(Cf''(p)+Dg''(p))+\ldots}.$$

---

18) Der Ausdruck rührt von Siebeck her. cf. „Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen", Crelle J. Bd. 55.

Soll δ nicht nach ganzen Potenzen von $\frac{1}{\zeta}$ entwickelbar sein, so muss ausser der Gleichung

$$Cf(p)+Dg(p)=0$$

noch die Gleichung

$$Cf'(p)+Dg'(p)=0$$

bestehen, woraus

$$\begin{vmatrix} f(p) & g(p) \\ f'(p) & g'(p) \end{vmatrix} = 0$$

folgen würde.

Dass kann wiederum nicht sein, weil der für $gf'-fg'$ angegebene Ausdruck dem widerstreitet.

Damit ist bewiesen, dass ζ im Innern des z-Gebietes keinerlei Brennpunkte haben kann, und die Functionen z und ζ entsprechen sich daher innerhalb der beiden abgegrenzten Gebiete gegenseitig eindeutig; woraus zugleich folgt, dass, wenn ζ überhaupt im Innern der betrachteten Halbebene unendlich wird, dieses nur in einem Punkte derselben geschehen kann. Durch passende Wahl der arbiträren Constanten $C:D$ kann man Letzteres immer entweder erreichen oder vermeiden; im einem Falle wird das Aeussere, im andern das Innere eines Kreisbogenpolygons auf die unendliche Halbebene conform abgebildet.

§ 6.

Nachdem zuletzt die im wesentlichen stattfindende Identität der auf die Abbildung des Innern und des Aeussern eines Kreisbogenpolygons bezüglichen Aufgaben nachgewiesen worden ist, schlagen wir einen andern zu demselben Resultate führenden Weg ein, indem wir zeigen werden, dass die zu Anfang des § 3. besprochene Christoffel'sche Methode, wenn man sie auf Kreisbogenpolygone ausdehnt, zu keiner wesentlich neuen Abbildungsfunction führt.

Es sei verstattet, zunächst ein möglichst einfaches Beispiel in Betracht zu ziehen.

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2}+\frac{\alpha_1}{z}\frac{d\omega}{dz}=0$$

ist jedenfalls die einfachste der unter der allgemeinen Form

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + p\frac{d\omega}{dz} + q\omega = 0,\quad p = \Sigma\frac{\alpha_h}{z - a_h},\quad q = \Sigma\frac{\beta_h}{z - a_h},\quad \Sigma\beta_h = 0$$

enthaltenen.

Ihre Integrale $\omega = \text{Const}$ und $\omega = z^{1-\alpha_1}$ führen auf die Abbildungsfunction

$$\zeta = \frac{A + Bz^{1-\alpha_1}}{C + Dz^{1-\alpha_1}},$$

welche die Abbildung der Halbebene auf einer Sichel liefert [19]).

Wir beabsichtigen jetzt dieselbe Aufgabe vermittelst einer Differentialgleichung zu lösen, welche ausser den singulären Punkten 0 und ∞ noch zwei (näher zu bestimmende) complexe singuläre Punkte

$$a = k + il,\quad b = k - il$$

besitzt. Der Zähler des einen der beiden auf diese Weise in der Function p hinzutretenden Partialbrüche werde für den Augenblick durch α_h bezeichnet, so wird das zweite Hauptintegral dieses Punktes a nach § 3. wie $(z-a)^{1-\alpha_h}$ unstetig sein müssen, und da diese Unstetigkeit in keinem der beiden Gebiete eine Verzweigung veranlassen darf — denn a liegt ausserhalb des Reellen und kann daher nicht ohne Modification der Aufgabe mit in die Begrenzung hineingezogen werden — so bleiben für $1 - \alpha_h$ nur die drei Werte 1, 0 und -1 zu discutiren. Der Wert $\alpha_h = 0$ hat keine Bedeutung, und der Wert $\alpha_h = 1$ ist auszuschliessen, weil für ihn die beiden Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung einander gleich werden, und daher einem Satze von Fuchs zufolge die Logarithmen in dem System der Hauptintegrale nicht zu vermeiden sein würden [20]).

Also muss

$$\alpha_h = 2$$

gesetzt werden.

Die Punkte a, b müssen notwendigerweise conjugirt imaginär sein, weil nur so die Realität der Function $F(z)$ auf der x-Axe gewahrt bleiben kann.

Demnach ist

$$p = \frac{\alpha_1}{z} + \frac{2}{z - (k + il)} + \frac{2}{z - (k - il)}$$

---

19) Kirchhoff, Mechanik pag. 287.

20) Crelle J. Bd. 68. p. 367.

$$q = \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z-(k+il)} + \frac{\beta_3}{z-(k-il)}, \quad \beta_1+\beta_2+\beta_3 = 0$$

zu setzen, wozu dann noch nach § 4. zur Vermeidung der Logarithmen die Relationen

$$\frac{\alpha_1}{k+il} + \frac{2}{k+il-(k-il)} = \beta_2$$

$$\frac{\alpha_1}{k-il} + \frac{2}{k-il-(k+il)} = \beta_3$$

hinzuzufügen sind.

Die Differentialgleichung möge auf die Gauss'sche Form

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{(\alpha+\beta+1)z^{n-1}+\ldots}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}\frac{d\omega}{dz} + \frac{\alpha\beta z^{n-2}+\ldots}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}\omega = 0$$

gebracht, also die Constanten α und β durch die Relationen

$$\Sigma\alpha_k - 1 = \alpha+\beta, \quad \Sigma\beta_k a_k = \alpha\beta$$

eingeführt werden.

Dieselben nehmen mit Hilfe der andern Relationen die Gestalt an:

$$3+\alpha_1 = \alpha+\beta \quad \text{und} \quad (\alpha-2)(\beta-2) = 0.$$

so dass also die eine der beiden Grössen α, β gleich 2 sein muss. Auch folgt noch, dass

$$(\alpha-\beta)^2 = (1-\alpha_1)^2.$$

was schon eine gute Bestätigung für die Richtigkeit der Lösung ist; denn die absoluten Werte von $(\alpha-\beta)\pi$ und $(1-\alpha_1)\pi$ sind die beiden Winkel der Sichel, welche einander gleich sein müssen.

Möge $\alpha = 2+\lambda$, $\beta = 2$ gesetzt, also $\alpha-\beta = \lambda$ als Parameter (für den Winkel) eingeführt werden; ferner werde $\frac{k}{\sqrt{k^2+l^2}} = \varkappa$, und $z\sqrt{k^2+l^2}$ für z gesetzt. Alsdann nimmt, wie man leicht sieht, die Differentialgleichung die Gestalt an:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \frac{(5+\lambda)z^2-2\varkappa(3+\lambda)z+(1+\lambda)}{z(z^2-2kz+1)}\frac{d\omega}{dz} + \frac{2(2+\lambda)z-2\varkappa(1+\lambda)}{z(z^2-2\varkappa z+1)}\omega = 0.$$

Diese Differentialgleichung besitzt die Particularlösungen

$$\frac{1}{1-2\varkappa z+z^2} \quad \text{und} \quad \frac{z^{-\lambda}}{1-2\varkappa z+z^2};$$

man findet dieselben, indem man auf die bekannte Weise — nämlich unter Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten — die beiden Hauptintegrale in der Umgebung des Punktes $z=\infty$ in der Form von Potenzreihen aufzustellen unternimmt. Dabei zeigt sich, dass dieselben einen gemeinschaftlichen Factor besitzen, welcher letztere sich als eine recurrente Reihe erweist und daher leicht summirt werden kann.

Die mit Hilfe dieser beiden Integrale construirte Abbildungsfunction

$$\zeta = \frac{A + Bz^{-\lambda}}{C + Dz^{-\lambda}}$$

ist in der Tat mit der auf dem ersten, einfacheren Wege gefundenen

$$\zeta = \frac{A + Bz^{1-\alpha_1}}{C + Dz^{1-\alpha_1}}$$

identisch.

Wir wollen jetzt das Entsprechende für das allgemeine Problem machen, also für die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + p\frac{d\omega}{dz} + q\omega = 0$$

mit den $n+1$ singulären Punkten $a_1, a_2 \ldots a_n$ und ∞, denen wir noch die beiden complexen singulären Punkte

$$a = k + il, \quad b = k - il$$

adjungiren.

Es wird demnach

$$p = \frac{2}{z-a} + \frac{2}{z-b} + \Sigma\frac{\alpha_h}{z-a_h},$$

$$q = \frac{\beta_{n+1}}{z-a} + \frac{\beta_{n+2}}{z-b} + \Sigma\frac{\beta_h}{z-a_h},$$

$$\beta_{n+1} + \beta_{n+2} + \Sigma\beta_h = 0,$$

und ausserdem nach § 4., zur Vermeidung der logarithmischen Unstetigkeiten

$$\beta_{n+1} = \frac{2}{a-b} + \Sigma\frac{\alpha_h}{a-a_h},$$

$$\beta_{n+2} = \frac{2}{b-a} + \Sigma\frac{\alpha_h}{b-a_h}$$

zu setzen sein.

Diese Differentialgleichung wollen wir auf eine andere zurückführen, welche nur die singulären Punkte $a_1, a_2 \ldots a_n$ und ∞ enthält.

Die Parameter $\alpha'_1 \ldots \alpha'_n$, $\beta'_1 \ldots \beta'_n$ dieser letzteren müssen also zufolge des am Schlusse des § 2. angegebenen allgemeinen Transformationsresultats so bestimmt werden, dass der Ausdruck

$$2q - \tfrac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dz}$$

für beide Differentialgleichungen denselben Wert behält. Ausserdem muss

$$\Sigma \beta'_h = 0$$

sein.

In § 3. wurde gefunden, dass, wenn p, q von der Form

$$p = \Sigma \frac{\alpha_h}{z - a_h}, \quad q = \Sigma \frac{\beta_{hh}}{(z - a_h)^2} + \Sigma \frac{\beta_h}{z - a_h}, \quad \Sigma \beta_h = 0$$

sind,

$$2q - \tfrac{1}{2}p^2 - \frac{dp}{dz} = \Sigma \frac{2\beta_{hh} - \frac{1}{2}\alpha_h^2 + \alpha_h}{(z - a_h)^2} + \Sigma \frac{2\beta_h - \alpha_h B_h}{z - a_h},$$

$$B_h = \frac{\alpha_1}{a_h - a_1} + \ldots + \frac{\alpha_{h-1}}{a_h - a_{h-1}} + \frac{\alpha_{h+1}}{a_h - a_{h+1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{a_h - a_n}$$

wird. Die Anwendung auf die hier mit einander zu vergleichenden beiden Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + \left(\frac{2}{z - a} + \frac{2}{z - b} + \Sigma \frac{\alpha_h}{z - a_h}\right)\frac{d\omega}{dz}$$
$$+ \left(\frac{\beta_{n+1}}{z - a} + \frac{\beta_{n+2}}{z - b} + \Sigma \frac{\beta_h}{z - a_h}\right)\omega = 0$$

und

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \left(\Sigma \frac{\alpha'_h}{z - a_h}\right)\frac{dw}{dz} + \left(\Sigma \frac{\beta'_h}{z - a_h}\right)w = 0$$

liefert sofort die Relationen

$$\beta_{n+1} - \left\{\frac{2}{a - b} + \Sigma \frac{\alpha_h}{a - a_h}\right\} = 0, \quad \beta_{n+2} - \left\{\frac{2}{b - a} + \Sigma \frac{\alpha_h}{b - a_h}\right\} = 0,$$

$$-\tfrac{1}{2}\alpha_h^2 + \alpha_h = -\tfrac{1}{2}\alpha'^2_h + \alpha'_h,$$

$$2\beta_h - \alpha_h\left\{\frac{2}{a_h - a} + \frac{2}{a_h - b} + B_h\right\} = 2\beta'_h - \alpha'_h B'_h,$$

worin

$$B_h = \frac{\alpha_1}{a_h - a_1} + \ldots + \frac{\alpha_{h-1}}{a_h - a_{h-1}} + \frac{\alpha_{h+1}}{a_h - a_{h+1}} + \ldots + \frac{\alpha_n}{},$$

$$B'_k = \frac{\alpha'_1}{a_k - a_1} + \ldots + \frac{\alpha'_{k-1}}{a_k - a_{k-1}} + \frac{\alpha'_{k+1}}{a_k - a_{k+1}} + \ldots + \frac{\alpha'_n}{a_k - a_n}.$$

Die beiden ersten zeigen sich als identisch mit denjenigen, welche als Bedingung dafür, dass die Integrale von Logarithmen frei sind, vorhin gefunden wurden, und aus den übrigen können die gestrichenen α und β durch die ungestrichenen ausgedrückt werden.

Aus den Gleichungen

$$-\tfrac{1}{2}\alpha^2_k + \alpha_k = -\tfrac{1}{2}\alpha'^2_k + \alpha'_k$$

folgt, dass entweder $\alpha'_k = \alpha_k$, oder $\alpha'_k = 2 - \alpha_k$ sein muss.

Die Relationen zwischen den β_k und β'_k ergeben:

$$\beta'_k = \beta_k + \alpha_k\left(\frac{1}{a - a_k} + \frac{1}{b - a_k}\right) + \tfrac{1}{2}(\alpha'_k B'_k - \alpha_k B_k).$$

Damit ist die Ausführbarkeit der Reduction der Differentialgleichung, von welcher wir ausgingen auf eine Differentialgleichung mit denselben reellen und ohne die imaginären singulären Punkte gezeigt, und sie ist, da jedes der α'_k entweder gleich α_k oder gleich $2 - \alpha_k$ gesetzt werden darf, auf 2^n verschiedene Arten ausführbar.

Die Integrale der beiden Differentialgleichungen müssen durch eine Relation

$$\omega = u . w$$

mit einander verbunden sein, und man findet leicht, dass es diese ist:

$$\omega = \frac{\sqrt{(z - a_1)^{\alpha'_1 - \alpha_1}(z - a_2)^{\alpha'_2 - \alpha_2} \ldots (z - a_n)^{\alpha'_n - \alpha_n}}}{(z - k)^2 + l^2} . w.$$

Am einfachsten ist es, die sämtlichen gestrichenen α den ungestrichenen gleich zu machen. Auf diese Weise wird:

$$\omega = \frac{w}{(z - k)^2 + l^2},$$

$$\beta'_k = \beta_k + \alpha_k \cdot \frac{2(k - a_k)}{(k - a_k)^2 + l^2}; \qquad \Sigma\alpha_k . \frac{2(k - a_k)}{(k - a_k)^2 + l^2} + \Sigma\beta_k = 0.$$

Führt man noch die Gauss'schen Buchstaben α und β, die charakteristischen Exponenten der zum Punkte Unendlich gehörigen Hauptintegrale ein, indem man die der zweiten Differentialgleichung entsprechenden von denen, welche zur ersten gehören, durch einen Strich unterscheidet, so bestehen zwischen diesen und den α_k, α'_k die folgenden beiden bemerkenswerten allgemeinen Gleichungen:

$$\alpha'+\beta'-(\alpha+\beta) = -4+\Sigma(\alpha'_h-\alpha_h)$$

$$\alpha'\beta'-\alpha\beta = -2-2\Sigma\alpha_h+\tfrac{1}{2}S(\alpha'_i\alpha'_k-\alpha_i\alpha_k);$$

hierin bezieht sich das Summenzeichen S auf alle möglichen Combinationen der Indices zu je zweien (ohne Wiederholungen).

Für den vorhin betrachteten einfachsten Fall ($\alpha'_h = \alpha_h$) wird hiernach:

$$\alpha'+\beta'-(\alpha+\beta) = -4$$

$$\alpha'\beta'-\alpha\beta = -2-2\Sigma\alpha_h,$$

woraus sich mit Berücksichtigung der Beziehung

$$\Sigma\alpha = \Sigma\alpha' = \alpha'+\beta'+1$$

leicht ergiebt, dass

$$\alpha'\beta' = (\alpha-2)(\beta-2), \quad \alpha'+\beta' = (\alpha-2)+(\beta-2)$$

wird, so dass also in diesem Falle

$$\alpha' = \alpha-2, \quad \beta' = \beta-2$$

zu setzen ist.

Betrachten wir noch einen Augenblick den nächst einfachen Fall dass $\alpha'_h = 2-\alpha_h$ gesetzt wird für $h = 1, 2 \ldots n$. Man findet dann:

$$\alpha'+\beta'+\alpha+\beta = 2(n+1)$$

und, wie sich auch von selbst versteht:

$$(\alpha'-\beta')^2 = (\alpha-\beta)^2,$$

woraus folgt, dass α', β' die Werte

$$n+1-\alpha, \quad n+1-\beta$$

annehmen. Die Relation zwischen ω und w wird:

$$\omega = \frac{(z-a_1)^{1-\alpha_1}(z-a_2)^{1-\alpha_2}\ldots(z-a_n)^{1-\alpha_n}}{(z-k)^2+l^2}\,w.$$

§ 7.

Dass die von uns in dem vorigen Paragraphen gegebene Analysis in der Tat die wahre Analogie der Christoffel'schen ist, kann noch durch die Herleitung der Abbildungsfunction des Aeussern eines geradlinigen Polygons aus unsern Formeln illustrirt werden.

Setzen wir nämlich die Grössen $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta$, β_{n+1}, β_{n+2} sämtlich gleich Null, so haben wir denjenigen Specialfall unserer Differentialgleichung, welcher auf die genannte Function hinführen muss.

In der Tat sind damit zwei Bedingungen festgesetzt, welchen die Punkte $a = k + il$, $b = k - il$ gehorchen müssen, die Gleichungen:

$$0 = \frac{2}{a-b} + \Sigma \frac{\alpha_k}{a-a_k},$$

$$0 = \frac{2}{b-a} + \Sigma \frac{\alpha_k}{b-a_k}.$$

Dieselben nehmen durch Addition und Subtraction die Gestalt an:

$$\Sigma \frac{\alpha_k(k-a_k)}{(k-a_k)^2+l^2} = 0, \quad 1 + \Sigma \frac{l^2\alpha_k}{(k-a_k)^2+l^2} = 0;$$

Die Punkte $k + il$ und $k - il$ sind somit durch die gebenen Parameter $a_1 \ldots a_n$ und $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ vollständig bestimmt, wie es sein muss. Ferner coincidiren unsere Gleichungen mit der in § 3. aufgestellten Christoffel'schen Bedingung:

$$\Sigma \frac{\lambda_k - 1}{A + iB - a_k} - \frac{1}{Bi} = 0;$$

setzt man nämlich mit Einführung unserer Bezeichnung $A = k$, $B = l$ und separirt das Reelle von dem Imaginären, so wird:

$$\Sigma \frac{(\lambda_k - 1)(k - a_k)}{(k-a_k)^2+l^2} = 0, \quad 1 - \Sigma \frac{(\lambda_k - 1)l^2}{(h-a_k)^2+l^2} = 0.$$

Um diese Gleichungen mit den unsrigen zu identificiren, ist es nur nötig, für jedes h

$$\alpha_h = 1 - \lambda_h$$

zu setzen.

Wir ziehen aus der soeben angestellten Betrachtung den Schluss, dass die Christoffel'sche Abbildungsfunction durch die Lösungen bestimmter linearer Differentialgleichungen 2. O. mit den singulären Punkten $a_1, a_2 \ldots a_n$ auf lineare Weise ausdückbar sein muss. Und zwar werden die Parameter dieser Differentialgleichung zufolge § 5. im allgemeinen auf 2^n verschiedene Arten wählbar sein.

So wird insbesondere die Abbildungsfunction des Aeussern eines geradlinigen Dreiecks mit den singulären Punkten 0, 1, ∞ durch Lösungen gewisser hypergeometrischer Differentialgleichungen, also vermittelst der Gauss'schen Function F, darstellbar sein. Wir wollen bei diesem Punkte noch einen Augenblick verweilen.

Die Winkel $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ eines durch die Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2}+\frac{(\alpha+\beta+1)z-\gamma}{z(z-1)}\frac{d\omega}{dz}+\frac{\alpha\beta}{z(z-1)}\omega=0$$

abbildbaren Dreiecks müssen, wenn dasselbe ein geradliniges und sie die äusseren Winkel desselben sein sollen, zusammengenommen 10 Rechte betragen, so dass also

$$\lambda+\mu+\nu=5$$

gesetzt werden muss, worin bekanntlich

$$\lambda=[1-\gamma],\quad \mu=[\alpha-\beta],\quad \nu=[\gamma-\alpha-\beta].$$

Die Berücksichtigung der verschiedenen möglichen Zeichencombinationen der Werte von $1-\gamma$, $\alpha-\beta$, $\gamma-\alpha-\beta$ liefert die folgenden $2^3=8$ möglichen Fälle:

I. $\beta=-2,\quad \lambda=1-\gamma,\quad \mu=2+\alpha,\quad \nu=2+\gamma-\alpha$

II. $\beta=3,\quad \lambda=\gamma-1,\quad \mu=3-\alpha,\quad \nu=3+\alpha-\gamma$

III. $\beta=\gamma+2,\quad \lambda=1-\gamma,\quad \mu=2+\gamma-\alpha.\quad \nu=2+\alpha$

IV. $\beta=\gamma-3,\quad \lambda=\gamma-1,\quad \mu=3+\alpha-\gamma,\quad \nu=3-\alpha$

und die vier andern, durch Vertauschung von α und β aus diesen hervorgehenden.

Wir beschränken uns hier auf die Betrachtung des Falles I.

Die hypergeometrische Reihe

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots,$$

welche das eine Hauptintegral des singulären Punktes $z=0$ liefert, bricht in diesem Falle ab, und wir erhalten die Particularlösung:

$$f=1-\frac{2\alpha}{\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}z^2.$$

Zwischen ihr und der zweiten Particularlösung besteht aber nach einer schon in § 3. benutzten Formel der Zusammenhang

$$\frac{g}{f}=\int\frac{dz}{f^2}.e^{-\int p dz};$$

setzt man hierin

$$p=\frac{(\alpha-1)z-\gamma}{z(z-1)},$$

so folgt:

$$\frac{g}{f} = C \int \frac{z^{-\gamma}(z-1)^{1-\alpha+\gamma} . dz}{\left[1 - \frac{2\alpha}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} z^2\right]^2},$$

welches die Christoffel'sche Abbildungsfunction ist.

§ 8.

Da, wie wir gesehen haben, die Differentialgleichungen, durch deren Lösungen die Abbildungsfunction für das Innere und für das Aeussere eines Kreisbogenpolygons hergestellt wird, dieselbe Form haben, und sich nur durch die Werte der Parameter von einander unterscheiden, so kann man sich die Aufgabe stellen:

Wenn eine bestimmte, den allgemeinen Bedingungen des Abbildungsproblems entsprechende Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} + p\frac{d\omega}{dz} + q\omega = 0$$

gegeben vorliegt, die Parameter derjenigen der ersten der Form nach gleichen Differentialgleichung zu finden, welche das Aeussere eines derjenigen Polygone abzubilden vermag, deren Inneres vermittelst der zuerst genannten Differentialgleichung darstellbar ist.

Die Lösung dieser Aufgabe ist für den besondern Fall, dass wir es nur mit Dreiecken und mit der hypergeometrischen Differentialgleichung zu tun haben, sehr leicht; man hat eben nur nötig, an die Stelle der zuerst gedachten Winkel die äusseren Winkel zu setzen, so dass also

$$2-\lambda,\quad 2-\mu,\quad 2-\nu \quad \text{für} \quad \lambda,\ \mu,\ \nu \text{ zu schreiben ist.}$$

Zwischen den Gauss'schen Parametern α, β, γ und α', β', γ' der beiden hypergeometrischen Differentialgleichungen bestehen also die Beziehungen

$$[1-\gamma]+[1-\gamma'] = 2, \quad [\alpha-\beta]+[\alpha'-\beta'] = 2,$$
$$[\gamma-\alpha-\beta]+[\gamma'-\alpha'-\beta'] = 2,$$

ebenso viele von einander unabhängige Gleichungen, als unbekannte Grössen vorhanden sind, so dass also die letztern aus ihnen — und zwar auf mehrdeutige Weise — bestimmt werden können.

Hier war $n = 2$; wenn aber $n > 2$ ist, so kommt es, wie schon in der Einleitung erwähnt worden ist, vor allen Dingen darauf an, zu den $n+1$ Parametern $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ und λ, den (in Vielfachen von

π ausgedrückten) Winkeln des Polygons noch $n-2$ Functionen x_1, $x_2 \dots x_{n-2}$ der Eckpunkte $\varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_n$ und $\varrho\infty$ zu finden, welche von den λ und von einander unabhängig sind und ausserdem die charakteristische Eigenschaft besitzen, ihren Wert nicht zu ändern, wenn man die $\varrho_1 \dots \varrho_\infty$ simultan durch eine beliebige lineare Substitution

$$\zeta = \frac{A\varrho + B}{C\varrho + D}$$

transformirt. Denn nur solche können, da sie von den willkürlichen Constanten der Integration unabhängig sind, zu den Parametern der Differentialgleichung in einer festen Beziehung stehen.

Die Doppelverhältnisse

$$x_h = \frac{\zeta_h - \zeta_n}{\zeta_{h-1} - \zeta_n} : \frac{\zeta_h - \zeta_\infty}{\zeta_{n-1} - \zeta_\infty}$$

besitzen diese Eigenschaft [21]). Man könnte natürlich auch $n-2$ von einander unabhängige Functionen dieser Doppelverhältnisse als Parameter einführen; noch andere Wahl aber giebt es nicht; was aus der unten stehenden Anmerkung erhellt.

Nimmt man zu den genannten $n-2$ Doppelverhältnissen noch irgend ein anderes dem nämlichen Punktsystem angehöriges Doppelverhältniss hinzu, so verschwindet die Functionsdeterminante dieser Gruppe von Functionen identisch, so dass also jedes andere Doppelverhältniss mit den $n-2$ zuerst genannten durch eine Relation verbunden ist.

---

21) Man wird auf das Doppelverhältniss von selbst hingeführt, wenn man ganz allgemein ein System von Punkten $x_1, x_2 \dots x_n$ durch die auf alle bezügliche Substitution

$$\zeta = \frac{Ax + B}{Cx + D}$$

transformirt und Functionen F von der Eigenschaft sucht, dass

$$F(\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_n) = F(x_1, x_2 \dots x_n)$$

bleibt. Aus dieser Definition ergiebt sich dann alsbald, dass F den drei simultanen partiellen Differentialgleichungen

$$\Sigma \frac{\partial F}{\partial x_h} = 0, \quad \Sigma x_h \frac{\partial F}{\partial x_h} = 0, \quad \Sigma x_h^2 \frac{\partial F}{\partial x_h} = 0$$

gehorchen muss. Dieselben sind für $n > 3$ mit einander vereinbar, und man erhält als allgemeine Lösung eine willkürliche Function der Doppelverhältnisse.

Das Doppelverhältniss $\varkappa_k$ kann stets auf eindeutige Weise bestimmt werden, sobald die gegebene Differentialgleichung

$$\frac{d^2\omega}{dz^2}+p\frac{d\omega}{dz}+q\omega=0$$

vollständig integrirt ist. Seien nämlich $f(z)$ und $g(z)$ irgend zwei Hauptintegrale mit ihren stetigen Fortsetzungen [dass man dieselben für jeden Punkt im Innern des festgesetzten Gebietes anzugeben vermag, gehört zum Begriff der vollständigen Integration], so giebt die Function

$$\zeta=\frac{f(z)}{g(z)}$$

für die Argumentenwerte $z=a_1, a_2 \dots a_n$ und ∞ das Punktsystem $\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_n, \zeta_\infty$, woraus man alsdann die $\varkappa$ bildet. Dabei wird man nach den obigen Auseinandersetzungen stets zu denselben Werten für die $\varkappa$ gelangen, von welchen zwei unabhängigen Particularlösungen man auch ausgehen mag; so dass also die $\varkappa$ als Functionen der Parameter der Differentialgleichung und ganz unabhängig von den Constanten der Integration gefunden werden.

Wir wollen hier den schon in der Einleitung angedeuteten Unterschied, welcher bei der Einführung der Polygonwinkel und Doppelverhältnisse als invarianter Parameter in unser Problem gemacht werden muss, je nachdem das abzubildende Polygon von ungerader oder von gerader Seitenanzahl ist, näher erörtern, und beweisen zunächst den Satz:

Bei einem Kreisbogenpolygon von ungerader Seitenanzahl sind die Winkel völlig unabhängig von den Ecken. Man kann nämlich, wenn die Ecken gegeben sind, dem Polygon ganz beliebige Winkel geben.

Sei beispielsweise $n=5$, und $A_1, A_2 \dots A_5$ die gegebenen Ecken des Polygons. Die vorgeschriebenen Winkel seien $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_5$.

Man verbinde (Fig. 1.) A_5 mit A_1 durch einen beliebigen Kreisbogen $A_5 A A_1$ und trage an ihn im Punkte A_1 den gegebenen Winkel λ_1 an, so wird dadurch der Kreisbogen $A_1 A_2$ bestimmt; ebenso bestimmt dann der Winkel λ_2 den Kreisbogen $A_2 A_3$, λ_3 den Bogen $A_3 A_4$ und λ_4 den Bogen $A_4 A_5$, wodurch in dem Punkte A_5 ein Winkel u entsteht, welcher im allgemeinen von dem vorgeschriebenen Winkel λ_5 verschieden sein wird. Wir wollen jetzt den Bogen $A_5 A_1$ sich ändern lassen, so dass die neue Lage mit der alten den Winkel δ bildet; man kann dann auch die andern Bögen $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_3 A_4$, $A_4 A_5$ so ändern, dass die Winkel $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$

unverändert bleiben. Was aber den letzten Winkel, den Winkel u anbetrifft, so ändert er sich um 2δ, wenn δ den Winkel bezeichnet, welchen an jeder Ecke die neuen Bögen mit den alten bilden.

Man kann nun δ so bestimmen, dass

$$u - 2\delta = \lambda_5$$

wird, also

$$\delta = \frac{u - \lambda_5}{2}$$

machen.

So gelangt man vermittelst einer Art regula falsi zu der überaus einfachen Lösung der geometrischen Aufgabe: Ein Kreisbogenpolygon von $2m+1$ Ecken zu construiren, dessen Ecken und Winkel gegeben sind.

Man kann hieraus mit Sicherheit den Schluss ziehen: Winkel und Doppelverhältnisse eines Kreisbogenpolygons von ungerader Seitenanzahl sind von einander völlig unabhängig.

Macht man jetzt dieselbe Construction für ein Polygon von gerader Seitenanzahl, zum Beispiel für ein Viereck (Fig. 2.), so zeigt sich der Unterschied, dass bei der Aenderung der Bögen hier der Winkel u in $u - \delta + \delta$ übergeht, also unverändert bleibt.

Man kann also hier dem letzten Winkel nicht durch die mehrerwähnte Aenderung der Bögen $A_4 A_1$ u. s. w eine beliebig vorgeschriebene Grösse erteilen; vielmehr ist er durch die Angabe der Ecken und der andern Winkel von selbst mit bestimmt.

Also darf für Polygone von gerader Seitenanzahl auch nicht die völlige Unabhängigkeit der Winkel und Doppelverhältnisse behauptet werden; und es lässt sich vermittelst der Wedekind'schen Darstellung des Doppelverhältnisses durch zwei Winkel beweisen, dass sie wirklich nicht von einander unabhängig sind.

Seien ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 vier complexe Punkte der ζ-Ebene, so lässt sich das Doppelverhältniss

$$(1\,2\,3\,4) = \frac{\zeta_1 - \zeta_3}{\zeta_2 - \zeta_3} : \frac{\zeta_1 - \zeta_4}{\zeta_2 - \zeta_4}$$

nach Wedekind folgendermassen durch Winkel ausdrücken. Man verlege zunächst durch eine passende lineare Transformation den Punkt ζ_4 in die Unendlichkeit, so verwandelt sich das System der drei Kreise, welche respective durch die Punkte 124, 134, 234 hindurchgehen, in ein System dreier Geraden, welche ein Dreieck bilden. Wählt man den Mittelpunkt des diesem Dreieck umschriebenen

Kreises zum Nullpunkt der Zahlenebene und bezeichnet den Radius des zuletzt genannten Kreises durch r, die **Abweichung** der Punkte 1, 2, 3 von der Axe des Reellen respective durch α_1, α_2, α_3, so wird das Doppelverhältniss

$$(1\,2\,3\,\infty) = \frac{\sin\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}}{\sin\frac{\alpha_2 - \alpha_3}{2}}\, e^{i\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2}}$$

Die hierin auftretenden Winkeldifferenzen $\frac{\alpha_1 - \alpha_3}{2}$ u. s. w. sind mit den Winkeln des Dreiecks identisch, und es wird:

$$(1\,2\,3\,4) = \frac{\sin(I\;III)}{\sin(II\;III)} \cdot e^{i(I\;II)}$$

durch I, II, III die Seiten des Dreiecks bezeichnet.

Die Winkel sind positiv oder negativ, je nachdem ihr Drehungssinn dem Sinne der Drehung in der Gauss'schen Interpretation des Imaginären gleich oder entgegengesetzt ist.

Geht man zur ursprünglichen Lage der vier Punkte zurück und bezeichnet durch ikl nicht nur den durch die Punkte ζ_i, ζ_k, ζ_l gelegten Kreis, sondern auch die Richtung, in welcher er durchlaufen wird, so ist der Wert des Doppelverhältnisses unzweideutig durch die Formel gegeben:

$$(1\,2\,3\,4) = \frac{\sin(4\,1\,2,\;4\,2\,3)}{\sin(4\,2\,1,\;4\,1\,3)} \cdot e^{i(4\,3\,1,\;4\,3\,2)}.$$

Auch hierin treten nur Grössen auf, welche ihrem absoluten Wert nach den Winkeln eines Dreiecks gleich sind: des Kreisbogendreiecks 123, dessen Kreise sämtlich auch durch den Punkt 4 hindurchgehen.

Diese Winkel sind an die Relation gebunden, dass ihre Summe zwei Rechte betragen muss, so dass also der Wedekind'sche Satz lautet:

„Das Doppelverhältniss (1234) hängt nur von den Winkeln des-
„jenigen Kreisbogendreiecks 123 ab, dessen Seiten ausserdem sämt-
„lich durch den Punkt 4 hindurchgehen, also, da die Summe der
„Winkel dieses Dreiecks π beträgt, nur von zwei unabhängigen Win-
„keln".

Wir sind jetzt im Besitz der Mittel, zu entscheiden, was dazu gehört, dass ein Kreisbogenpolygon im Sinne der Abbildungstheorie der Kreisbogenpolygone vollständig gegeben sei.

Betrachten wir das Kreisbogenviereck $A_1 A_2 A_3 A_4$ (Fig. 3a), von welchem die vier Winkel λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 gegeben sein mögen. Dann ist zur Bestimmung des Doppelverhältnisses (1234) noch die Kenntniss der Winkel des (punktirten) Kreisbogendreiecks 123 erforderlich.

Es handelt sich also um die Entscheidung der geometrischen Frage: Können zur Herstellung der so eben charakterisirten Figur die vier Eckwinkel λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 und ausserdem noch zwei Winkel des punktirten Kreisbogendreiecks $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ beliebig gegeben werden? — Zur Vereinfachung darf wieder die eine Ecke A_4 in die Unendlichkeit verlegt werden, indem durch diese Transformation sämtliche Winkel, auf welche es hier ankommt, unverändert bleiben. Auf diese Weise werden die Seiten des das Doppelverhältniss charakterisirenden Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ und die Polygonseiten $A_4 A_1$ und $A_4 A_2$ gerade Linien, so dass die Figur die Gestalt Fig. 3b annimmt.

Die von A_1 und A_2 auslaufenden beiden Linien, als Kreisbögen aufgefasst, schneiden sich allerdings erst in der Unendlichkeit in dem Punkte A_4; der Winkel λ_4, unter welchem sie sich dort schneiden, kommt aber zu Stande, wenn man sie nach der entgegengesetzten Seite bis zum Schnitt verlängert. Ihr Schnittpunkt sei S, so handelt es sich jetzt darum:

Gegeben sei das rechtwinklige Dreieck $A_1 A_2 A_3$; man soll die Kreisbögen $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$ construiren, so dass der von ihnen bei A_3 eingeschlossene Winkel eine gegebene Grösse hat, und ausserdem, wenn man an diese Kreisbögen in ihren andern Endpunkten, bei A_1 und A_2, ebenfalls unter gegebenen Winkeln, gerade Linien anträgt und dieselben bis zum Schnitt verlängert, der auf diese Weise entstehende Winkel ebenfalls wo möglich eine beliebig vorgeschriebene Grösse erhalte. Man sieht nun sofort, dass dieses letztere im allgemeinen unmöglich ist; denn variirt man die Figur wieder auf virtuelle Weise, nämlich so, dass die Punkte A_1, A_2, A_3 und die Winkel λ_1, λ_2, λ_3 unverändert bleiben (Fig. 4.), so bleibt auch der Winkel bei S unverändert.

„Man darf also ausser dem Werte des Doppelverhältnisses „nur noch drei der Polygonwinkel eines Kreisbogenvierecks beliebig „festsetzen, wodurch dann der vierte Polygonwinkel von selbst mit „bestimmt ist“.

Entsprechendes gilt von jedem Kreisbogenpolygon von gerader Seitenanzahl.

Die Abzählung der durch die Winkel und die Doppelverhältnisse ausdrückbaren Anzahl von Parametern der Differentialgleichung d-

Schwarz'schen Abbildungsproblems wird also für die beiden Fälle, dass die Anzahl ihrer singulären Punkte eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, gesondert vorgenommen werden müssen.

I. Die Anzahl der im Endlichen gelegenen singulären Punkte der Differentialgleichung sei eine gerade Zahl $n = 2m$.

Dann wird die Anzahl der Ecken des Polygons gleich der ungeraden Zahl $2m+1$, und es sind daher $2m+1$ Winkel und $(2m+1)-3 = 2m-2$ Doppelverhältnisse disponibel. Da jedes Doppelverhältniss seinerseits zwei Winkeln äquivalent ist, so stehen im ganzen

$$(2m+1)+2(2m-2) = 6m-3$$

invariante lineare Parameter zur Disposition.

Die Anzahl der überhaupt vorhandenen linearen Parameter der Differentialgleichung beträgt aber:

$$2m+2m+2m-1 = 6m-1,$$

und es ist

$$(6m-1)-(6m-3) = 2.$$

II. Die Anzahl der im Endlichen gelegenen singulären Punkte der Differentialgleichung sei eine ungerade Zahl $n = 2m-1$.

Dann wird die Anzahl der Ecken des Polygons gleich der geraden Zahl $2m$, und es sind daher in diesem Falle neben $2m-3$ Doppelverhältnissen nur $2m-1$ der Polygonwinkel disponibel. Es stehen somit im ganzen

$$2m-1+2(2m-3) = 6m-7$$

invariante lineare Parameter zur Disposition.

Die Anzahl der überhaupt vorhandenen linearen Parameter der Differentialgleichung beträgt

$$(2m-1)+(2m-1)+(2m-2) = 6m-4,$$

und es ist

$$(6m-4)-(6m-7) = 3.$$

„Also werden durch Polygonwinkel und Doppelverhältnisse auch „die (im Endlichen gelegenen) singulären Punkte der Differential- „gleichung im ersten Falle bis auf zwei, im zweiten bis auf drei, „mit bestimmt". [Der singuläre Punkt ∞ ist nicht mitgezählt.]

Hieraus geht hervor, dass zwei der singulären Punkte der Differentialgleichung, durch deren Lösungen die Abbildung eines gegebenen Kreisbogenpolygons von ungerader Seitenanzahl auf

die Halbebene darstellbar ist, beliebig angenommen werden dürfen; es würde aber unrichtig sein, wenn man aus den obigen Ergebnissen folgern wollte, dass für ein gegebenes Polygon von gerader Seitenanzahl drei der singulären Punkte der Differentialgleichung beliebig auf der x-Axe wählbar seien. Dieses zu behaupten hiesse so viel als: behaupten, dass jede zwei Kreisbogenpolygone von gleicher, gerader Seitenanzahl, deren Winkel und Doppelverhältnisse bezüglich gleich sind, als projectivisch gleich angesehen werden dürfen, das ist, durch eine lineare Substitution in einander transformirbar.

Das ist für Polygone von ungerader Seitenanzahl richtig, für solche von gerader Seitenanzahl aber falsch; denn offenbar können Kreisbogenpolygone, deren Ecken und Winkel bezüglich gleich, deren Seiten aber ungleich sind — ein Fall, welcher in dem hier betrachteten als besonderer Fall enthalten ist — wenn die Seitenanzahl die Zahl 2 übertrifft, nicht durch eine lineare Substitution in einander transformirt werden; es müsste sonst lineare Substitutionen mit mehr als zwei Doppelpunkten geben, was unmöglich ist[22]).

Auch für Polygone von gerader Seitenanzahl werden nicht mehr als zwei der singulären Punkte der Differentialgleichung beliebig wählbar sein, wenn das Polygon gegeben ist; uns fehlt aber in diesem Falle für die hier erstrebte Darstellung ein von den vorigen unabhängiger invarianter Parameter; sei es, dass ein solcher überhaupt nicht existirt, oder dass wir ihn nur nicht kennen.

Die Ergründung dieses Punktes ist übrigens für unser Problem entbehrlich, weil, wenn das gegebene Polygon eine gerade Anzahl von Ecken hat, wir dasselbe durch Hinzufügung eines Scheitels auf einer seiner Seiten in ein solches von ungerader Eckenanzahl verwandeln können. Allerdings wird hier — was früher ausgeschlossen wurde — einer der Polygonwinkel gleich π, und bedarf daher dieser Fall einer besonderen Discussion.

Man kann jetzt die Lösung des zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellten Problems wenigstens formell angeben.

Es gelten die Gleichungen:

$$\Sigma\beta_k = 0,$$

22) Man vergleiche die ersten Paragraphen von Poincaré's Darstellung seiner interessanten Untersuchungen über die von ihm in die Analysis eingeführten Functionen, in Band I der Acta Mathematica, herausgegeben von Mittag-Leffler („Théorie des groupes Fuchsiens").

$$(1-\alpha_h)^2 = \lambda_h^2, \quad (h = 1, 2 \ldots n)$$
$$(1-\Sigma\alpha_h)^2 - 4\Sigma\beta_h a_h = \lambda^2,$$

wozu die $n-2$ Relationen $k_h = k_h(a_1 \ldots a_n;\ \alpha_1 \ldots \alpha_n;\ \beta_1 \ldots \beta_n)$ hinzukommen. Um nun die zwischen den Parametern α'_h, β'_h der anderen Differentialgleichung bestehenden Relationen anzugeben, hat man in den vorstehenden überall

$$\alpha'_h \text{ für } \alpha_h, \quad \beta'_h \text{ für } \beta_h, \quad 2-\lambda_h \text{ für } \lambda_h, \quad 2-\lambda \text{ für } \lambda$$

zu substituiren, und die k_h unverändert zu lassen.

Man erhält auf diese Weise ebenso viele Gleichungen als Parameter α'_h, β'_h zu bestimmen sind. Was aber die a_h anbetrifft, so wird vermöge des Umstandes, dass sie reell, und dass auch die β_h entweder reell oder zu je zweien conjugirt imaginär sein müssen, es herbeigeführt, dass jede der Gleichungen

$$\varkappa_h = \varkappa_a(a_1 \ldots a_n;\ \alpha_1 \ldots \alpha_n;\ \beta_1 \ldots \beta_n)$$

in zwei reelle Relationen gespalten werden muss, wenn die k_h unter den genannten Bedingungen beliebig gegebenen complexen Zahlenwerten gleich gemacht werden sollen.

Auf diese Weise werden voraussichtlich auch die a bis auf zwei (wir setzen voraus, dass $n+1$ eine ungerade Zahl ist) durch die k und λ mit bestimmt sein, so dass also eine Coincidenz auch sämtlicher a und a' auf der Axe des Reellen in dem z-Gebiet im allgemeinen sich nicht wird erreichen lassen. Sie findet auch für das dem unsrigen entsprechende Problem geradliniger Polygone nicht statt. (Man vergleiche Christoffel, Annali di Mat. Bd. IV. a. a. O.

Dagegen wird diese Coincidenz sich in dem besonderen Falle, dass die $n-2$ zur Anwendung kommenden Doppelverhältnisse sämtlich reelle Werte haben, erreichen lassen. Das Doppelverhältniss wird aber reell, wenn die vier daran beteiligten complexen Punkte auf einem gemeinsamen Kreise liegen.

Auf diese Weise wird der Fall, dass sämtliche Ecken des Kreisbogenpolygons auf einem gemeinsamen Kreise liegen, ein erhöhtes Interesse in Anspruch nehmen.

Mehr wird sich im allgemeinen nicht sagen lassen, und es würde auf eine Specialuntersuchung des einfachsten Falles $n = 3$ ankommen. Man hat alsdann nur ein unabhängiges Doppelverhältniss k, und die anderen bilden mit ihm eine Gruppe, deren Individuen nur die Werte

$$\varkappa, \quad 1-\varkappa, \quad \frac{1}{1-\varkappa}, \quad \frac{\varkappa-1}{\varkappa}, \quad \frac{\varkappa}{\varkappa-1}$$

annehmen.

II.

Der Cylinder in homogenen Räumen.

Von

Herrn Dr. **Carl Quensen,**
Gymnasiallehrer in Gandersheim.

Im 59. Teile dieser Zeitschrift hat Herr Prof. A. v. Frank [1]) nach dem Verfahren von Frischauf [2]) den Cylinder in der absoluten Geometrie nach oben von einer zur ebenen Basis gehörigen Fläche gleichen Abstandes begrenzt angenommen. In der Euklidischen Geometrie sind die Flächen gleichen Abstandes ebene Flächen, in der absoluten Geometrie sind sie jedoch krumme Flächen; deshalb ist es wol der Sache angemessener, die Begrenzungen, welche in der Euklidischen Geometrie eben sind, auch in der absoluten Geometrie als eben anzunehmen. Ueberhaupt müssen wir, wenn es sich um die Definition von Körpern in der absoluten Geometrie handelt, darauf sehen, dass die Körper möglichst viele von den Eigenschaften behalten, welche sie in der Euklidischen Geometrie haben. Deshalb habe ich in meiner Dissertation [3]) den Kreiscylinder als einen Körper definirt, welcher begrenzt wird von zwei Ebenen und einer Fläche (dem Cylindermantel), die entsteht, wenn sich eine Gerade an einer Kreisperipherie, der Leitlinie, so bewegt, dass sie stets senkrecht auf

---

1) Der Körperinhalt des senkrechten Cylinders und Kegels in der absoluten Geometrie.

2) Elemente der absoluten Geometrie. pag. 76.

3) Analytische Betrachtungen über die Raumformen, in denen das Congruenzaxiom gilt. pag. 45.

der Ebene des Kreises steht. Der Kreiscylinder heisse ein gerader, wenn die im Mittelpunkte der Leitlinie auf der Ebene derselben errichtete Normale auch senkrecht auf den beiden Grenzebenen steht, und diese Ebenen gleichen Abstand von dem Mittelpunkte haben. Dieser Körper hat wie der Cylinder im Euklidischen Raume als Grundflächen Kreise; ferner sind die durch die Normale (Rotationsaxe) im Mittelpunkte der Leitlinie gehenden Ebenen Symmetrieebenen; ebenfalls ist die Ebene der Leitlinie eine solche. Endlich sind die Durchschnittscurven von Ebene und Cylindermantel entweder Ellipsen, Kreise oder gerade Linien.

Diese Definition des Cylinders möge für alle homogenen Räume gelten. Wir haben drei verschiedene homogene Raumformen, je nachdem das constante Krümmungsmass grösser, kleiner oder gleich Null ist. Wählen wir hier als Bezeichnung der Räume die des Herrn Prof. Schering [4]). Derselbe nennt einen homogenen Raum mit positiver Krümmung einen Riemann'schen, einen Raum mit negativer Krümmung einen Gaussischen und einen mit der Krümmung Null einen Euklidischen Raum.

Je nachdem wir dem in den folgenden Formeln vorkommenden Parameter ε, der Quadratwurzel aus dem Krümmungsmass, einen reellen, einen imaginären oder den Wert Null beilegen, erhalten wir die für einen Riemannschen, Gaussischen oder Euklidischen Raum geltenden Formeln.

Schreiten wir nunmehr dazu, diejenige von unseren obigen Behauptungen zu betrachten, welche die Durchschnittscurven von Ebene und Cylindermantel betrifft.

Die Gleichung des Cylindermantels, dessen Leitlinie den Radius r hat, ist:

I. $$\operatorname{tg} \varepsilon x^2 \operatorname{tg} \varepsilon y^2 = \operatorname{tg} \varepsilon r^2.$$

Hier sind als Coordinaten eines Punktes die Projectionen der Entfernung desselben von einem festen Punkte auf 3 sich in letzteren senkrecht schneidenden Axen angenommen. Die eine dieser Axen (Z) sei die Cylinderaxe, die beiden anderen (X und Y) liegen in der Ebene der Leitlinie. Soll die Gleichung der Durchschnittscurve irgend einer Ebene mit der Cylinderfläche entwickelt werden, so ist es zweckmässig, eine Coordinatentransformation in der Weise vor-

---

4) Linien, Flächen und höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemann'schen Räumen. Nachrichten von der Königl. Ges. der Wissensch. zu Gött. 1873.

anehmen, dass die schneidende Ebene selbst zu einer Coordinatenebene wird. Steht die schneidende Ebene senkrecht auf der Cylinderaxe in der Entfernung d vom Mittelpunkte, so ist das Coordisystem auf der Z Axe um die Strecke d zu verschieben. Bei Anwendung der Transformationsformeln:

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon x = \frac{\mathrm{tg}\,\varepsilon\mathfrak{x}}{\cos\varepsilon d - \sin\varepsilon d\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\mathfrak{z}},$$

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon y = \frac{\mathrm{tg}\,\varepsilon\mathfrak{y}}{\cos\varepsilon d - \sin\varepsilon d\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\mathfrak{z}}$$

erhalten wir aus I. als Gleichung des Kegels im neuem System:

Ia. $$\mathrm{tg}\,\varepsilon\mathfrak{x}^2 + \mathrm{tg}\,\varepsilon\mathfrak{y}^2 = \mathrm{tg}\,\varepsilon r^2(\cos\varepsilon d - \sin\varepsilon d\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\mathfrak{z})^2$$

$\mathfrak{z}$ oder $\mathrm{tg}\,\varepsilon\mathfrak{z} = 0$ giebt als Gleichung der Durchschnittscurve:

II. $$\mathrm{tg}\,\varepsilon\mathfrak{x}^2 + \mathrm{tg}\,\varepsilon\mathfrak{y}^2 = \mathrm{tg}\,\varepsilon r^2 \cos\varepsilon d^2.$$

Diese Gleichung ist diejenige des Kreises, dessen Radius R durch die Relation $\mathrm{tg}\,\varepsilon R = \mathrm{tg}\,\varepsilon r \cos\varepsilon d$ bestimmt ist.

Steht jedoch die Cylinderaxe nicht senkrecht auf der schneidenden Ebene, so ist ausser der Verschiebung noch eine Drehung des Coordinatensystems vorzunehmen. Hierbei ist zu bemerken, dass die Gleichung des Kegels bei einer Drehung um die $\mathfrak{Z}$ Axe dieselbe bleibt; daher kann man das Coordinatensystem sich zunächst so gedreht denken, dass die $\mathfrak{Y}$ Axe in die schneidende Ebene fällt. Diese Ebene möge die $\mathfrak{X}\mathfrak{Z}$ Ebene in einer Geraden schneiden, welche mit der $\mathfrak{Z}$ Axe den Winkel φ bildet. Wir müssen alsdann das Coordinatensystem ($\mathfrak{X}\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$) um die $\mathfrak{Y}$ Axe um den Winkel $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ drehen; es kommen hier die Transformationsformeln zur Anwendung:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}\,\mathfrak{x} &= \sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\xi - \cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\zeta,\\
\mathrm{tg}\,\varepsilon\mathfrak{y} &= \mathrm{tg}\,\varepsilon\eta\\
\mathrm{tp}\,\varepsilon\mathfrak{z} &= \cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\xi + \sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\zeta.
\end{aligned}$$

Die Gleichung des Cylinders im neuen System ist alsdann:

$$\begin{aligned}
&(\sin\varphi^2 - \mathrm{tg}\,\varepsilon r^2 \sin\varepsilon d^2 \cos\varphi^2)\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\xi^2 + \mathrm{tg}\,\varepsilon\eta^2\\
&+ (\cos\varphi^2 - \mathrm{tg}\,\varepsilon r^2 \sin\varepsilon d^2 \sin\varphi^2)\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\zeta^2 + \mathrm{tg}\,\varepsilon r^2 \sin\varepsilon 2d\,(\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\xi + \sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\zeta)\\
&- \sin 2\varphi(1 + \mathrm{tg}\,\varepsilon r^2 \sin\varepsilon d^2)\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\xi\,\mathrm{tg}\,\varepsilon\zeta = 0.
\end{aligned}$$

Setzen wir $\xi = 0$, so erhalten wir als Gleichung der Durchschnittscurve:

III. $(\sin\varphi^2 - \operatorname{tg}\varepsilon r^2 \sin\varepsilon d^2 \cos\varphi^2)\operatorname{tg}\varepsilon\xi^2 + \operatorname{tg}\varepsilon\eta^2$
$$- \operatorname{tg}\varepsilon r^2 \sin\varepsilon 2d \cos\varphi \operatorname{tg}\varepsilon\xi = \operatorname{tg}\varepsilon r^2 \cos\varepsilon d^2.$$

Diese Gleichung ist die einer Ellipse.

Wir wollen uns der Einfachheit halber darauf beschränken, die Richtigkeit dieser Behauptung für den Fall $d = 0$ nachzuweisen. Aus Gleichung III. wird:

IV. $$\sin\varphi^2 \operatorname{tg}\varepsilon\xi^2 + \operatorname{tg}\varepsilon\eta^2 = \operatorname{tg}\varepsilon r^2.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf $\operatorname{tg}\varepsilon x$ und $\operatorname{tg}\varepsilon y$ eine homogene Gleichung zweiten Grades, in welcher nur die quadratischen Glieder vorkommen; sie ist daher entweder die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse oder einer Hyperbel. Die allgemeine Gleichung der Ellipse ist:

$$\frac{\operatorname{tg}\varepsilon x^2}{\operatorname{tg}\varepsilon a^2} + \frac{\operatorname{tg}\varepsilon y^2}{\operatorname{tg}\varepsilon b^2} = 1;$$

die der Hyperbel:

$$\frac{\operatorname{tg}\varepsilon x^2}{\operatorname{tg}\varepsilon a^2} - \frac{\operatorname{tg}\varepsilon y^2}{\operatorname{tg}\varepsilon b^2} = 1.$$

In beiden Gleichungen sind a und b die aus der Euklidischen Geometrie bekannten Grössen. Aus der Vergleichung dieser beiden Gleichungen mit der Gleichung IV. ergiebt sich sofort, dass die letztere eine Ellipse repräsentirt, deren halbe kleine Axe $b = r$, und deren halbe grosse Axe a sich aus der Relation

$$\operatorname{tg}\varepsilon a = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon r}{\sin\varphi}$$

ergiebt.

Diese beiden Ausnahmefälle sind $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$; der erste Fall $\varphi = 0$ ergiebt zwei Gerade, nämlich zwei einander gegenüberliegende Seiten des Kegels, der zweite einen Kreis.

Dieselben Resultate würden wir erhalten haben, wenn wir die Einschränkung $d = 0$ nicht eintreten liessen; hierbei ist zu bemerken, dass die Mittelpunkte der Ellipsen nur bei den Euklidischen Cylindern in der Axe liegen, wie man aus Gleichung III. ersieht. Für die Gaussi'schen Cylinder ist noch hervorzuheben, dass nicht alle hier auftretenden Ellipsen geschlossene Curven sind. Ist nämlich der Schnitt so gelegt, dass die X Axe parallel der betreffenden Seite des Kegels ist, so haben wir eine Ellipse, die erst im Unendlichen geschlossen ist. Der zu diesem Schnitt gehörende Winkel φ ist bestimmt durch die Gleichung:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\cos\varepsilon r}\,(d = 0).$$

Für noch kleinere Winkel φ werden sich die Ellipsen selbst im Unendlichen nicht schliessen. Allerdings kann von der ursprünglichen Definition der Ellipsen dann nicht mehr die Rede sein.

Untersuchen wir nach dem Vorgange des Herrn Prof. v. Helmholtz [5]), wie ein Beobachter, dessen Augenmass und Raumerfahrungen sich gleich den unsrigen im Euklidischen Raume ausgebildet haben, diese Verhältnisse betrachten würde, wenn er in einen Gaussischen Raum versetzt würde. Dieser Beobachter würde die entferntesten Gegenstäde dieses Raumes in endlicher Entfernung $\left(\frac{i}{\varepsilon}\right)$ rings um sich zu erblicken glauben. Derselbe würde auch die Schnitte von Ebenen und Cylindern als Gerade, Kreise und Ellipsen erkennen. Von diesen Ellipsen würden ihm nicht alle innerhalb der Entfernung $\frac{i}{\varepsilon}$ geschlossen erscheinen, sondern eine Gruppe derselben grade in dieser Entfernung, eine andere auch hier noch nicht; die erste Gruppe enthält diejenigen Ellipsen, welche im Unendlichen geschlossen, die letzte diejenigen, welche selbst im Unendlichen noch offen sind. Zu diesen Arten von Ellipsen haben wir natürlich im Euklidischen Raume keine Analoga. Für diesen Raum fällt auch die Abhängigkeit der Schnittcurven von dem Axenabschnitte d fort.

Wir erhalten die betr. Formeln für die Euklidischen Cylinder aus den allgemeinen Gleichungen, indem wir in dieselben für die trigonometrischen resp. hyperbolischen Functionen der Strecken die Reihenentwickelungen einsetzen, durch ε^2 dividiren und nach dieser Division $\varepsilon = 0$ setzen. So erhalten wir z. B. aus Gleichung II. und III.

IIa. $$x^2 + y^2 = r^2$$

IIIa. $$\sin\varphi^2 x^2 + y^2 = r^2.$$

Was nun die Inhaltsbestimmung des Cylinders [6]) anbetrifft, so lässt sie sich ohne grosse Schwierigkeiten ausführen.

Der zu berechnende Cylinder habe den Radius r; die Entfernung jeder der beiden Begrenzungsebenen von dem Mittelpunkte der Leitlinie sei $\frac{h}{2}$. Beachten wir, dass der Inhalt eines senkrechten Pa-

5) Helmholtz: Ueber den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome. Vorträge und Reden. Braunschweig 1884.

6) Diese Inhaltsbestimmungen habe ich bereits in meiner Dissertation Seite 46. ausgeführt, jedoch finden sich daselbst einige Druckfehler.

rallelepipedons mit der Höhe x_3 und mit der unendlich kleinen Grundfläche dg

$$dJ = dg\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon x_3 + \tfrac{1}{4}\sin\varepsilon 2x_3\right)$$

ist, so ergiebt sich für den Inhalt des Cylinders bei Anwendung von Polarcoordinaten

$$(\operatorname{tg}\varepsilon x = \operatorname{tg}\varepsilon\varrho\cos\varphi,\quad \operatorname{tg}\varepsilon y = \operatorname{tg}\varepsilon\varrho\sin\varphi):$$

$$J = \frac{2}{\varepsilon^3}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} d\varphi \int\limits_{\varrho=0}^{\varrho=r} \sin\varepsilon\varrho\,.\,d\varrho\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon x_3 + \tfrac{1}{4}\sin(\varepsilon 2x_3)\right),$$

in welchem Doppelintegral die Abhängigkeit der Grösse x_3 von ϱ durch die Gleichung

$$\operatorname{tg}\varepsilon x_3 = \operatorname{tg}\left(\varepsilon\frac{h}{2}\right)\cos\varepsilon\varrho$$

ausgedrückt wird.

Demnach:

$$J = \frac{4\pi}{\varepsilon^3}\int\limits_0^r \left\{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\varepsilon\frac{h}{2}.\cos\varepsilon\varrho\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\operatorname{tg}\varepsilon\frac{h}{2}\cos\varepsilon\varrho}{1+\operatorname{tg}^2\left(\varepsilon\frac{h}{2}\right)\cos^2\varepsilon\varrho}\right\}\sin\varepsilon\varrho\,.\,d\varrho$$

Führen wir als neue Variabele

$$u = \operatorname{tg}\left(\varepsilon\frac{h}{2}\right)\cos\varepsilon\varrho$$

ein, so erhalten wir:

$$J = -\frac{4\pi}{\varepsilon^3.\operatorname{tg}\left(\varepsilon\frac{h}{2}\right)}\int\limits_{u=\operatorname{tg}\left(\varepsilon\frac{h}{2}\right)}^{u=\operatorname{tg}\varepsilon\frac{h}{2}\cos\varepsilon r}\left\{\operatorname{arctg}u\,.\,du + \frac{u}{1+u^2}\cdot du\right\}$$

$$= -\frac{4\pi}{\varepsilon^3\operatorname{tg}.\left(\varepsilon\frac{h}{2}\right)}\left|\;u.\operatorname{arctg}u\;\right|_{u=\operatorname{tg}\left(\varepsilon\frac{h}{2}\right)}^{u=\operatorname{tg}\left(\varepsilon\frac{h}{2}\right).\cos\varepsilon r}$$

oder:

$$J = -\frac{4\pi}{\varepsilon^3}\left[\cos\varepsilon r \,.\, \operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\left(\varepsilon\frac{h}{2}\right)\cos\varepsilon r\right) - \frac{\varepsilon h}{2}\right]$$

Die Höhe h können wir auch durch die Seite s vermittelst der Gleichung

$$\operatorname{tg}\left(\varepsilon\frac{s}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\varepsilon\frac{h}{2}\right)\cos\varepsilon r$$

ersetzen, alsdann erhalten wir:

$$J = -\frac{4\pi}{\varepsilon^3}\left[\cos\varepsilon r \,.\, \frac{\varepsilon s}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\varepsilon\frac{s}{2}\right)}{\cos\varepsilon r}\right)\right]$$

Für den Euklidischen Raum ergiebt sich sofort:

$$J = \pi \,.\, r^2 \,.\, h \quad \text{resp.}$$
$$J = \pi \,.\, r^2 \,.\, s.$$

Gandersheim, den 20. December 1884.

III.

Ueber einige Eigenschaften des Tetraeders.

Von

Herrn Dr. **H. Gellenthin**

in Stettin.

Wenn sich im stereometrichen Unterricht oft Veranlassung findet, auf die Analogie zwischen den Eigenschaften des Tetraeders und des ebenen Dreiecks hinzuweisen, so wird andrerseits eben dadurch die Frage nahe gelegt, wie weit diese Analogie gehe, und in welchen Beziehungen sie versage. Es giebt z. B. für gewisse merkwürdige Punkte des Dreiecks — den Schwerpunkt, den Mittelpunkt des umgeschriebenen und den des eingeschriebenen Kreises — genau entsprechende Punkte im Tetraeder, namlich den Schwerpunkt, den Mittelpunkt der eingeschriebenen und den der umgeschriebenen Kugel. Die Analogie drängt — selbst den Schüler — zu der Frage: Giebt es nun nicht auch, wie im Dreieck, so im Tetraeder einen Höhenpunkt? d. h. schneiden sich nicht auch die 4 Höhen eines Tetraeders in einem und demselben Punkte?

Dass ein solcher Fall eintreten kann, zeigt das regelmässige Tetraeder. Weitere Auskunft darüber geben die mir bekannten Lehrbücher der Stereometrie nicht. Auch sonst ist mir eine eingehende Erörterung dieser Frage nicht bekannt geworden. Bei Steiner (Ges. Werke Bd. I. S. 128) findet man den (ohne Beweis gegebenen) Satz: „Fällt man aus den Ecken eines beliebigen Tetraeders auf die gegenüberliegenden Seitenebenen Lote, so schneiden diese 4 Lote einander im allgemeinen nicht. Schneiden sich aber in einem be-
ˡeren Falle irgend zwei derselben, so schneiden alle 4 einander

in einem und demselben Punkt. Im allgemeinen aber haben die genannten 4 Lote die merkwürdige Eigenschaft, dass jede Gerade, welche durch irgend drei derselben geht, auch das vierte schneidet, d. h. dass durch jeden beliebigen Punkt, den man in einem der 4 Lote annimmt, allemal eine Gerade so gelegt werden kann, dass sie die 3 übrigen Lote schneidet". Später hat er den Satz in etwas anderer Fassung wieder vorgelegt und richtig gestellt. Er lautet dann (Ges. Werke Bd. I. S. 454): Fällt man aus den Ecken eines beliebigen vierseitigen Körpers (dreiseitige Pyramide) Lote auf die gegenüberliegenden Grenzflächen, so liegen alle 4 Lote im allgemeinen in einem Hyperboloid, und zwar gehören sie zu einer und derselben Schar von Strahlen desselben, so dass es also unzählige Gerade giebt, wovon jede alle vier Lote schneidet. Wenn insbesondere zwei der 4 Lote sich schneiden, so schneiden sich auch die zwei übrigen: und wenn insbesondere drei Lote sich schneiden, so schneiden sich notwendigerweise alle 4 in einem und demselben Punkte". Der Schluss dieses Satzes ist die Berichtigung der in der ersten Bekanntmachung des Satzes gemachten unrichtigen Angabe über die besonderen Fälle. In diesen Fällen gehe das Hyperboloid in einen Grenzfall (in zwei Ebenen oder einen Kegel) über.

Die Bedingungen nun und die begleitenden Umstände aufzusuchen, unter denen sich der eine oder andere dieser besonderen Fälle ereignet, sei im Folgenden unsere Aufgabe. Dabei wird sich auch ergeben, warum im allgemeinen gar kein gegenseitiges Schneiden der Höhen stattfindet, also kein Höhenpunkt existirt.

I.

1) Es sei $DABC$ das betrachtete Tetraeder (Fig. 1.) AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 die vier Höhen desselben. Sollen sich zwei derselben, etwa BB_1 und DD_1 in einem Punkte F_1 schneiden, so liegen sie in einer Ebene $DF'B$, welche sowohl senkrecht zu Ebene ABC als zu Ebene ADC, also zu deren Schnittkante AC steht, d. h. die beiden Gegenkanten BD und AC kreuzen sich unter rechtem Winkel. Also: Wenn sich zwei Höhen eines Tetraeders schneiden, so ist die Kante, von deren Enden sie ausgehen, mit ihrer Gegenkante senkrecht gekreuzt. Und umgekehrt, wenn diese Bedingung erfüllt ist, so liegen die von B und D ausgehenden Höhen des Tetraeders in der durch BD senkrecht zu legenden Ebene $DF'B$ und schneiden sich in einem Punkte P_1. Da nun im allgemeinen diese Bedingung bei keinem von den 3 Paar Gegenkanten erfüllt zu sein braucht, so werden sich im allgemeinen keine 2 von den 4 Höhen schneiden; es existirt also im allgemeinen kein Höhenpunkt im Tetraeder.

2) Ist aber BD und AC senkrecht gekreuzt, so kann man auch durch AC eine Ebene AFC senkrecht zu DB legen. In dieser liegen dann, wie man sofort sieht, die Höhen AA_1 und CC_1 (nach bekannten stereometrischen Sätzen) und scheiden sich in einem Punkte P_2. Also: Wenn 2 Gegenkanten senkrecht gekreuzt sind, so schneiden sich je zwei Höhen, welche je von den Endpunkten einer dieser Kanten ausgehen.

3) Man sieht ferner, dass in diesem Falle AF, CF, BF', DF' Höhen sind bezüglich in den Dreiecken ABD, CBD, ABC, ADC; dass BB_1 und DD_1 Höhen sind im Dreieck $BF'D$, also P_1 der Höhenpunkt desselben; AA_1 und CC_1 Höhen im Dreieck AFC, also P_2 der Höhenpunkt desselben; endlich dass FF', als Schnittkante der Ebenen AFC und $BF'D$ senkrecht steht sowohl auf AC als auf BD, d. h. dass FF' das gemeinsame Lot dieser Gegenkanten ist. Wenn also die Bedingung der Nr. 1) erfüllt ist, so liegt der Fusspunkt jeder Tetraederhöhe in einer Höhe derjenigen Seitenfläche, auf deren Ebene jene Tetraederhöhe senkrecht steht (der zugehörigen Grundfläche). Die zwei Schnittpunke der 2 Paar Höhen liegen in dem gemeinsamen Lote der 2 senkrecht gekreuzten Gegenkanten.

4) Es kann ein anderes Paar Gegenkanten senkrecht gekreuzt sein z. B. AB und CD (Fig. 2.). Dann gilt alles oben gesagte nunmehr in Bezug auf diese Kanten. Es ist Ebene ABE senkr. auf CD, Ebene $CE'D$ senkr. auf AB. BE und AE sind Höhen in den Dreiecken BDC und ADC, CE' und DE' Höhen in CAB und DAB, EE' ist das gemeinsame Lot von AB und CD, die Höhen AA_1 und BB_1 einerseits, CC_1 und DD_1 andrerseits schneiden sich in 2 Punkten, welche auf EE' liegen.

5) Sind nun gleichzeitig AC und BD einerseits, AB und CD andrerseits senkrecht gekreuzt, so combiniren sich die Folgerungen in Nr. 4) und 3). Es wird also zunächst Höhe AA_1 geschnitten, sowohl von BB_1 als von CC_1. Die Punkte $A_1\,B_1\,C_1\,D_1$ sind dann die Höhenpunkte der Seitenflächen, in denen sie liegen. Es liefert also die Verbindung von D mit A_1 und von A mit D_1 die dritten Höhen in den Dreiecken BDC und BAC. Aber diese beiden Verbindungslinien schneiden sich auch in demselben Punkte der Kante BC. Denn verlängert man zunächst DA_1 bis zum Schnittpunkte G mit BC_1 und verbindet dann D_1 mit diesem Punkte G, so ist nach einem einfachen stereometrischen Satze D_1G senkr. auf BC, d. h. D_1G ist die Verlängerung von AD_1. Die beiden Geraden AG und DG bestimmen also eine Ebene senkr. auf BC, in welcher auch AD liegt, d. h. auch AD und BC sind senkrecht gekreuzt. Also: Wenn in einem Tetraeder 2 Paar Gegenkanten senkrecht gekreuzt sind, so gilt dasselbe von dem 3ten Paar.

6) Unter dieser Voraussetzung wird nunmehr z. B. die Höhe AA_1 geschnitten von BB_1, weil AD senkr. auf CD, von CC_1, weil AC senkr. auf BD, von DD_1, weil AD senkr. auf BC. Es wird also AA_1 von allen anderen 6 Höhen geschnitten. Dasselbe ergibt sich für BB_1, CC_1 und DD_1. Es wird also jede der Höhen von jeder andern geschnitten. Wenn aber von 4 Geraden jede die 3 andern schneiden soll, so ist dies nur auf 2 Arten denkbar: entweder sie liegen alle 4 in einer Ebene und bilden ein vollständiges Vierseit oder sie schneiden sich alle in demselben Punkt. Der erste Fall ist ausgeschlossen, da ja die 4 Ecken des Tetraeders dann in einer Ebene liegen müssten. Also findet der 2te Fall statt, d. h. es existirt jetzt ein Höhenpunkt. Der gemeinsame Schnittpunkt P aller Höhen (Fig. 2.) liegt nach dem Vorigen (Nr. 3) sowohl in EE', dem gemeinsamen Lot des ersten Paares der senkrecht gekreuzten Gegenkanten, als in FF' dem zweiten, und in GG', dem des dritten Paares, d. h. diese 3 Lote schneiden sich jetzt ebenfalls in einem und demselben Punkt, nämlich im Höhenpunkt.

7) Ungemein einfach und übersichtlich gestaltet sich alles, wenn man den dem Tetraeder umschriebenen Parallelflächner zu Hülfe nimmt, welcher z. B. von Unferdinger in seiner Theorie des Tetraeders aus den 6 Kanten (Grun. Archiv LI. S. 354.) benutzt wird. Legt man nämlich durch jede Kante des Tetraeders eine Ebene parallel zur Gegenkante, so entsteht ein Parallelflächner, dessen 6 Seitenflächen je eine Kante des Tetraeders als Diagonale enthalten (Fig. 3.). Die 6 anderen Diagonalen (in der Figur nicht gezeichnet) bestimmen ein 2tes, dem gegebenen congruentes Tetraeder.

Die Diagonalenpunkte XX' YY' ZZ' der gegenüberliegenden Seitenflächen des Parallelflächners sind zugleich die Mitten der Gegenkanten des Tetraeders. Die Geraden XX', YY', ZZ' welche diese Punkte verbinden, mögen die „Mittellinien" des Tetraedes heissen. Sie schneiden sich alle 3 in einem Punkte O, welcher bekanntlich zugleich der Schwerpunkt des Tetraeders und des Parallelflächners ist. Diese 3 Mittellinien sind einzeln den drei an einer Ecke des Parallelflächners zusammenstossenden Kanten desselben gleich und parallel. Sollen 2 Gegenkanten des Tetraeders z. B. AD und BC senkrecht sich kreuzen, so müssen sich offenbar die Diagonalen des Parallelogramms BC senkrecht schneiden. da die 2te desselben $\parallel AD$ ist; d. h. Parallelogramm BC muss ein Rhombus, oder ZZ' muss $= YY'$ sein. Entsprechendes gilt von den andern Gegenkanten. Hiernach kann die Bedingung des senkrechten Kreuzens zweier oder je zweier Gegenkanten ersetzt werden durch die Gleichheit zweier oder je zweier, d. h. aller drei Mittellinien. Man sieht nun auch

am einfachsten, warum die zu einander senkrechte Lage von 2 und 2 Gegenkanten dieselbe Lage für das dritte Paar zur Folge hat. Denn aus $XX' = YY'$ und $YY' = ZZ'$ folgt von selbst, dass auch $XX' = ZZ'$ ist. Der Parallelflächner wird dann von lauter Rhomben begrenzt. Schneiden sich ausserdem die drei Mittellinien unter gleichen Winkeln (bilden eine gleichseitige Ecke), so sind alle diese Rhomben congruent (Rhomboeder). Sind diese 3 gleichen Winkel Rechte, so entsteht das regelmässige Tetraeder und der umschriebene Würfel.

Hiernach lässt sich folgender Satz aussprechen: „Unter den 3 „Mittellinien des Tetraeders sind entweder keine gleichen, oder 2 „gleiche, oder sie sind alle 3 gleich. Im ersten Fall schneiden sich „keine von den 4 Höhen des Tetraeders. — Im zweiten Fall ist ein „Paar der Gegenkanten senkrecht gekreuzt, und es schneiden sich je „die 2 und 2 Höhen des Tetraeders, welche von den Endpunkten je „einer dieser Gegenkanten ausgehen. Die 2 Schnittpunkte liegen „auf dem gemeinsamen Lot dieser Gegenkanten. Der Fusspunkt „jeder Tetraederhöhe liegt in einer Höhe der zugehörigen Seiten- „fläche (Grundfläche). — Im dritten Fall sind alle drei Paar Gegen- „kanten senkrecht gekreuzt; es schneiden sich alle 4 Tetraederhöhen „in demselben Punkt, oder es existirt ein Höhenpunkt. In demselben „schneiden sich dann auch die drei gemeinsamen Lote von je 2 „Gegenkanten. Der Fusspunkt jeder Tetraederhöhe liegt im Höhen- „punkt der zugehörigen Seitenfläche (Grundfläche)".

Hiermit sind die Umstände, unter denen die von Steiner erwähnten besonderen Fälle eintreten, klargelegt. Der in der zweiten Fassung von Steiner gebrauchte Ausdruck: „Wenn insbesondere 3 Lote sich schneiden, so schneiden sich notwendigerweise alle 4 Lote u. s. w." — möchte wohl besser ersetzt werden durch die Worte: „Wenn insbesondere ein Lot von 2 andern geschnitten wird, so u. s. w.".

II.

Der Ausdruck „Höhen des Tetraeders" kann noch in einem andern Sinne genommen werden, wie es im Abschnitt I. und im allgemeinen geschieht. Man kann nach dem Vorgange von Wittstein (Grun. Arch. XXXIX. S. 3.) das Tetraeder als Prismatoid auffassen, in welchem die Grundflächen durch 2 Gegenkanten dargestellt sind, etwa AB und CD in (in Fig. 3.), der Mittelschnitt durch das Parallelogramm, welches die Mitten der 4 andern Kanten zu Ecken hat — $XYX'Y'$ in (Fig. 2.) — und die Höhe durch das gemeinsame Lot jener beiden Gegenkanten, EE'. Von den Seiten des Mittel-

schnitts sind zwei Gegenseiten (XY' und $X'Y$) der Kante AB parallel und jede $= \frac{1}{2}AB$, die zwei andern (XY und $X'Y'$) der Kante CD parallel und jede $= \frac{1}{2}CD$. Diese Auffassung des Tetraeders als Prismatoid führt bekanntlich sehr einfach zu der Carnot'schen Formel für das Volumen des Tetraeders. — Da jedes Paar Gegenkanten als Grundflächen des Prismatoids gewählt werden kann, so bilden die drei Lote zwischen je 2 Gegenkanten (EE', FF', GG' in (Fig. 3.)) ein zweites System von „Höhen des Tetraeders". Man kann sie „Höhen zweiter Art" oder, da sie zwischen je zwei Gegenkanten gestellt sind, „Zwischenlote" nennen. Es hat sich in Abschnitt I. ergeben, dass, wenn sich die 4 Höhen 1ter Art in einem und demselben Punkt schneiden, auch die 3 Höhen 2ter Art oder Zwischenlote sich in eben demselben Punkt schneiden. Es liegt die Frage nahe, ob dies der e i n z i g e Fall ist, in welchem sich die 3 Zwischenlote schneiden, oder ob es nur einer unter mehreren ist. Da die Verhältnisse sich hier nicht von vornherein so einfach übersehen lassen, wie im Abschnitt I., so möge die Frage analytisch untersucht werden.

1) Die 3 Mittellinien des Tetraeders. XX', YY', ZZ' haben sich schon in Abschnitt I. als bedeutsam für Fragen dieser Art erwiesen. Wir wählen sie als Axen eines (im allgemeinen schiefwinkligen) Coordinatensystems, dessen Ursprung also in O, dem Schwerpunkt des Tetraeders und zugleich des „umschriebenen" Parallelflächners, liegt. Die positiven XYZ mögen gezählt werden nach den Richtungen $0X$, $0Y$, $0Z$. Die Längen zweier Mittellinien, wie sie von den Tetraederkanten begrenzt sind, mögen sein $XX' = 2a$, $YY' = 2b$, $ZZ' = 2c$. Die Cosinus der Coordinatenwinkel mögen bezeichnet werden $\cos(yz) = \cos\mathfrak{a} = \alpha$, $\cos(xz) = \cos\mathfrak{b} = \beta$, $\cos(xy) = \cos\mathfrak{c} = \gamma$. Die Längen der 3 Zwischenlote seien $EE' = 2l_1$, $FF' = 2l_2$, $GG' = 2l_3$. Aus der bekannten Construction dieser Lote weiss man, dass EE' senkrecht steht auf den Ebenen der Parallelogramme AB und CD, also auch auf der Coordinatenebene der XY und durch letztere halbirt wird. Dasselbe gilt von FF' in Bezug auf die Ebenen AC, BD und XZ, von GG' in Bezug auf die Ebenen AD, BC und YZ. Die Schnittpunkte von EE' mit Ebene XY, von FF' mit Ebene XZ, von GG' mit Ebene YZ mögen bezüglich heissen R_1, R_2 und R_3; diese Punkte sind dann zugleich die Mittelpunkte der betreffenden Lote. (In der Fig. 3. um die Deutlichkeit nicht zu stören, sind diese Punkte und manche bereits erwähnte Strecken nicht angegeben).

Endlich werde abgekürzt geschrieben: $\frac{b}{a} = \delta$, $\frac{a}{c} = \varepsilon$, $\frac{c}{b} = \zeta$. Es sind die Gleichungen für je zwei Gegenkanten des Tetraeders

$$
\begin{array}{llll}
AB: & 1) & y = \delta x, & z = -c \\
DC: & 2) & y = -\delta x, & z = +c \\
AC: & 3) & x = \varepsilon z, & y = -b \\
BD: & 4) & x = -\varepsilon z, & y = +b \\
AD: & 5) & z = \zeta y, & x = -a \\
BC: & 6) & z = -\zeta y, & x = +a
\end{array}
$$

Es mögen ferner sein die Gleichungen der Zwischenlote

$$
\begin{array}{llll}
EE': & 7) & y = M x + m, & z = N x + n, \\
FF': & 8) & x = M' z + m', & y = N' z + n' \\
GG': & 9) & z = M'' y + m'', & x = N'' z + n''.
\end{array}
$$

In diesen Gleichungen 7) bis 9) sind die Grössen $Lm\,Nn\,M'$ u. s. w. zu bestimmen durch die Forderung, dass je eins dieser Lote je ein Paar Gegenkanten schneiden und auf ihnen senkrecht stehen soll Wenn allgemein 2 Gerade durch ihre Gleichungen

$$
\begin{array}{ll}
y = B_1 x + b_1, & z = C_1 x + c_1 \\
y = B_2 x + b_2, & z = C_2 x + c_2
\end{array}
$$

gegeben sind, und eine dritte Gerade mit den Gleichungen

$$y = Mx + m, \qquad z = Nx + n$$

jene beiden senkrecht schneiden soll, so müssen bekanntlich die Bedingungen erfüllt sein:

$$
\begin{array}{c}
(B_1 + C_1\alpha + \gamma)M + (C_1 + B_1\alpha + \beta)N = -(1 + B_1\gamma + C_1\beta) \\
(B_2 + C_2\alpha + \gamma)M + (C_2 + B_2\alpha + \beta)N = -(1 + B_2\gamma + C_2\beta) \\
(m - b_1)(N - C_1) = (n - c_1)(M - B_1) \\
(m - b_2)(N - C_2) = (n - c_2)(M - B_2)
\end{array}
$$

wo $\alpha\beta\gamma$ die Cosinus der Coordinatenwinkel sind (Schlömilch, Analyt. Geom. II, S. 44).

Die ersten beiden Gleichungen bestimmen M und N, d. h. die senkrechte Lage der Geraden, die letzten beiden demnächst m und n, so dass wirkliches Schneiden eintritt. Wenden wir diese Regeln auf unsere Gleichungen 1), 2) und 7) an, so erhält man als Bestimmungsgleichungen für M, N, m und n

$$
\begin{array}{ll}
10) & (\delta + \gamma)M + (\delta\alpha + \beta)N = -(1 + \delta\gamma) \\
11) & (-\delta + \gamma)M + (-\delta\alpha + \beta)N = -(1 - \delta\gamma) \\
12) & mN = (n + c)(M - \delta) \\
13) & mN = (n - c)(M + \delta).
\end{array}
$$

Aus 10) und 11) folgt durch Addition und Subtraction

14) $$\gamma M + \beta N = -1$$

15) $$M + \alpha N = -\gamma$$

und daraus

16) $$M = \frac{\beta\gamma - \alpha}{\alpha\gamma - \beta}$$

17) $$N = \frac{1-\gamma^2}{\alpha\gamma - \beta}.$$

Dann folgt aus 12) und 13)

18) $$m = \frac{c}{\delta} \cdot \frac{M^2 - \delta^2}{N}$$

19) $$n = \frac{c}{\delta} . M.$$

Um die entsprechenden Werte für das Zwischenlot FF' zu erhalten, hat man nur in obiger Ableitung zu vertauschen

x mit z also α mit γ und δ mit ε
y „ x β „ α c „ b
z „ y γ „ β

und erhält

16') $$M' = \frac{\alpha\beta - \gamma}{\beta\gamma - \alpha},$$

17') $$N' = \frac{1-\beta^2}{\beta\gamma - \alpha}$$

18') $$m' = \frac{b}{\varepsilon} \cdot \frac{M'^2 - \varepsilon^2}{N'}$$

19') $$n' = \frac{b}{\varepsilon} M'.$$

Vertauscht man ebenso

y mit z also α mit β und δ mit ζ
x „ y β „ γ c „ a
z „ x γ „ α

so erhält man für das Lot GG'

16") $$M'' = \frac{\alpha\gamma - \beta}{\alpha\beta - \gamma}$$

17″) $$N'' = \frac{1-\alpha^2}{\alpha\beta-\gamma}$$

18″) $$m'' = \frac{a}{\zeta}\cdot\frac{M''^2-\zeta^2}{N''}$$

19″) $$n'' = \frac{a}{\zeta}\,.\,M''$$

wodurch die 12 unbekannten Consta·ten in den Gleichungen 7) bis 9) bestimmt sind.

2) Um zu erfahren, welchen Beziehungen die gegebenen 6 Grössen $a\,b\,c\,\alpha\,\beta\,\gamma$ genügen müssen, wenn sich irgend 2 der 3 Zwischenlote z. B. EE' und FF' schneiden sollen, kann man auf deren Gleichungen die oben angegebene Regel für das Schneiden zweier Geraden anwenden und durch eine etwas umständliche Rechnung, die weiter keine Schwierigkeit bietet, jene Beziehung finden. Man kommt aber kürzer zum Ziel durch eine geometrische Bemerkung. Da EE' senkrecht zu Ebene xy, und FF' senkrecht zu Ebene xz, so sind beide — schneidend oder kreuzend — senkrecht zur XAxe. Die senkrechten Projectionen aller Punkte von EE' einerseits und von FF' andrerseits auf die XAxe fallen also je in einen Punkt der letzteren zusammen. Wenn sich nun die Geraden EE' und FF' schneiden, also in einer Ebene liegen, die selbst senkrecht die XAxe schneidet, etwa in Q_1, so fallen eben jene erwähnten beiden Punkte der XAxe in einen, nämlich in den Punkt Q_1 zusammen, und umgekehrt ist letzteres das Merkmal dafür, dass EE' und FF' sich schneiden. Es genügt zu dem Zweck der Nachweis, dass die senkrechte Projection eines Punktes von EE' und eines Punktes von FF' auf XX' zusammenfallen. Diese Punkte können beliebig gewählt werden, z. B. die Punkte R_1 und R_2, in denen EE' und FF' die Ebene xy bez. xz treffen, oder etwa auch die Punkte S_1 und S_2, in denen EE' die Ebene yz, FF' die Ebene xy treffen. Nun zeigen die Gleichungen 7) und 8), dass

S_1 die Coordinaten $x = 0, \quad y = m, \quad z = n$
S_2 „ „ $z = 0, \quad x = m', \quad y = n'$

haben. Projicirt man die Strecke OS_1 (senkrecht) auf XX', so ist die Projection $OQ' = m.\gamma + n\beta$. Projicirt man ebenso OS_2, so ist die Projection $OQ'' = m' + n'\gamma$. Sollen also EE' und FF' sich schneiden, d. h. Q' und Q'' in einen Punkt Q_1 zusammenfallen, so lautet die Beziehungsgleichung:

20) $$m\gamma + n\beta = m' + n'\gamma.$$

Hätte man die Punkte R_1 und R_2 gewählt, so hat man aus 7) und 8) die Coordinaten von

$$R_1 : z = 0, \quad x = -\frac{n}{N}, \qquad y = \frac{Nm - Mn}{N}$$

$$R_2 : y = 0, \quad z = -\frac{n'}{N'}, \qquad x = \frac{N'm' - M'n'}{N'}$$

Also ist die Projection der Strecke $0R_1$ auf die XAxe

$$0Q''' = \frac{(Nm - Mn)\gamma - n}{N}$$

und die entsprechende Projection von $0R_2$ ist

$$0Q^{IV} = \frac{N'm' - M'n' - n'\beta}{N'}$$

oder

$$0Q^{III} = \frac{Nm\gamma - n(M\gamma + 1)}{N}, \qquad 0Q^{IV} = \frac{N'm' - n'(M' + \beta)}{N'}.$$

Nun ist aus 14)

$$M\gamma + 1 = -N\beta.$$

Ferner entspricht der Gleichung 15) eine andere

15') $$M' + \gamma N' = -\beta,$$

von deren Richtigkeit man sich auch direct aus 16') und 17') überzeugen kann, so dass

$$M' + \beta = -N'\gamma$$

ist. Nach Einsetzung dieser Werte wird

$$0Q^{III} = \frac{Nm\gamma + Nn\beta}{N} = m\gamma + n\beta$$

$$0Q^{IV} = \frac{N'm' + N'n'\gamma}{N'} = m' + n'\gamma$$

Man erhält also auch hieraus als Bedingung für das Vorhandensein eines Schnittpunkts von EE' und FF' die Gleichung 20); ausserdem überzeugt man sich nebenher, dass wirklich, nach den Gleichungen der Geraden EE' und FF', die senkrechten Projectionen zweier, also aller Punkte von EE' einerseits und von FF' andrerseits auf XX' in je einen Punkt zusammenfallen.

Die Bedingungen dafür, dass EE' und GG', und dass FF' und GG' sich schneiden, findet man auf analoge Art. Es [illegible] sich also:

EE' schneidet FF', wenn

$$m\gamma + n\beta = m' + n'\gamma \tag{20}$$

GG' schneidet EE', wenn

$$m''\alpha + n''\gamma = m + n\alpha \tag{21}$$

FF' schneidet GG', wenn

$$m'\beta + n'\alpha = m'' + n''\beta \tag{22}$$

3) Um die hierin liegenden Beziehungen zwischen $abc\alpha\beta\gamma$ zu finden, hat man die in den Gleichungen 16), 17) ... bis 18''), 19'') notirten Werte von m, n u. s. w. einzusetzen. Tut man dies zunächst in Gleichung 20), nachdem man letztere in der Form

$$m\gamma + n\beta - m' - n'\gamma = 0$$

geschrieben hat, so erhält man:

$$\frac{ac}{b}\frac{(\beta\gamma-\alpha)^2\gamma}{(\alpha\gamma-\beta)(1-\gamma^2)} - \frac{bc}{a}\frac{(\alpha\gamma-\beta)\gamma}{1-\gamma^2} + \frac{ac}{b}\frac{(\beta\gamma-\alpha)\beta}{\alpha\gamma-\beta}$$
$$-\frac{bc}{a}\frac{(\alpha\beta-\gamma)^2}{(\beta\gamma-\alpha)(1-\beta^2)} + \frac{ab}{c}\frac{\beta\gamma-\alpha}{1-\beta^2} - \frac{bc}{a}\frac{(\alpha\beta-\gamma)\gamma}{\beta\gamma-\alpha} = 0$$

Nach Zusammenfassung der Glieder, welche den Factor $\frac{ac}{b}$, und derjenigen, welche den Factor $\frac{bc}{a}$ enthalten, und einiger Vereinfachung, ergiebt sich, dass alle übrig bleibenden Glieder den Factor $(\beta\gamma-\alpha)$ gemein haben, und obige Gleichung geht über in

$$(\beta\gamma-\alpha)\left\{\frac{ab}{c}\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{ac}{b}\frac{1}{1-\gamma^2} - \frac{bc}{a}\frac{\beta^2-\gamma^2}{(1-\beta^2)(1-\gamma^2)}\right\} = 0$$

Berücksichtigt man, dass $\beta^2 - \gamma^2 = 1 - \gamma^2 - (1-\beta^2)$ ist, so zerlegt sich der letzte Bruch in der Klammer in $\frac{1}{1-\beta^2} - \frac{1}{1-\gamma^2}$; demnach erhält man:

$$(\beta\gamma-\alpha)\left\{\frac{b}{1-\beta^2}\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right) - \frac{c}{1-\gamma^2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\right\} = 0$$

Diese Gleichung zerfällt ersichtlich in die beiden:

$$\beta\gamma = \alpha$$

$$\frac{b}{1-\beta^2}\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right) = \frac{c}{1-\gamma^2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$$

bringt man leicht auf die Form

$$\frac{b^2(a^2-c^2)}{c^2(a^2-b^2)}=\frac{1-\beta^2}{1-\gamma^2}.$$

Nun ist $\alpha = \cos(yz)$ oder, was dasselbe ist, $= \cos \mathfrak{a}$, $\beta = \cos(xz) = \cos \mathfrak{b}$, $\gamma = \cos(xy) = \cos \mathfrak{c}$. Die Winkel (yz), (xz), (xy) oder a, b, c sind die Seiten (Kantenwinkel) der von den Coordinatenaxen (Mittellinien des Tetraeders) gebildeten körperlichen Ecke $OXYZ$. Mögen die Winkel (Flächenwinkel) dieser Ecke, wie sie den Seiten a, b, c gegenüber, d. h. wie sie an den Kanten OX, OY, OZ liegen A, B, C heissen, so ist bekanntlich

$$\cos \mathfrak{a} = \cos \mathfrak{b} \cos \mathfrak{c} + \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c} \cos A$$

oder

$$\cos A \sin \mathfrak{b} \sin \mathfrak{c} = \cos \mathfrak{a} - \cos \mathfrak{b} \cos \mathfrak{c} = \alpha - \beta\gamma.$$

Die erste der beiden obigen Bedingungsgleichungen, wonach $\alpha - \beta\gamma = 0$ sein soll, ist also identisch mit: $\cos A \sin b \sin c = 0$.

Da nun $\sin \mathfrak{b}$ oder $\sin \mathfrak{c}$ nur verschwinden könnte, wenn Winkel $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{c} = 0$ oder $= 180^0$ würde, was sich von selbst ausschliesst, so lange das Tetraeder als solches bestehen soll, so geht jene Gleichung über in

$$\cos A = 0, \quad A = 90^0.$$

In der zweiten jener beiden Gleichungen ist

$$\frac{1-\beta^2}{1-\gamma^2}=\frac{\sin^2 \mathfrak{b}}{\sin^2 \mathfrak{c}}$$

oder, was dasselbe ist

$$=\frac{\sin^2 B}{\sin^2 C}.$$

Analoge Beziehungen findet man durch entsprechende Behandlung der Gleichungen 21) und 22). Die Bedingungen, welchen die Bestimmungsstücke des Tetraeders genügen müssen, wenn sich die Zwischenlote EE' und FF', oder GG' und EE', oder FF' und GG' schneiden sollen, werden hiernach ausgedrückt bezüglich durch folgende Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{23a)} & \alpha = \beta\gamma, \quad \cos A = 0, \quad A = 90^0 \\ \text{23b)} & \dfrac{b^2(a^2-c^2)}{c^2(a^2-b^2)} = \dfrac{\sin^2 b}{\sin^2 c} = \dfrac{\sin^2 B}{\sin^2 C} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{24a)} & \beta = \alpha\gamma, \quad \cos B = 0, \quad B = 90^0 \\ \text{24b)} & \dfrac{c^2(b^2-a^2)}{a^2(b^2-c^2)} = \dfrac{\sin^2 c}{\sin^2 a} = \dfrac{\sin^2 C}{\sin^2 A} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{25a)} & \gamma = \alpha\beta, \quad \cos C = 0, \quad C = 90^0 \\ \text{25b)} & \dfrac{a^2(c^2-b^2)}{b^2(c^2-a^2)} = \dfrac{\sin^2 a}{\sin^2 b} = \dfrac{\sin^2 A}{\sin^2 B}. \end{array}\right.$$

Und zwar ist zu bemerken, dass jedesmal die unter a) oder die unter b) notirte Gleichung genügt, um das Schneiden der betreffenden Lote zu bedingen.

4) Die Deutung der obigen Gleichungen hat keine Schwierigkeit.

Es folgt z. B. aus 23a):

„Stehen die Ebenen, welche eine der 3 Mittellinien des Tetra-„eders mit je einer der beiden anderen bildet, auf einander senk-„recht — oder stehen 2 Seitenflächen des umschriebenen Parallel-„flächners senkrecht auf 2 anderen — so schneiden sich 2 Zwischen-„lote. Jedes dieser Lote ist der einen dieser Ebenen parallel und „zur anderen senkrecht". Man findet auch leicht aus den Gleichungen 7) bis 9), dass jedes dieser beiden Lote eine der Mittellinien senkrecht schneidet.

Aus der Combination von 23a) und 24a) folgt: „Steht eine der „3 Mittellinien senkrecht auf den beiden anderen – stehen 4 Seiten-„flächen des umschriebenen Parallelflächners senkr. auf den 2 übrigen „— so ist jene erste Mittellinie (ZZ') selbst eins der Zwischenlote, „und wird von den beiden andern" (im allgemeinen in 2 verschiedenen Punkten) „senkrecht geschnitten". Man findet leicht, dass diese beiden Schnittpunkte vom Mittelpunkt der geschnittenen Mittellinie nach derselben Seite liegen, in Abständen, die sich verhalten wie die Quadrate der beiden anderen Mittellinien $(a^2 : b^2)$.

Die Gleichung 23b) kann man auch schreiben in der Form:

$$\frac{1-\frac{a^2}{c^2}}{1-\frac{a^2}{b^2}} = \frac{1-\beta^2}{1-\gamma^2} = \frac{1-\cos^2 \mathfrak{b}}{1-\cos^2 \mathfrak{c}}.$$

Sie enthält die 4 Grössen $\frac{a}{c}, \frac{a}{b}, \beta, \gamma$. Man sieht, was ohnehin einleuchtet, dass die betrachtete Eigenschaft des Tetraeders nicht von der absoluten Länge seiner Mittellinien, sondern nur deren Verhältnissen und ihren gegenseitigen Neigungen abhängt. Die Gleichung ist unter anderem erfüllt, wenn $\frac{a}{c} = \cos \mathfrak{b}$ und zugleich $\frac{a}{b} = \cos \mathfrak{c}$ ist; dann ist eine der Mittellinien, XX', senkrecht auf einer der Seitenflächen des Tetraeders, ABD, und auf der zu ihr parallelen Ebene $XY'Z$, d. h. sie ist die Höhe des zwischen diesen Ebenen len Pyramidenstumpfes.

Es muss dabei notwendig sowohl $\frac{a}{c}$ als $\frac{a}{b}$ kleiner als die Einheit sein. Es kann auf diese Art aber immer nur 1 Paar Zwischenlote zum Schneiden gebracht werden. Denn sollte auf dieselbe Art Gleichung 24b) erfüllt sein, welche lautet:

$$\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{1-\frac{b^2}{c^2}}=\frac{1-\gamma^2}{1-\alpha^2},$$

so müsste gerade $\frac{b}{a}<1$ sein, was mit $\frac{a}{b}<1$ unverträglich ist. Gleichung 23b) kann unter anderem a u c h erfüllt werden, wenn zugleich $b=c$, und $\beta=\gamma$, d. h. Wkl. $b=$ Wkl. c ist; d. h. wenn 2 der Mittellinien gleich lang sind und mit der 3ten gleiche Winkel bilden. In diesem Fall ist Ecke $OXYZ$ — und die ihr congruente und symmetrische des umschriebenen Parallelflächners — gleichschenklig. Sollten auf diese Art 2 der Gleichungen unter b) erfüllt sein, so käme man auf die Bedingung $a=b=c$, ein Fall, auf den wir sogleich zurückkommen.

5) Von besonderem Interesse für unsere Aufgabe sind diejenigen Combinationen der gefundenen Bedingungsgleichungen, deren Erfüllung das Vorhandensein eines gemeinsamen Schnittpunktes aller 3 Zwischenlote zur Folge hat. Dieser Combinationen scheint es 4 zu geben, nämlich: 1) alle 3 Gleichungen a). — 2) 2 Gleichungen a) und eine Gleichung b). — 3) Eine Gleichung a) und 2 Gleichungen b). — 4) Alle 3 Gleichungen b).

Eine Betrachtung dieser 4 Fälle im einzelnen ergiebt Folgendes:

1) Wenn 23a), 24a), 25a) zugleich bestehen, so ist Wkl. $A=B=C=90^0$, jede der 3 Mittellinien steht senkrecht auf den beiden andern, der umschriebene Parallelflächner ist ein rechtwinkliger, je 2 Gegenkanten des Tetraeders sind gleich lang, die 3 Mittellinien sind zugleich die Zwischenlote, diese schneiden sich also im Schwerpunkt des Tetraeders O.

2) Man wähle etwa die Combination 23a), 24a), 25b) — die beiden anderen in diesem Falle noch möglichen Gruppirungen ergeben nichts wesentlich Anderes —, so ist $A=B=90^0$, folglich $\sin A=\sin B=1$, also aus 25b) $a^2(c^2-b^2)=b^2(c^2-a^2)$ d. h. $a=b$. Zwei der Mittellinien sind gleich, die dritte steht auf beiden senkrecht, der umschriebene Parallelflächner ist ein gerades Prisma mit rhombischer Grundfläche, 2 der Gegenkanten sind senkrecht gekreuzt, die andern 4 gleich lang.

Wie schon oben bemerkt, ist in diesem Falle die Mittellinie (ZZ'), welche auf den beiden andern senkrecht steht, zugleich das eine Zwischenlot — zwischen den senkrecht gekreuzten Gegenkanten — und von den beiden anderen senkrecht geschnitten, diesmal in demselben Punkte, da das Verhältniss $a^2:b^2$ wegen $a=b$ den Exponenten 1 hat.

Der Abstand dieses Punktes P von O hat den Wert $c\gamma$, ist also positiv oder negativ, je nachdem der Wkl. (xy), d. h. der Winkel zwischen der positiven Richtung der XAxe und der YAxe spitz oder stumpf ist. Nun haben wir bei Ableitung unserer Gleichungen als positive Richtung der XAxe diejenige betrachtet, welche von O nach DC führt, nach derjenigen Kante, deren Gleichung lautet:

$$y = -\delta x,$$

d. h. deren Projection auf die xy Ebene nicht durch den oben definirten Coordinatenwinkel (xy), sondern durch den Nebenwinkel geht. Von den beiden senkrecht gekreuzten Gegenkanten (DC und AB) verbindet nun die eine die Scheitelpunkte der spitzen Winkel, die andere die Scheitelpunkte der stumpfen Winkel des Rhombus, in welchem jede eine der Diagonalen ist, und zwar ist jene die längere, welche die spitzen Winkel verbindet. Die xy Projection der längeren halbirt also die spitzen, die xy Projection der kürzeren die stumpfen Winkel, welche von den Mittellinien und Coordinatenaxen XX' und YY' gebildet werden. Wählt man also als Winkel (xy) zwischen der positiven XAxe und der positiven YAxe den stumpfen, so ist die positive ZAxe nach der längeren, wählt man den spitzen Winkel, so ist die positive ZAxe nach der kürzeren der zu einander senkrechten Gegenkanten gerichtet. In jenem Fall ist $c\gamma$ negativ, in diesem positiv. In jedem Fall also liegt der Punkt P vom Schwerpunkt O des Tetraeders nach der kürzeren der 2 ungleichen senkrecht gekreuzten Gegenkanten hin.

3) Wählt man in diesem Fall etwa die Gleichungen 23a), 24b) und 24c) — die beiden andern möglichen Gruppen ergeben dasselbe Resultat — so ist nach 23a) $A = 90^0$, also $\sin A = 1$. Dann folgt aus 24b)

$$\sin^2 C = \frac{c^2(b^2-a^2)}{a^2(b^2-c^2)},$$

und aus 25b)

$$\sin^2 B = \frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2(b^2-c^2)},$$

und daraus

$$\sin^2 C + \sin^2 B = 1,$$

also

$$B + C = 90^0.$$

Dies ist aber neben $A = 90^0$ unmöglich, da $A + B + C > 180^0$ sein muss. Dieser Fall scheidet also aus der Zahl der Möglichkeiten aus.

4) Wenn alle drei Gleichungen 23b), 24b), 25b) gleichzeitig erfüllt sein sollen, so ist dies nur auf eine Art möglich. Durch Multiplication der beiden ersten erhält man nämlich:

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A} = -\frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2(b^2 - c^2)},$$

während Gleichung 25) ergiebt:

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 A} = \frac{b^2(a^2 - c^2)}{a^2(b^2 - c^2)}.$$

Es muss also dann sein

$$(a^2 - c^2) = -(a^2 - c^2) = 0 \quad \text{also} \quad a = c.$$

Schreibt man etwa 23b) in der Form:

$$b^2(a^2 - c^2)\sin^2 C = c^2(a^2 - b^2)\sin^2 B,$$

so sieht man, dass für $a^2 - c^2 = 0$, auch $a^2 - b^2 = 0$, d. h. $a = b$ sein muss; da $\sin^2 B$ und c^2 von 0 verschieden sind. Der 4te Fall, das gleichzeitige Bestehen der drei Gleichungen unter b) ist also nur möglich, wenn $a = b = c$ ist; wobei dann die Winkel zwischen den 3 Mittellinien beliebiebige sein können. (Befreit man die 3 Gleichungen von ihren Nennern, so sieht man sofort, dass bei beliebigen α, β, γ die Gleichungen erfüllt sind, sobald $a = b = c$). In diesem Fall ist der umschriebene Parallelflächner von 6 Rhomben begrenzt, je 2 Gegenkanten des Tetraeders sind senkrecht gekreuzt. Es ist dies der in Abschnitt I. betrachtete Fall; der Schnittpunkt P der 3 Zwischenlote fällt mit dem der 4 Höhen zusammen, ist aber (im allgemeinen) vom Schwerpunkt 0 des Tetraeders verschieden.

Im allgemeinen sind von den 6 Rhomben nur je 2 gegenüberliegende congruent. Die speciellen Fälle $\alpha = \beta \lessgtr \gamma$, $\alpha = \beta = \gamma$, $\alpha = \beta = \gamma = O$ sind leicht zu deuten.

„Es giebt also nur 3 wesentlich verschiedene Fälle, in denen die „3 Zwischenlote sich in einem und demselben Punkte treffen".

I. „Die Winkel zwischen je 2 Mittellinien sind rechte, die Längen „der letzteren beliebig".

II. „2 Mittellinien sind gleich lang, ihr Winkel beliebig, die dritte „beliebig lang und auf beiden senkrecht".

III. „Alle 3 Mittellinien sind gleich lang, die Winkel zwischen „ihnen beliebig".

6) In dem letzten dieser 3 Fälle besitzen die 6 Fusspunkte der 3 Zwischenlote eine bemerkenswerte Eigenschaft. Wir haben die Punkte, in denen EE', FF', GG' die Coordinatenebenen xy, xz und yz senkrecht schneiden, bezüglich R_1, R_2 und R_3 genannt. Sind die Bedingungen des letzten Falles erfüllt, so bestimmen EE' und FF' eine Ebene E_1, EE' und GG' eine Ebene E_2, FF' und GG' eine Ebene E_3, welche bezüglich die Axen der x, der y und der z senkrecht schneiden; die Schnittpunkte mögen in dieser Reihenfolge Q_1, Q_2, Q_3 heissen. Jedes der Zwischenlote wird von der zu ihm senkrechten Coordinatenebene halbirt, so dass $R_1E = R_1E' = l_1$, $R_2F = R_2F' = l_2$, $R_3G = R_3G' = l_3$ ist.

Wenn wir zunächst nur die Zwischenlote EE' und FF' betrachten, und nur die Gleichung 23b) als erfüllt ansehen, so findet sich Folgendes: Es ist Q_1R_1 senkrecht sowohl zu XX' als zu EE', Q_1R_2 senkrecht zu XX' und zu FF'. Also ist $Q_1E = Q_1E'$, jede von diesen Strecken möge ϱ_1 heissen; ebenso $Q_1F = Q_1F'$, von denen jede ϱ_2 heisse. Endlich ist OR_1 senkr. auf EE', also $OE = OE'$; ebenso OR_2 senkr. auf FF', also $OF = OF'$. Der Abstand der Punkte E und E' heisse r_1, derjenige der Punkte F und F' von O heisse r_2.

Bezeichnet man nun das dem Punkte R_1 zugehörige y mit y_1 und das dem Punkte R_2 zugehörige z mit z_2, so ist aus den Gleichungen 7)

$$y_1 = -\frac{c\delta}{N} = \frac{cb}{a}\frac{\beta-\alpha\gamma}{1-\gamma^2}.$$

Und da

$$Q_1R_1 = y_1\sin(xy) = y_1\sqrt{1-\gamma^2}$$

so wird

$$Q_1R_1^2 = \frac{c^2b^2}{a^2}\cdot\frac{(\beta-\alpha\gamma)^2}{1-\gamma^2}.$$

Entsprechend wird aus Gleichung 8)

$$Z_2 = -\frac{n'}{N'} = \frac{bc}{a}\frac{\gamma-\alpha\beta}{1-\beta^2},$$

also

$$Q_2R_2^2 = Z_2^2\sin^2(xz) = Z_2^2)(1-\beta^2) = \frac{b^2.c^2}{a^2}\frac{(\gamma-\alpha\beta)^2}{1-\beta^2}.$$

Bezeichnet man ferner den Neigungswinkel von ZZ' gegen die Ebene xy oder ab mit i_1, den von YY' gegen die Ebene xz oder ac mit i_2, so ist nach bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie

$$26)\quad \begin{cases} \sin i_1 = \sin A \sin \mathfrak{b} = \sin B \sin \mathfrak{a} \quad \text{und} \\ \sin i_2 = \sin A \sin \mathfrak{c} = \sin C \sin \mathfrak{a} \end{cases}$$

Da nun i_1 gleich dem von Z auf Ebene ab, l_2 gleich dem von Y auf Ebene ac gefällten Lot ist, so ist

$$l_1 = c \sin i_1 = c \sin A \sin \mathfrak{b}$$
$$l_2 = b \sin i_2 = b \sin A \sin \mathfrak{c}$$

Ferner ist, wie schon oben angeführt,

$$\beta - \alpha\gamma = \cos B \sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{c}, \quad \gamma - \alpha\beta = \cos C \sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b},$$

also

$$\frac{(\beta - \alpha\gamma)^2}{1 - \gamma^2} = \cos^2 B \sin^2 \mathfrak{a}, \qquad \frac{(\gamma - \alpha\beta)^2}{1 - \beta^2} = \cos^2 C \sin^2 \mathfrak{a}.$$

Bei Einsetzung der notirten Werte erhält man:

$$27)\quad \begin{cases} \varrho_1^2 = Q_1 R_1^2 + l_1^2 = \dfrac{c^2 b^2}{a^2} \cos^2 B \sin^2 \mathfrak{a} + c^2 \sin^2 A \sin^2 \mathfrak{b} \\ \varrho_2^2 = Q_1 R_2^2 + l_2^2 = \dfrac{b^2 c^2}{a^2} \cos^2 C \sin^2 \mathfrak{a} + b^2 \sin^2 A \sin^2 \mathfrak{c}. \end{cases}$$

Schreibt man hier für $\cos^2 B$ und $\cos^2 C$ bezüglich $1 - \sin^2 B$ und $1 - \sin^2 C$, berücksichtigt die Gleichung 26) und subtrahirt die untere Gleichung von der oberen, so erhält man

$$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = \frac{\sin^2 A}{a^2} \left(c^2(a^2 - b^2) \sin^2 \mathfrak{b} - b^2(a^2 - c^2) \sin^2 \mathfrak{c}\right)$$

die Klammergrösse ist nach 23b) $= 0$, also wird

$$\varrho_1^2 - \varrho_2^2 = 0, \quad \varrho_1 = \varrho_2.$$

Wenn also zwei der Zwischenlote unter Erfüllung einer der Gleichungen unter b) sich schneiden, so liegen ihre 4 Fusspunkte in einem Kreise, dessen Ebene eine der Mittellinien senkrecht und zwar im Mittelpunkt jenes Kreises schneidet. — Ausserdem folgt aus $r_1^2 = OE^2 = OQ_1^2 + \varrho_1^2$, aus $r_2^2 = OF^2 = OQ_1^2 + \varrho_2^2$ und $\varrho_1^2 = \varrho_2^2$, dass $r_1 = r_2 = OE = OF = OE' = OF'$ ist; die vier Fusspunkte $EE'FF'$ haben also auch von O gleichen Abstand.

Bestehen die 3 Gleichungen unter b) gleichzeitig, so gilt genau Entsprechendes je von den 4 Punkten $EE'GG'$ und $FF'GG'$ d. h. sämtliche 6 Fusspunkte liegen dann auf einer Kugel mit dem Centrum O. Es wird dann einfacher (Gl. 27)), da $a = b = c$ ist,

$$\varrho_1^2 = a^2(\sin^2 \mathfrak{a} - \sin^2 B \sin^2 \mathfrak{a} + \sin^2 A \sin^2 \mathfrak{b})$$

und mit Rücksicht auf 26)

Ferner ist
$$\varrho_1^2 = a^2 \sin^2 \mathfrak{a} = a^2(1-\alpha^2)$$

$$OQ_1 = m' + n'\gamma = a\,\frac{(\alpha\beta-\gamma)^2-(\beta\gamma-\alpha)^2}{(\beta\gamma-\alpha)(1-\beta^2)} + a\gamma\,\frac{\alpha\beta-\gamma}{\beta\gamma-\alpha} = a\alpha;$$

also hat man für den Radius der erwähnten Kugel

$$r^2 = a^2(1-\alpha^2) + a^2\alpha^2 = a^2, \quad r = a.$$

Man erhält also den merkwürdigen Satz: „Wenn die 3 Mittel-„linien eines Tetraeders gleich lang sind, so schneiden sich die 4 „Höhen und die 3 Zwischenlote in einem und demselben Punkte. „Ferner liegen die Mitten der 6 Kanten und die 6 Fusspunkte der „Zwischenlote auf einer Kugelfläche (deren Centrum der Schwerpunkt, „und deren Radius die halbe Mittellinie ist)."

7) Hiernach ergiebt sich für ein Tetraeder mit den eben angeführten Eigenschaften folgende einfache Construction: Man ziehe in einer Kugel mit dem Centrum O drei beliebige Durchmesser XX', YY', ZZ', lege durch die Endpunkte jedes Durchmessers 2 Ebenen parallel zu den beiden anderen und wähle von den 8 Ecken des entstehenden rhombischen Parallelflächners vier $(ABCD)$ so aus, dass nie je 2 auf derselben Kante desselben liegen. Diese 4 Punkte sind die Ecken, ihre 6 Verbindungslinien die Kanten des gesuchten Tetraeders. — Jede der letzteren schneidet die Kugelfläche in 2 Punkten. Sechs von diesen 12 Punkten, die Punkte XX' YY' ZZ' sind die Mitten der 6 Tetraederkanten, die sie verbindenden Durchmesser sind die Mittellinien, ihr Schnittpunkt O der Schwerpunkt des Tetraeders. Die andern 6 Punkte, paarweis nach den Gegenkanten geordnet $(EE'FF'GG')$ und verbunden, liefern die 3 Zwischenlote. Dieselben sind zugleich Höhen des Parallelflächners; sie schneiden sich in einem und demselben Punkte P. Die Verbindungslinien dieses Punktes mit den 4 Ecken $ABCD$ sind zugleich die Höhen (Iter Art) des Tetraeders, also P der „Höhenpunkt" desselben.

Es ist ohne Weiteres klar, dass die noch übrigen 4 Ecken des Parallelflächners $(\mathfrak{ABCD})$ ein zweites, dem ersten symmetrisches Tetraeder bestimmen, welches mit dem ersten den Schwerpunkt O und die 3 Littellinien gemein hat. Die 3 Zwischenlote und die 4 Höhen desselben schneiden sich in einem Punkte $\mathfrak{P}$; die 3 Punkte P, O und $\mathfrak{P}$ liegen auf derselben Geraden und zwar $\mathfrak{P}$ symmetrisch zu P in Bezug auf O. Die 6 Fusspunkte der neuen Zwischenlote liegen ebenfalls auf der erwähnten Kugelfläche, die hiernach 18 bemerkenswerte Punkte bestimmt.

8) Die Construction eines Tetraeders, in welchem nach Fall I. (S. 67.) die Zwischenlote einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, ergiebt sich daraus, dass der umschriebene Parallelflächner ein rechtwinkliger ist. Man erhält auch hier 2 symmetrische Tetraeder, welche Schwerpunkt, Mittellinien und die mit ihnen identischen Zwischenlote gemein haben. Ein „Höhenpunkt", in welchem sich die „Höhen Iter Art" schneiden, existirt in diesem Tetraeder nicht. — Die im vorher besprochenen Fall erwähnten 18 Punkte sind hier durch 6 setzt. Dieselben liegen nicht auf einer Kugelfläche; wenn man eine Analogie aufsuchen will, kann man sie als die Endpunkte der Axen eines 3axigen Ellipsoids betrachten.

9) Die Construction eines Tetsaeders, welches dem Fall II. entspricht, ergiebt sich ebenfalls aus dem umschriebenen Parallelflächner, welcher von 2 Rhomben (Grundflächen) und 4 Rechtecken (Seitenflächen) begrenzt ist. Die beiden in demselben enthaltenen Tetraeder haben ein Zwischenlot — etwa EE', jetzt identisch mit ZZ' — gemein. Dasselbe wird, wie oben erwähnt, von FF' und GG' senkrecht geschnitten in einem Punkt P; dessen Abstand von O gleich $c\gamma$ ist, und — bei entsprechender Bezeichnung im andern Tetraeder — von $\mathfrak{F}\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ in einem Punkte $\mathfrak{P}$, welcher zu $\mathfrak{P}$ in Bezug auf O symmetrisch liegt. Die Ebene von FF' und GG' schneidet den Parallelflächner in einem Rhombus, welcher den Grundflächen congruent ist; die Lote FF' und GG' sind die durch den Diagonalenpunkt dieses Rhombus gelegten Höhen desselben, also gleich lang. Entsprechendes gilt von $\mathfrak{F}\mathfrak{F}'$ und $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$, Die jetzt vorhandenen 10 Fusspunkte, $EE'FF'GG'\mathfrak{F}\mathfrak{F}'\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ liegen diesmal auf einem Rotationsellipsoid, dessen Rotationsaxe $EE' = 2b$ und dessen Aequatorialdurchmesser $= 2a$, d. h. gleich jeder der beiden anderen Mittellinien ist. Die 4 Punkte $FF'GG'$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{F}'\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ liegen in je einem Parallelkreis, dessen Ebene von der Aequatorialebene den Abstand $\pm c\gamma$ hat und dessen Radius $= a(1-\gamma^2)$ ist. Die Punkte F und $\mathfrak{F}'$, G und $\mathfrak{G}'$, G' und $\mathfrak{G}$, F' und $\mathfrak{F}$ liegen in je einem Meridian.

10) Als Coordinaten des gemeinsamen Schnittpunktes P der 3 Zwischenlote ergaben sich, wenn er vorhanden ist, in Fall I): $X_p = Y_P = Z_P = 0$, in Fall II): $X_P = Y_P = 0$, $Z_P = c\gamma$. In Fall III) könnte man dieselben berechnen aus den Gleichungen 7) und 9), welche für den Punkt P allesammt gelten, mit Berücksichtigung der Beziehung $a = b = c$. Die Rechnung wird einfacher, und man erhält eine anschauliche Vorstellung von der Lage des Punktes P in diesem Falle, wenn man sich erinnert, dass er gleichzeitig in den oben (S. 68.) erwähnten Ebenen E_1, E_2, E_3 liegt, von denen die

erste die XAxe, die zweite die YAxe, die dritte die ZAxe bezüglich in den Abständen $a\alpha$, (S. 70)., $a\beta$, $a\gamma$ von O senkrecht schneidet. Die Schnittpunkte Q_1, Q_2, Q_3 sind leicht zu construiren. Man findet z. B. Q_1, indem man von OZ auf YY' senkrecht projicirt und die Projection von O aus auf der XAxe nach der Seite abträgt, wo die kleinere der beiden senkrecht gekreuzten Kanten AD und BC liegt. Die oben genannten 3 Ebenen haben, wie man leicht findet, bezüglich die Gleichungen

$$E_1 : x+\gamma y+\beta z = a\alpha$$
$$E_2 : \gamma x+y+\alpha z = a\beta$$
$$E_2 : \beta x+\alpha x+z = a\gamma$$

woraus man einfacher, als aus den Gleichungen 7) bis 9) die Coordinaten xyz des Punktes P berechnen kann. Man erhält so

$$x = \frac{a}{\Delta^2}(\alpha(1-\alpha^2)+\beta(\alpha\beta-\gamma)+\gamma(\alpha\gamma-\beta))$$

$$y = \frac{a}{\Delta^2}(\beta(1-\beta^2)+\gamma(\beta\gamma-\alpha)+\alpha(\alpha\beta-\gamma))$$

$$z = \frac{a}{\Delta^2}(\gamma(1-\gamma^2)+\alpha(\alpha\gamma-\beta)+\beta(\beta\gamma--\alpha))$$

wo

$$\Delta^2 = 1-\alpha^2-\beta^2\cdot\cdot\gamma^2+2\alpha\beta\gamma$$

st. Es liegt nahe, die Strecken $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ selbst in einem von dem gewöhnlichen etwas abweichenden Sinne der Coordinaten des Punktes F anzusehen und mit $x'y'z'$ zu bezeichnen. Bezeichnen ferner δ, ξ, η, ζ die Länge der Strecke OP und die Cosinus der Winkel, welche sie mit OX, OY, OZ bildet, so findet man leicht

$$\xi = \frac{a}{\delta}\alpha, \quad \eta = \frac{a}{\delta}\beta, \quad \zeta = \frac{a}{\delta}\gamma$$

und

$$\delta^2 = xx'+yy'+zz'.$$

11) Die 3 Mittelliniee $2a$, $2b$, $2c$ und die von ihnen eingeschlossenen Winkel $\mathfrak{abc}$ (oder deren Cosinus $\alpha\beta\gamma$) sind offenbar für das Tetraeder völlig ausreichende und beliebig zu gebende Bestimmungsstücke; nur sind die Winkel $\mathfrak{abc}$ den Bedingungnn zu unterwerfen, dass ihre Summe kleiner als 360° und dass die Summe irgend zweier von ihnen grösser als der dritte sei. Es liesse sich also aus diesen 6 Stücken eine vollständige Theorie des Tetraeders aufstellen, wie sie Unferdinger aus den 6 Kanten aufgestellt hat (Grun. Arch.

LI., S: 354. ff.). Es hiesse das nichts anderes, als die Eigenschaften des Tetraeders consequent aus denen des „umschriebenen" Parallelflächners ableiten, durch welchen, wenn er beliebig gegeben wird, in der Tat das ihm „eingeschriebene" d. i. aus 6 seiner Diagonalen gebildete Tetraeder ebenso durchgängig bestimmt ist, wie umgekehrt. Ich beschränke mich hier auf ein Beispiel, die Bestimmung des Teraeder-Volumen. Aus (Fig. 3.) sieht man, dass die Seitenflächen des Tetraeders $ABCD$ von dem umschriebenen Parallelflächner 4 andere Tetraeder abschneiden. Eines derselben ist z. B. $\mathfrak{A}BCD$. Als seine Grundfläche können wir $\mathfrak{A}DC$ ansehen, seine Höhe ist $= EE'$. Erstere ist die Hälfte des Parallelogramms $\mathfrak{A}C\mathfrak{B}D$, letztere die zugehörige Höhe des Parallelflächners. Das Volumen von $\mathfrak{A}BCD$ ist also $= \frac{1}{6}$, das aller abgeschnittenen Tetraeder zusammen $= \frac{4}{6}$ von dem Volumen Π des Parallelflächners. Nennnt man also T das Volumen des Tetraeders $ABCD$, so ist $T = \frac{1}{3}\Pi$. Nun ist $\Pi = \mathfrak{A}C\mathfrak{B}D \cdot EE'$. Den Flächeninhalt F des Parallelogramms $\mathfrak{A}C\mathfrak{B}D$ kann man auf 2 Arten ausdrücken. Denkt man sich $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gezogen, nennt ε_1 den Winkel zwischen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und CD, welcher zugleich den Winkel darstellt, unter dem AB und CD sich kreuzen, und bezeichnet die Länge von CD mit $2e$, von $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB$ mit $2e'$, von EE' (wie früher) mit $2l_1$, so ist F in 4 flächengleiche Dreiecke zerfallen, deren jedes den Inhalt $\frac{1}{2}ee'\sin\varepsilon_1$ hat, also $F = 2ee'\sin\varepsilon_1$, $\Pi = 4l_1ee'\sin\varepsilon$, und $T = \frac{4}{3}l_1ee'\sin\varepsilon'$ (Carnot'sche Formel). Aber anderseits ist auch

$$F = D\mathfrak{B} . D\mathfrak{A} . \sin \mathfrak{B}D\mathfrak{A} = 4ab . \sin \mathfrak{c}.$$

Ferner ist Gleichung 26)

$$EE' = ZZ' . \sin \mathfrak{i}_1 = 2c . \sin A . \sin \mathfrak{b}.$$

Also

$$\Pi = 8abc \sin A . \sin \mathfrak{b} . \sin \mathfrak{c}.$$

Nun ist jedes der drei gleichen Producte $\sin A . \sin \mathfrak{b} . \sin \mathfrak{c}$, $\sin \mathfrak{a} \sin B \sin \mathfrak{c}$, $\sin \mathfrak{a} \sin \mathfrak{b} \sin C$ bekanntlich gleich Δ, wenn man wieder mit Δ die Grösse $\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta\gamma}$ bezeichnet (den sogenannten „sinus der dreiseitigen Ecke" $OXYZ$, nach v. Staudt, Crelle's Journ. XXIV., S. 252.; cf. Dostor, Grun. Arch. LVII., S. 121.). Also erhält man $\Pi = 8abc\Delta$ und $T = \frac{8}{3}abc\Delta$. In Worten:

„Das Volumen eines Tetraeders ist gleich dem dritten Teil des „Productes der 3 Mittellinien, multiplicirt mit dem sinus der von „ihnen gebildeten Ecke".

Noch einfacher erhält man dasselbe Resultat, wenn man sich erinnert, dass Δ das Volumen eines Parallelflächner[illegible] dessen 3 zusammenstossende Kanten jede gleich der Län[illegible] und

zwischen sich Winkel mit den cosinus $\alpha\beta\gamma$ einschliessen, (cf. z. B. Schlömilch, Analyt. Geom. II., S. 12.), welcher also mit unserem umschriebenen Parallelflächner gleiche Winkel hat.

Daraus ergeben sich unmittelbar die zuletzt gegebenen Ausdrücke für Π und T, welche diese Volumina durch $abc\ \alpha\beta\gamma$ ausdrücken. Die Formel für T schliesst sich den zahlreichen anderen an, wie sie z. B. von Dostor (a. a. O. S. 144. ff.) gegeben sind.

IV.

Anwendung der Thetafunctionen auf geodätische Strecken und Winkel.

Von

R. Hoppe.

Die geodätischen Bogen auf einem Rotationsellipsoid stellen sich als reine Ellipsenbogen oder elliptische Integrale 2. Gattung, die zugehörigen geographischen Längen als reine Integrale 3. Gattung, 4. Art mit Coefficienten 1 dar, und zwar variirt der Modul von der Excentricität des Meridians beständig abnehmend bis 0, wenn der geodätisshe Bogen sich dem Aequator nähert.

Da nun die Excentricität des Erdmeridians an sich eine kleine Grösse, der entsprechende Thetamodul noch viel kleiner ist, so klein, dass die 2 ersten Terme der Thetareihen bis auf 13 Decimalstellen ausreichen, so zeigt sich von vorn herein die Anwendung der Thetafunctionen zur directen Berechnung geodätischer Strecken und Winkel als vielversprechend.

Obgleich nun die Betrachtung einer geodätischen Strecke eine grössere Anzahl von Fragen hervorruft, so will ich mich doch auf die 2 Aufgaben beschränken, deren Lösung unmittelbar aus der Theorie hervorgeht, während die übrigen die Auflösung der resultirenden Gleichungen verlangen, nämlich:

Es sind gegeben geographische Länge und Breite des Anfangs eines geodätischen Bogens, Azimut der Anfangstangente und Breite des Endpunkts, gesucht 1) die geodätische Länge des Bogens und 2) die geographische Länge des Endpunkts.

§. 1. Integration in algebraisch-trigonometrischer Form.

Ist die Gleichung der Oberfläche

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

so sind die Bedingungen der geodätischen Linie:

$$\frac{x}{a^2}:\frac{y}{a^2}:\frac{z}{b^2}=x'':y'':z''$$

wo die Accente die Differentiation nach dem Bogen s ausdrücken. Hiernach hat man die 2 Gleichungen:

$$xy''-yx''=0;\qquad \frac{x^2+y^2}{a^2}z''-z\frac{xx''+yy''}{b^2}=0$$

Die erstere gibt integrirt:

$$xy'-yx'=h$$

Sei λ die geographische Länge, und

$$x=r\cos\lambda;\qquad y=r\sin\lambda$$

dann werden sie:

$$r^2\lambda'=h;\qquad \frac{rz''}{a^2}-z\frac{r''-r\lambda'^2}{b^2}=0 \tag{1}$$

woraus nach Elimination von λ':

$$\frac{rz''}{a^2}-\frac{zr''}{b^2}+\frac{h^2z}{b^2r^3}=0 \tag{2}$$

Zerlegt man die Flächengleichung in

$$r=a\cos\gamma;\qquad z=b\sin\gamma$$

und setzt

$$1-\frac{b^2}{a^2}=\varepsilon^2$$

so geht Gl. (2) über in

$$\gamma''(1-\varepsilon^2\cos^2\gamma)+\varepsilon^2\gamma'^2\sin\gamma\cos\gamma+\frac{h^2}{a^4}\frac{\sin\gamma}{\cos^3\gamma}=0$$

oder

$$\partial[\gamma'^2(1-\varepsilon^2\cos^2\gamma)]+\frac{2h^2}{a^4}\frac{\sin\gamma\,\partial\gamma}{\cos^3\gamma}=0$$

integrirt

$$\gamma'^2(1-\varepsilon^2\cos^2\gamma)=\frac{h^2}{a^4}(c^2-\mathrm{tg}^2\gamma) \tag{3}$$

woraus;

$$\pm\partial s=\frac{a^2}{h}\partial\gamma\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2\cos^2\gamma}{c^2-\mathrm{tg}^2\gamma}} \tag{4}$$

Bezeichnet β die geographische Breite, so ist

$$\cos\gamma = \frac{\cos\beta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\beta}}; \qquad \sin\gamma = \frac{b}{a}\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\beta}}$$

Führt man also β statt γ ein, so erhält man:

$$\pm\partial s = \frac{b^2}{h}\frac{\partial\beta}{(1-\varepsilon^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{c^2-(1-\varepsilon^2)\operatorname{tg}^2\beta}}$$

Die Breite β erreicht ihr Maximum für

$$c^2-(1-\varepsilon^2)\operatorname{tg}^2\beta = 0$$

Ist also β_0 das Maximum von β, so ist

$$c = \frac{b}{a}\operatorname{tg}\beta_0$$

und die Gleichung lautet nun:

$$\pm\partial s = \frac{ab}{h}\frac{\cos\beta_0\cos\beta\,\partial\beta}{(1-\varepsilon^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\sin^2\beta_0-\sin^2\beta}} \tag{5}$$

Jetzt folgt leicht:

$$\partial\lambda = \frac{h\partial s}{r^2} = \frac{h}{a^2}\frac{\partial s}{\cos^2\beta}(1-\varepsilon^2\sin^2\beta) \tag{6}$$

§. 2. Azimut.

Der Winkel, unter dem die geodätische Linie s im laufenden Punkte den Meridian schneidet, d. i. das Azimut, sei $= \vartheta$. Ein Punkt der Oberfläche ist bestimmt durch

$$x = a\cos\gamma\cos\lambda; \quad y = a\cos\gamma\sin\lambda; \quad z = b\sin\gamma$$

Differentiirt man bei constantem λ, so erhält man als Richtungscosinus der Tangente des Meridians:

$$(x') = -\frac{\sin\gamma\cos\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\gamma}}; \qquad (y') = -\frac{\sin\gamma\sin\lambda}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\gamma}};$$

$$(z') = \frac{b}{a}\frac{\cos\gamma}{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\gamma}}$$

Bei variabelm λ kommt:

$$x' = -a\gamma'\sin\gamma\cos\lambda - a\lambda'\cos\gamma\sin\lambda$$
$$y' = -a\gamma'\sin\gamma\sin\lambda + a\lambda'\cos\gamma\cos\lambda$$
$$z' = b\gamma'\cos\gamma$$

woraus:

$$\cos\vartheta = (x')x' + (y')y' + (z')z' = a\gamma'\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2\gamma}$$

das ist in β ausgedrückt:

$$\cos\vartheta = \frac{b^2}{a}\frac{\beta'}{(1-\varepsilon^2\sin^2\beta)^{\frac{3}{2}}}$$

und nach Gl. (5):

$$\cos\vartheta = \pm\frac{bh}{a^2}\frac{\sqrt{\sin^2\beta_0-\sin^2\beta}}{\cos\beta_0\cos\beta} \tag{7}$$

Im Durchschnitt mit dem Aequator sei $\vartheta = \vartheta_0$. Hier wird $\beta = 0$, also

$$\cos\vartheta = \pm\frac{bh}{a^2}\operatorname{tg}\beta_0 \quad \text{oder} \quad h = \pm\frac{a^2}{b}\cot\beta_0\cos\vartheta_0$$

Zwischen β_0 und ϑ_0 muss offenbar eine Relation bestehen. In einem Punkte des Aequators wird die erste Gl. (1):

$$a^2\lambda' = h$$

Ebenda ist die Berührungsebene normal zur Aequatorebene, daher $a\partial\lambda$ Projection von ∂s, d. i.

$$a\lambda' = \sin\vartheta_0$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$a\sin\vartheta_0 = h = \frac{a^2}{b}\cot\beta_0\cos\vartheta_0$$

oder

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \frac{a}{b}\cot\beta_0 \tag{8}$$

Das gibt:

$$\cos\vartheta_0 = \frac{b}{a}\frac{\sin\beta_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\beta_0}}; \quad \sin\vartheta_0 = \frac{\cos\beta_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\beta_0}} \tag{9}$$

$$h = \frac{a\cos\beta_0}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\beta_0}} \tag{10}$$

und Gl. (7) wird:

$$\cos\vartheta = \frac{b}{a\cos\beta}\sqrt{\frac{\sin^2\beta_0-\sin^2\beta}{1-\varepsilon^2\sin^2\beta_0}}$$

aufgelöst nach $\cos\beta$ und $\sin\beta_0$

$$\cos\beta = \frac{b}{a}\frac{\cos\beta_0}{\sqrt{(1-\varepsilon^2\sin^2\beta_0)\sin^2\vartheta-\varepsilon^2\cos^2\beta_0}}$$

$$\sin\beta_0 = \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2\sin^2\beta-\sin^2\vartheta\cos^2\beta}{1-\varepsilon^2+\varepsilon^2\cos^2\vartheta\cos^2\beta}} \tag{11}$$

§. 3. Integration in elliptischer Form.

Setzt man für den Modul

$$k = \varepsilon \sin \beta_0 \tag{12}$$

$$\sin \beta = \sin \beta_0 \operatorname{snc} u \tag{13}$$

und lässt u mit s wachsen, dann gilt in Gl. (5) das untere Zeichen, und man findet:

$$\partial s = \frac{bk' \partial u}{\operatorname{dnc}^2 u} = \frac{b}{k'} \operatorname{dn}^2 u \, \partial u$$

Gl. (6) wird:

$$\partial \lambda = \frac{b \varepsilon^2 \cos \beta_0}{a} \frac{\operatorname{dn}^2 u \, \partial u}{k'^2 - (1 - \varepsilon^2) \operatorname{dn}^2 u}$$

Bezeichnet α den Parameter des Integrals 3. Gattung, so ist

$$\operatorname{dn}' \alpha = \varepsilon; \quad k' \operatorname{sn}' \alpha = \frac{b}{a}; \quad k' \operatorname{cn}' \alpha = \varepsilon \cos \beta_0 \tag{14}$$

und die Gleichung geht über in

$$\partial \lambda = \operatorname{sn}' \alpha \operatorname{cn}' \alpha \operatorname{dn}' \alpha \frac{\operatorname{dn}^2 u \, \partial u}{1 - \operatorname{sn}'^2 \alpha \operatorname{dn}^2 u}$$

Nach Gudermann's Bezeichnung sind die Integrale:

$$s = \frac{b}{k'} \operatorname{el} u; \quad \lambda = D_4(u, \alpha) \tag{15}$$

Der Anfang beider ist in den Meridian gelegt, welcher die geodätische Linie symmetrisch teilt, also in das Maximum der Breite.

Im Durchschnitt des Aequators, $\beta = 0$, wird $u = K$, daher

$$s = \frac{b}{k} E; \quad \lambda = K \operatorname{el}' \alpha - (K - E) \alpha \tag{16}$$

Sind nun Länge und Breite λ_1 und β_1 des Anfangs eines geodätischen Bogens $s - s_1$ und das Azimut ϑ_1 seiner Anfangstangente gegeben, so hat man nach Gl. (12) (11):

$$\left.\begin{aligned} k &= \varepsilon \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta_1 - \sin^2 \vartheta_1 \cos^2 \beta'}{1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta_1 \cos^2 \beta_1}} \\ k' &= \sqrt{\frac{(1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \beta)}{1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2 \cos^2 \vartheta_1 \cos^2 \beta_1}} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Ist ferner die Breite β des Endpunkts gegeben, so sind

$$\operatorname{snc} u = \frac{\varepsilon}{k} \sin \beta, \quad \operatorname{dn}' \alpha = \varepsilon$$

also der Modul k und die Argumente u und α bekannt, folglich nach den Gl. (15) s und λ, woraus dann der Bogen $s-s_1$ und die Längendifferenz $\lambda-\lambda_1$ gefunden wird, wie es die anfängliche Aufgabe forderte.

§. 4. Ausdruck in Thetafunctionen.

Die hier eingeführten Reihenausdrücke sind:

$$\begin{aligned}\Theta_1 v &= 1+2q\cos 2u+2q^4\cos 4v+\dots\\ \Theta v &= 1-2q\cos 2v+2q^4\cos 4v-\dots\\ H_1 v &= 2q^{\frac{1}{4}}(\cos v+q^2\cos 3v+q^6\cos 5v+\dots)\\ Hv &= 2q^{\frac{1}{4}}(\sin v-q^2\sin 3v+q^6\sin 5v-\dots)\end{aligned}$$

Um zuerst den Modul q zu bestimmen, hat man:

$$\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\frac{\Theta 0-\Theta 0}{\Theta 0+\Theta 0}=\frac{4q+4q^9+\dots}{2+4q^4+\dots}=2q(1-2q^4\dots)$$

Nach Bessel ist

$$\log\varepsilon=8{,}9122052-10;\qquad \log\sqrt{1-\varepsilon^2}=9{,}9985458-10$$

Nehmen wir für k seinen grössten Wert ε, so ist der Hauptwert von q

$$q=\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt[4]{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt[4]{1-\varepsilon^2}}=\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{(1+\sqrt[4]{1-\varepsilon^2})^2}=\frac{\varepsilon^2}{2(1+\sqrt[4]{1-\varepsilon^2})^2(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})}$$

dies gibt:

$$\begin{aligned}\log q &= 6{,}621\,7437-10\\ \log q^{-4} &= 13{,}486\,9748\end{aligned}$$

folglich kann man bei einer Rechnung bis auf 13 Decimalstellen die 4te Potenz von q vernachlässigen und schreiben:

$$q=\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}=\frac{k^2}{2(1+\sqrt{k'})^2(1+k')}\tag{18}$$

Ebenso lässt sich das Argument finden. Man hat:

$$2q\cos 2v=\frac{\Theta_1 v-\Theta v}{\Theta_1 v+\Theta v}=\frac{\operatorname{dn}u-\sqrt{k'}}{\operatorname{dn}u+\sqrt{k'}};\quad \text{wo } u=v\Theta_1{}^2 0$$

oder

$$\cos 2v=\frac{1+\sqrt{k'}}{1-\sqrt{k'}}\frac{\operatorname{dn}u-\sqrt{k'}}{\operatorname{dn}u+\sqrt{k'}}\tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned}1+\cos 2v &= 2\frac{\operatorname{dn}u-k'}{(1-\sqrt{k'})(\operatorname{dn}u+\sqrt{k'})}\\ 1-\cos 2v &= 2\sqrt{k'}\frac{1-\operatorname{dn}u}{(1-\sqrt{k'})(\operatorname{dn}u+\sqrt{k'})}\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

daher

$$\sin 2v = \frac{2\sqrt[4]{k'}\sqrt{\operatorname{dn} u - k'}\sqrt{1-\operatorname{dn} u}}{(1-\sqrt{k'})(\operatorname{dn} u + \sqrt{k'})}$$

$$= \frac{2\sqrt[4]{k'}(1+\sqrt{k'})(1+k')\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{(\operatorname{dn} u + \sqrt{k'})\sqrt{\operatorname{dn} u + k'}\sqrt{1+\operatorname{dn} u}} \tag{21}$$

Um eine genügend starke Convergenz der Theta-Reihen bei Berechnung von α zu haben, sind 2 Formeln aufzustellen für die 2 Fälle, wo

$$\alpha < \text{ oder } > \tfrac{1}{2}K'$$

ist. Setzt man

$$\alpha = \zeta\Theta_1{}^2 0; \qquad K' - \alpha = \delta\Theta_1{}^2 0$$

so hat man nach den Gl. (14):

$$\frac{\Theta_1 i\zeta}{\Theta\, i\zeta} = \frac{\operatorname{dn} i\alpha}{\sqrt{k'}} = \frac{\operatorname{dn}'\alpha}{\sqrt{k'}\operatorname{cn}'\alpha} = \frac{\sqrt{k'}}{\cos\beta_0} \tag{22}$$

$$\frac{\Theta_1 i\delta}{\Theta\, i\delta} = \frac{\operatorname{dn} i(K'-\alpha)}{\sqrt{k'}} = \frac{\operatorname{dn}'(K'-\alpha)}{\sqrt{k'}\operatorname{cn}'(K'-\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{k'}\operatorname{sn}'\alpha} = \frac{a\sqrt{k'}}{b} \tag{23}$$

Beide Werte werden einander gleich für

$$\sin\beta_0 = \varepsilon; \qquad k = \varepsilon^2$$

Dem entspricht

$$\zeta = \delta = \frac{R}{2}\frac{K'}{K} = \frac{1}{4}\log\frac{1}{q}$$

$$\frac{\Theta_1 i\zeta}{\Theta\, i\zeta} = \frac{\Theta_1 i\delta}{\Theta\, i\delta} = \sqrt[4]{\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}} = \frac{1+(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{1}{4}})+(q^3+q^5)+\dots}{1-(q^{\frac{1}{4}}+q^{\frac{1}{4}})+(q^3+q^5)+\dots}$$

Für $k = \varepsilon^2$ aber ist

$$\log q = 4{,}4447104 - 10$$
$$\log q^{-3} = 16{,}6658688$$

daher der Term (q^3+q^5) in 16ter Decimalstelle noch nicht merklich.

Aus der Gleichung $\operatorname{dn}'\alpha = \varepsilon$ erhält man:

$$\left(k'\operatorname{sn}'\alpha\operatorname{cn}'\alpha\frac{\operatorname{el}'\alpha - k^2\alpha}{k^2} - \frac{k'}{k^2}\operatorname{sn}'^2\alpha\operatorname{dn}'\alpha\right)\partial k' = k'^2\operatorname{sn}'\alpha\operatorname{cn}'\alpha\,\partial\alpha$$

was man schreiben kann:

$$k'\partial\alpha = -\partial k'\int_0 \frac{\partial\alpha}{\operatorname{cn}'^2\alpha}$$

Dies zeigt, dass beständig α mit k, also mit β_0 wächst. Vermindert man also $\sin\beta_0$ von ε an, so erhöht sich die Convergenz der erstern Reihe, vermehrt man β_0, so nimmt $K'-\alpha$ ab, und die zweite Reihe convergirt stärker.

Mit Weglassung der dritten und folgenden Terme in beiden Fällen erhält man also für $\sin\beta_0 \overline{\overline{<}} \varepsilon$:

$$2q\cos 2i\zeta = \frac{\sqrt{k'} - \cos\beta_0}{\sqrt{k'} + \cos\beta_0} \tag{24}$$

und für $\sin\beta_0 \overline{\overline{>}} \varepsilon$:

$$2q\cos 2i\delta = \frac{a\sqrt{k'} - b}{a\sqrt{k'} - b} \tag{25}$$

und zwar ist

$$\alpha = \zeta\Theta_1{}^2 0 = \left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{q} - \delta\right)\Theta_1{}^2 0$$

oder

$$\alpha = \zeta(1+2q)^2 = \left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{q} - \delta\right)(1+2q)^2 \tag{26}$$

Nachdem nun q, v, ζ, δ bekannt sind, gehen die Ausdrücke (15) über in

$$s = \frac{b}{\Theta^2 0}\left(\frac{\Theta' v}{\Theta v} - \frac{H_1'' o}{H_1 o} v\right) \tag{27}$$

$$\lambda = i\frac{H_1' i\zeta}{H_1 i\zeta} v + \frac{i}{2}\log\frac{\Theta(v - i\zeta)}{\Theta(v + i\zeta)} \tag{28}$$

$$= i\frac{H_1' i\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{q} - \delta\right)}{H_1 i\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{q} - \delta\right)} v + \frac{i}{2}\log\frac{\Theta\left(v - \frac{i}{2}\log\frac{1}{q} + i\delta\right)}{\Theta\left(v + \frac{i}{2}\log\frac{1}{q} - i\delta\right)}$$

Entwickelt man in Reihen, so kommt:

$$\frac{H_1'' o}{H_1 o} = -\frac{1+9q^2}{1+q^2} = -(1+8q^2)$$

$$\frac{iH_1' i\zeta}{H_1 i\zeta} = -i\frac{\sin i\zeta + 3q^2\sin 3i\zeta}{\cos i\zeta + q^2\cos 3i\zeta}$$

$$= -i\operatorname{tg} i\zeta\left\{1 + q^2\left(\frac{3\sin 3i\zeta}{\sin i\zeta} - \frac{\cos 3i\zeta}{\cos i\zeta}\right)\right\}$$

$$= -i\operatorname{tg} i\zeta\left\{1 + 8q^2\cos^2 i\zeta\right\}$$

$$= \frac{1 - e^{-2\zeta}}{1 + e^{-2\zeta}}\left\{1 + 2q^2(e^{\zeta} + e^{-\zeta})^2\right\}$$

Die übrigen Transformationen sind einfach; man findet:

$$s = \frac{b}{(1-2q)^2}\left\{(1+8q^2)v + \frac{4q\sin 2v}{1 - q\cos 2v}\right\} \tag{29}$$

$$\lambda = \frac{1-e^{-2\zeta}}{1+e^{-2\zeta}}\{1+2q^2(e^{\zeta}+e^{-\zeta})^2\}\,v \tag{30}$$

$$+\operatorname{arc\,tg}\frac{q(e^{2\zeta}-e^{-2\zeta})\sin 2v}{1-q(e^{2\zeta}+e^{-2\zeta})\cos 2v} \qquad \left(\text{für } \sin\beta_0 \overset{=}{<} \varepsilon\right)$$

$$= \frac{1-qe^{2\delta}}{1+qe^{2\delta}}\{1+2q(e^{-\delta}+qe^{\delta})^2\}\,v$$

$$+\operatorname{arc\,tg}\frac{(e^{-2\delta}-q^2e^{2\delta})\sin 2v}{1-(e^{-2\delta}+q^2e^{2\delta})\cos 2v} \qquad \left(\text{für } \sin\beta_0 \overset{=}{>} \varepsilon\right)$$

§. 5. Messung des Meridians.

Ist $\vartheta_0 = 0$, so wird $\beta_0 = R$, daher

$$k = \varepsilon; \qquad \beta = \operatorname{coam} u$$

Setzt man $\sin\eta = \varepsilon\sin\beta$, so hat Gl. (21) die Form:

$$\sin 2v = \frac{C\sin 2\beta}{\cos\frac{\eta}{2}(\sqrt{k'}+\cos\eta)\sqrt{\cos\eta+k'}}$$

und Gl. (29):

$$s = a\left(Av+\frac{B\sin 2v}{1-2q\cos 2v}\right)$$

Die Constanten haben folgende Werte:

$$k = \varepsilon = 0{,}08169683 \qquad \log k = 8{,}9122052-10$$
$$k' = 0{,}9966572 \qquad \log k' = 9{,}9985458-10$$
$$\sqrt{k'} = 0{,}9983272 \qquad \log\sqrt{k'} = 9{,}9992729-10$$
$$q = 0{,}0004185465 \qquad \log q = 6{,}6217437-10$$
$$A = 0{,}9983297 \qquad \log A = 9{,}9992738-10$$
$$B = 0{,}001671387 \qquad \log B = 7{,}2230769-10$$
$$C = 2{,}818977 \qquad \log C = 0{,}4500915$$

V.

Ueber den Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte zweier Curven.

Von

B. Sporer.

I.

Die Gleichungen zweier algebraischer Curven C^m und C^n seien:

$$C^m = ax^m + (by + c)x^{m-1} + (dy^2 + ey + f)x^{m-2} + \dots = 0$$

oder

$$C^n = a_1x^n + (b_1y + c_1)x^{n-1} + (d_1y^2 + e_1y + f_1)x^{n-2} + \dots = 0.$$

Eliminiren wir hieraus x, so erhalten wir für die Ordinaten der mn Schnittpunkte beider Curven die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a & by+c & dy^2+ey+f & . & . & \dots \\ 0 & a & by+c & dy^2+ey+f & . & \dots \\ 0 & 0 & a & by+c & dy^2+ey+f & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots(m) \\ a_1 & b_1y+c_1 & d_1y^2+e_1y+f_1 & . & . & \dots \\ a & a_1 & b_1y+c_1 & d_1y+e_1y+f_1 & . & \dots \\ . & . & . & . & . & \dots(n) \end{vmatrix} = 0$$

Entwickeln wir diese Gleichung, so finden wir, dass die Coefficienten der beiden höchsten Potenzen von y in jedem der $(mn)^2$ Glieder der Determinante nur abhängig sind von den Coefficienten der Glieder, deren Grad in den Unbekannten in den Gleichungen C^m und C^n gleich m oder gleich $m-1$ resp. $= n$ oder gleich $n-1$



ist. Daraus können wir schliessen, dass die Form der Gleichung der Ordinaten der gemeinschaftlichen Punkte der beiden Curven

$$py^{m+n} + qy^{m+n-1} + \varphi(y) = 0$$

ist, wo p und q nur von den erwähnten Gliedern der Gleichungen der Curven abhängig sind und wo $\varphi(y)$ vom Grade $(m+n-2)$ ist.

Berücksichtigen wir nun, dass die algebraische Summe der Wurzeln der Gleichung der y gleich $-\frac{q}{p}$ wird, so finden wir, dass die Ordinate des Schwerpunkts der Schnittpunkte von $C^{(m)}$ und C^n

$$= -\frac{q}{mnp}$$

wird. Da für die Abscisse des Schwerpunktes die gleichen Schlussfolgerungen giltig sind, erhalten wir den Satz:

Die Lage des Schwerpunktes der gemeinsamen Punkte zweier Curven C^m und C^n ist nur abhängig von denjenigen Gliedern der Gleichungen beider Curven, deren Grad in den Unbekannten gleich oder um eine Einheit kleiner ist als die Ordnung der Curven C^m und C^n.

Sind ferner $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ und $\alpha_1', \alpha_2' \ldots \alpha_n'$ die Asymptoten der beiden Curven, so lassen sich die Gleichungen derselben auf die Formen

$$C^m = \alpha_1 . \alpha_2 \ldots \alpha_m + f(x,y) = 0$$
$$C^n = \alpha_1' . \alpha_2' \ldots \alpha_n' + f'(x,y) = 0$$

bringen, wo $f(x,y)$ und $f'(x,y)$ vom $(m-2)$ten resp. $(n-2)$ten Grade sind.

Bedenken wir nun, dass die Asymptoten der Curven fest bleiben, wenn die Functionen $f(x,y)$ und $f'(x,y)$ sich irgendwie ändern, so finden wir, dass der Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte von C^m und C^n identisch ist mit dem Schwerpunkt der Curven $\alpha_1 . \alpha_2 \ldots \alpha_m = 0$ und $\alpha_1' . \alpha_2' \ldots \alpha_n' = 0$ oder mit andern Worten es ergiebt sich uns der Satz:

Die Schnittpunkte zweier algebraischen Curven haben denselben Punkt zum Schwerpunkt wie die Punkte, welche die Asymptoten der einen Curve mit den Asymptoten der andern Curve gemein haben. Bleiben also die Asymptoten zweier Curven fest, so ändert der Schwerpunkt der gemeinschaftlichen Punkte der beiden Curven sich nicht, wenn die Curven selbst sich ändern.

Von diesem Satze nun, der unseres Wissens noch unbekannt ist, sei es uns gestattet, in folgendem einige Folgerungen zu ziehen, welche zwar an und für sich wenig neues liefern werden, deren Ableitung jedoch immerhin von Interesse sein dürfte.

II.

Zunächst sei eine der beiden Curven eine gerade Linie, so geht der Satz in folgenden über.

Die Schnittpunkte einer geraden Linie mit einer Curve C^n haben denselben Schwerpunkt wie die Punkte, welche die Linie mit den Asymptoten der Curve gemein hat, oder: Die algebraische Summe der Abschnitte auf einer Linie zwischen den Punkten einer Curve und deren Asymptoten ist gleich Null.

Ein specieller Fall ist der bekannte Satz über die Hyperbelsecante.

b) Sind von einer Curve C^3 drei Asymptoten gegeben und soll die Curve überdies noch durch zwei Punkte A und B gehen, so folgt aus

a) sofort, dass sie noch durch einen 3ten Punkt auf AB gehen muss oder auch:

Haben zwei Curven 3ter Ordnung dieselben Asymptoten, so liegen die übrigen 3 Schnittpunkte derselben auf einer geraden Linie Ein specieller Fall davon lautet:

Die 3 Schnittpunkte, in welchem die Asymptoten von C^3 die Curve C^3 im endlichen treffen, liegen in gerader Linie.

Berücksichtigen wir, dass die Berührungspunkte der Asymptoten in einer geraden Linie — der unendlich fernen — liegen, so folgt hieraus sofort durch Projection die Theorie der Begleiterin einer geraden Linie in bezug auf eine Curve C^3.

c) Bei einer Wendetangente ist der Wendepunkt, bei einer Rückkehrtangente der Rückkehrpunkt und bei einer Tangente in einem Doppelpunkte der Doppelpunkt einer Curve C^3 stets der Schwerpunkt der 3 Punkte, welche die betreffende Tangente mit den 3 Asymptoten gemein hat.

d) Hat ferner eine Curve C^3 zwei feste Asymptoten und geht dieselbe durch 3 feste Punkte einer geraden Linie, so dreht sich die 3te Asymptote der Curve um einen festen Punkt auf der Linie der 3 festen Punkte, wenn C^3 sich ändert.

Analoge Sätze wie b)—d) gelten bei Curven höherer als der 3ten Ordnung.

e) Bewegt sich eine gerade Linie parallel mit sich selbst, so ist der Ort des Schwerpunkts der Punkte dieser Linie, welche dieselbe mit n festen Linien gemein hat, stets eine gerade Linie. Daraus folgt sofort der Satz:

Wird eine gerade Linie parallel mit sich selbst verschoben, so bewegt sich der Schwerpunkt der Punkte, die sie in ihren Lagen mit einer Curve C^n gemein hat, auf einer geraden Linie. Jeder Richtung ist in bezug auf eine Curve C^n somit eine solche gerade Linie — Durchmesser der Curve genannt — conjugirt und zu jedem solchen Durchmesser gehört eine Richtung.

f) Ist ABC das Asymptotendreieck einer Curve C^3, D ein beliebiger Punkt auf BC, und verlängern wir nun AD nach E, dass $AE = 2AD$ wird, so ist der Ort von E eine gerade Linie. Ziehen wir ferner BE und CE, so schneiden diese Linien die Seiten AC und AB in den Punkten x und y eines Durchmessers. Ziehen wir nämlich durch x und y parallele Linien mit AD, so ergiebt sich uns sofort, dass x und y die Schwerpunkte der 3 Punkte sind, in welchen diese Linien die Seiten des Asymptotendreiecks treffen. Dies giebt uns den Satz:

Die Durchmesser einer Curve C^3 schneiden die Seiten des Asymptotendreiecks in projectivischen Punktreihen, oder: Die Durchmesser einer Curve C^3 umhüllen einen Kegelschnitt K^2, der die Seiten des Asymptotendreiecks in den Seitenmitten berührt.

Analog finden wir für die Curve C^n:

Die Durchmesser einer Curve C^n umhüllen eine Curve der $(n-1)$ten Ordnung, welche die Asymptoten von C^n berührt.

g) Zu jedem Punkte gehören somit zwei Durchmesser einer Curve C^3, welche durch diesen Punkt gehen, nämlich die Tangenten, welche sich von dem Punkt an den Kegelschnitt K^2 ziehen lassen. Daraus können wir umgekehrt schliessen, dass durch jeden Punkt zwei Linien gehen, für welche der Punkt Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte der Linie mit C^3 ist. Die Construction dieser Linien liefert die zu dem vorigen Satze gehörige Figur.

Dreht sich ferner eine gerade Linie um einen festen Punkt P, so bewegt sich der Schwerpunkt der 3 Punkte dieser Linie, welche sie mit 3 geraden Linien gemein hat, auf einer Curve 3ter Ordnung C_1^3, welche in P einen Doppelpunkt hat, und deren 3 Asymptoten den Seiten des Dreiecks der festen Linien parallel sind; und zwar ist P Aehnlichkeitspunkt des festen Dreiecks und des Asymptotendreiecks, und die Seiten des letztern verhalten sich zu denen des erstern wie 1:3.

Daraus folgt sofort ein analoger Satz, wenn an Stelle von 3 geraden Linien eine Curve C^3 tritt.

Liegt P ausserhalb K^2, so hat die Curve $C_1{}^3$ einen eigentlichen Doppelpunkt, liegt P auf der Curve, so ist P Rückkehrpunkt, und liegt P innerhalb, so ist P ein isolirter Punkt von $C_1{}^3$.

Liegt P auf einer Asymptote, so zerfällt $C_1{}^3$ in die Asymptote und einen Kegelschnitt, fällt P mit dem Schnittpunkt zweier Asymptoten zusammen, so zerfällt $C_1{}^3$ in eine gerade Linie und die Asymptoten durch P.

Analoge Sätze gelten über Curven höherer Ordnung.

III.

Ist eine der algebraischen Curven ein Kreis, so kann der Hauptsatz wie folgt ausgesprochen werden, wenn wir bedenken, dass Kreise mit demselben Mittelpunkt auch dieselben (imag.) Asymptoten besitzen:

Die Lage des Schwerpunkts der gemeinschaftlichen Punkte eines Kreises K^2 und einer Curve C^n ist nur abhängig von der Lage des Mittelpunktes von K^2 und von der Lage der Asymptoten von C^n, Der erwähnte Schwerpunkt bleibt also fest der Halbmesser des Kreises und die Curven C^n mögen sich ändern wie sie wollen, wenn nur der Mittelpunkt von K^2 und die Asymptoten von C^n fest bleiben.

Dieser Satz nun gestattet einige interessante Anwendungen in bezug auf die Kegelschnitte.

a) Sei z. B. auf einer Axe eines Kegelschnitts irgend ein Punkt gegeben, und ist verlangt, man soll von diesem Punkte aus die zwei Normalen auf den Kegelschnitt fällen, welche mit der Axe nicht zusammenfallen, so haben wir nur um diesen Punkt einen Kreis zu beschreiben, welcher den Kegelschnitt in 4 Punkten schneidet, welche wir stets als reell voraussetzen können, falls die Aufgabe überhaupt reelle Lösungen zulässt, und die Mitten zweier, nichtparalleler Gegenseiten des Vierecks dieser Punkte zu verbinden, so durchschneidet diese Verbindungslinie den Kegelschnitt in den gesuchten Fusspunkten.

b)
$$x^2+y^2-2px-2qy+r=0$$
und
$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

seien ferner die Gleichungen eines Kreises und eines Kegelschnitts, so erhalten wir für die Coordinaten des Schwerpunkts der 4 gemeinschaftlichen Punkte der Curven die Werte:

$$\xi = \frac{a^2 p}{a^2 - b^2}, \qquad \eta = -\frac{b^2 q}{a^2 - b^2}$$

Aus diesen Gleichungen folgen sofort die Relationen

$$\frac{\xi}{p} + \frac{\eta}{q} = 1 \text{ und } \frac{\xi}{\eta} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{p}{q},$$

woraus sich mit Hilfe conjugirter Durchmesser der Schwerpunkt construiren lässt, falls es keinen Kreis giebt, der den Kegelschnitt in 4 reellen Punkten schneidet.

c) Aus den in b) angegebenen Werten für die Coordinaten des Schwerpunktes lässt sich eine einfache Construction des Krümmungsmittelpunkts für einen Punkt A auf einer Ellipse oder Hyperbel ableiten. Zunächst finden wir, dass wenn wir den Mittelpunkt M des Kreises sich auf einer geraden Linie bewegen lassen, dass alsdann der Schwerpunkt S der 4 gemeinsamen Punkte beider Curven sich ebenfalls auf einer geraden Linie bewegt. Liegt also der Mittelpunkt M des Kreises auf der Normale des Kegelschnitts, so ist der Ort von S eine gerade Linie. Nun lässt sich jedoch für zwei Punkte der Normale als Mittelpunkte des Kreises die zugehörige Lage des Punktes S sofort bestimmen, nämlich für die Punkte B und C, in welchen die Normale die Axen OB und OC des Kegelschnitts durchschneidet. Die Punkte S_1 und S_2, die zu diesen Punkten B und C gehören, sind nämlich die Fusspunkte der Lote von A auf die x Axen OB und OC.

Schneidet nun der Krümmungskreis in A den Kegelschnitt überdies noch in D, so muss nun der Schwerpunkt S der vier gemeinschaftlichen Punkte des Kreises mit dem Kegelschnitt auf S_1S_2 und auf AD liegen, und es muss $AS : SD = 1 : 3$ sich verhalten. Ziehen wir ferner durch D eine Parallele zu S_1S_2, so schneidet diese den Kegelschnitt noch einmal in einem Punkte E, der mit A und O auf einer geraden Linie liegt, wie sich sofort ergiebt. Daraus ergiebt sich uns folgende Construction des Punktes D.

Von A fälle man auf die Axen des Kegelschnitts die Lote AS_1 und AS_2, ziehe durch A, $AF \parallel S_1S_2$, verbinde den 2ten Schnittpunkt F von AF mit dem Kegelschnitt mit dem Kegelschnittmittelpunkt O, so ist der 2te Schnittpunkt von OF mit dem Kegelschnitt der gesuchte Punkt D.

d) Ist der Kegelschnitt eine Parabel, so finden wir, dass für diesen Fall der Schwerpunkt der gemeinsamen Punkte eines Kreises und der Parabel stets auf der Axe der Parab[illegible] [illegible]lgt auf



analoge Weise, dass für diesen Fall die Linie AD durch die Parabelaxe im Verhältniss von $1:3$ geteilt wird.

e) Irgend einer Parabel sei ferner ein gleichseitiges Dreieck ABC einbeschrieben. Um den Mittelpunkt M desselben sei durch die Ecken ein Kreis beschrieben, welcher die Parabel zum vierten Male in D trifft. Für die Coordinaten des Schwerpunkts der Punkte A, B, C und D ergiebt sich, wenn

$$y^2 = 2px$$
$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

die Gleichungen der Parabel und des Kreises sind:

$$\xi = (a - p) \qquad \eta = 0$$

Da der Schwerpunkt der 3 Punkte A, B, C mit dem Mittelpunkt M des Kreises zusammenfällt, liegt der Schwerpunkt der 4 Punkte A, B, C, D auf MD. Schneidet also MD die Parabelaxe in E, so muss also E der gesuchte Schwerpunkt sein, d. h. es muss $ED = 3EM$ sein. Fällen wir nun von M und D die Lote MF und DG auf die Parabelaxe, so ist, wenn S der Scheitel der Parabel ist:

$$SD = a - 4p$$
$$SD + 4p = a = SF$$

und

$$MF = \frac{DG}{4} = \frac{1}{4}\sqrt{2p(a-4p)}$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber sofort, dass, bei veränderlicher Lage des Punktes D, M sich ebenfalls auf einer Parabel befindet, d. h. wir erhalten den Satz:

Die Schwerpunkte aller gleichseitigen Dreiecke, die sich einer Parabel einbeschreiben lassen, liegen auf einer Parabel.

f) Wird ferner irgend einer gleichseitigen Hyperbel ein gleichseitiges Dreieck ABC einbeschrieben, so liegt der Schwerpunkt M des Dreiecks ebenfalls auf der Hyperbel. Da nun die Coordinaten des Schwerpunkts der 4 Punkte eines Kreises und einer gleichseitigen Hyperbel nach b) die Werte $\xi = \frac{p}{2}$ und $\eta = \frac{q}{2}$ haben, so folgt sofort, dass ein Kreis, der um M durch die Ecken des gleichseitigen Dreiecks beschrieben wird, durch den andern Endpunkt des durch M gehenden Durchmessers gehen muss. Wir erhalten also den Satz:

Beschreibt man um einen Punkt einer gleichseitigen Hyperbel mit der Länge des zu diesem Punkte gehörigen Durchmessers einen

Kreis, so bestimmt dieser Kreis ausser dem andern Endpunkte des Durchmessers noch drei Punkte der Hyperbel, welche die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind.

Wir wollen noch hinzufügen, dass anknüpfend an die Betrachtung in c) sich die Aufgabe: Von einem Punkt sollen die Normalen auf einen Kegelschnitt (mit Mittelpunkt) gefällt werden — auf folgende zurückführen lässt:

Durch einen Punkt soll eine Linie zwischen die Axen eines Kegelschnitts so hinein gelegt werden, dass sie durch den Kegelschnitt gehälftet wird, woraus sich sofort ergiebt, dass die Fusspunkte der Normalen auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen.

Zum Schluss wollen wir noch bemerken, dass sich, wie für den Kreis und die Kegelschnitte, auch in bezug auf die gemeinsamen Punkte zweier andern Curven Sätze entwickeln lassen. So erhalten wir z. B. für einen Kreis und eine Neil'sche Parabel den Satz:

Der Schwerpunkt der sechs Punkte einer Neil'schen Parabel und eines Kreises liegt auf einer festen geraden Linie senkrecht zur Axe der Parabel.

Weingarten (Würtemberg), im Mai 1885.

VI.

Zur Theorie der kubischen Gleichungen.

Von

Emil Oekinghaus.

Wir skizziren im Nachfolgenden eine einfache Methode der Auflösung dieser Gleichungen, welche sich auf eine symmetrische Wurzelfunction gründet und im Allgemeinen den Gang innehält, welchen wir schon früher für den 4. Grad befolgt haben.

Die Gleichung dritten Grades

$$1)\qquad x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

wollen wir vermittelst der Substitution

$$2)\qquad \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} + \sqrt[3]{x_3}$$

transformiren. Wir werden diese Function auf die 2. und 3. Potenz erheben und eine Gleichung für y aufstellen, deren Wurzeln mit der 1. Gleichung in einfachem, durch 2) vermitteltem Zusammenhang stehen.

Die 2. Potenz von 2) gibt

$$3)\qquad \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_2^2} + \sqrt[3]{x_3^2} + 2(\sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_2x_3} + \sqrt[3]{x_3x_1}).$$

Die 3. Potenz liefert

4) $y = x_1 + x_2 + x_3$
$$+3(\sqrt[3]{x_1^2x_2} + \sqrt[3]{x_1x_2^2} + \sqrt[3]{x_1^2x_3} + \sqrt[3]{x_1x_3^2} + \sqrt[3]{x_2^2x_3} + \sqrt[3]{x_2x_3^2}) + 6\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$$
oder
$$\frac{y-a-6\sqrt[3]{c}}{3}$$
$$= \sqrt[3]{x_1^2x_2} + \sqrt[3]{x_1x_2^2} + \sqrt[3]{x_1^2x_3} + \sqrt[3]{x_1x_3^2} + \sqrt[3]{x_2^2x_3} + \sqrt[3]{x_2x_3^2}$$
$$= \sqrt[3]{x_1^2}(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x_1}) + \sqrt[3]{x_2^2}(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x_2}) + \sqrt[3]{x_3^2}(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x_3})$$
$$= \sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_2^2} + \sqrt[3]{x_3^2}) - (x_1 + x_2 + x_3).$$

Daher erhält man vermöge 3) nach Elimination von $\sqrt[3]{x_1^2} + \sqrt[3]{x_2^2} + \sqrt[3]{x_3^2}$
$$\frac{y+2a-6\sqrt[3]{c}}{3} = y - 2\sqrt[3]{y}(\sqrt[3]{x_1x_2} + \sqrt[3]{x_2x_3} + \sqrt[3]{x_3x_1}).$$

Da aber
$$\sqrt[3]{x_1x_2} = \sqrt[3]{\frac{c}{x_3}}$$
etc. ist, so folgt als vorläufiges Resultat

5) $$y - a + 3\sqrt[3]{c} = 3\sqrt[3]{cy}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x_1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x_2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x_3}}\right).$$

Demnach haben wir einen Ausdruck für y erhalten, welcher ausser den Constanten noch die reciproken Kubikwurzeln der $x_1x_2x_3$ enthält. Aus diesem Grunde ist nun die Einführung der Relation

6) $$\frac{1}{\sqrt[3]{z}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x_1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x_2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x_3}}$$

und die Transformation ihrer bez. Gleichung erforderlich. Letztere besteht darin, dass in der Hauptgleichung für x die reciproken Wurzeln zu wählen sind um eine analoge Gleichung wie die obige zu gewinnen.

Sie kann unmittelbar niedergeschrieben werden und lautet

7) $$\frac{1}{z} - \frac{b}{c} + \frac{3}{\sqrt[3]{c}} = 3\sqrt[3]{\frac{y}{cz}},$$

und ist das Correlat zu

$y - a$ [illegible]

Aus beiden folgt

$$(y-a)\sqrt[3]{c} = \frac{c}{z} - b.$$

Durch Elimination von z aus den beiden letzten Relationen erhalten wir die gesuchte kubische Gleichung

8) $$y^3-3(a+6\sqrt[3]{c})y^2+3(9\sqrt[3]{c^2}+3a\sqrt[3]{c}+a^2-9b)y-(a-3\sqrt[3]{c})^3 = 0.$$

Wenden wir auf diese dasselbe Schlussverfahren an, wie dies vorher für die Hauptgleichung geschehen ist, setzen also

$$\sqrt[3]{y'} = \sqrt[3]{y_1}+\sqrt[3]{y_2}+\sqrt[3]{y_3},$$

so resultirt die einfache Gleichung

$$y'^3-27\,ay'^2+27^2by'-27^3c = 0,$$

oder

$$\left(\frac{y'}{27}\right)^3 - a\left(\frac{y'}{27}\right)^2 + b\left(\frac{y'}{27}\right) - c = 0,$$

welche mit 1) in Uebereinstimmung ist, wenn

$$\frac{1}{27}y' = x$$

gesetzt wird.

Daher folgt auch

9) $$\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y_2}+\sqrt[3]{y_3} = 3\sqrt[3]{x_1}.$$

Die Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Mit jeder kubischen Gleichung

$$x^3-ax^2+bx-c = 0$$

ist eine zweite

$$y^3-3(a+6\sqrt[3]{c})y^2+(a^2-9b+3a\sqrt[3]{c}+9\sqrt[3]{c^2})y-(a-3\sqrt[3]{c})^3 = 0$$

verknüpft, deren Wurzeln durch die Relationen

$$\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_3}$$
$$3\sqrt[3]{x_1} = \sqrt[3]{y_1}+\sqrt[3]{y_2}+\sqrt[3]{y_3}$$

verbunden sind.

Hat man die Wurzel der transformirten Gleichung bestimmt, so ist auch eine Wurzel der Hauptgleichung bekannt.

Verschwindet das Absolutglied der transformirten, so reducirt

sich die Gleichung auf eine quadratische, deren Wurzeln, in die letzte Formel eingesetzt, die gesuchte der Hauptgleichung liefern.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich die Auflösung der Gleichung

10) $$X^3 - AX^2 + BX - C = 0,$$

wenn wir sie mittelst $X = x - z$ variiren und die Reducente $a^3 = 27c$ einführen.

Die variirte Gleichung führt auf

$$x^3 - (3z + A)x^2 + (3z^2 + 2Az + C)x - (z^3 + Az^2 + Bz + C) = 0.$$

Die Reducente

$$(32 + A)^3 = 27(z^3 + Az^2 + Bz + C)$$

aufgelöst, liefert die Unbekannte

11) $$z = -\frac{A^3 - 27A}{9(A^2 - 3B)},$$

und die Gleichung für y wird

$$y^2 - 9(3z + A)y + 9(A^2 - 3B) = 0.$$

Daher ist

$$3\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2}$$

oder wegen

$$x = X + z$$

12) $$3\sqrt[3]{X - \frac{A^3 - 27C}{9(A^2 - 3B)}} = \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2}.$$

Demnach sind nur noch die Wurzeln $y_1 y_2$ zu bestimmen. Sie sind

13)
$$y = \frac{3(2A^3 - 9AB + 27C) \pm 9\sqrt{3(-A^2B^2 + 4A^3C + 27C^2 + 4B^3 - 18ABC}}{2(A^2 - 3B)}.$$

Die eine Wurzel der Gleichung

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

ist demnach durch folgende Relation bestimmt:

14) $$\sqrt[3]{x - \frac{a^3 - 27c}{9(a^2 - 3b)}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{2a^3 - 9ab + 27c + 3\sqrt{3(-a^2b^2 + 4a^3c + 27c^2 + 4b^3 - 18abc}}{18(a^2 - 3b)}}$$

$$+ \sqrt[3]{\frac{2a^3 - 9ab + 27c - 3\sqrt{3(-a^2b^2 + 4a^3c + 27c^2 + 4b^3 - 18abc}}{18(a^2 - 3b)}}$$

und kann durch einfache Umwandlung auf die Form gebracht werden, welche in der Theorie bekannt ist.

Im Anschluss an das Vorige wollen wir noch einige symmetrische Gleichungssysteme für die biquadratischen Gleichungen aufstellen, welche sich auf die Wurzeltypen ihrer Resolventen beziehen.

Es liege demnach vor die Gleichung

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0.$$

Die Resolvente für den Wurzeltypus

$$z = x_1x_2 + x_3x_4$$

ist bekanntlich

$$z^3 - bz^2 + (ac - 4d)z - (a^2d - 4bd + c^2) = 0.$$

Führen wir nun ein

$$\sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2} + \sqrt[3]{z_3} = \sqrt[3]{y},$$

so würde analog dem früheren die Gleichung für y

$$y^3 - 3(b + 6\sqrt[3]{(a^2d - 4bd + c^2)})y^2 - \ldots - (b - 3\sqrt[3]{(a^2d - 4bd + c^2)}) = 0$$

sein. Ist nun ihr Absolutglied = Null, so verschwindet auch die Wurzel y, weshalb für jede biquadratische Gleichung die Relation

$$\sqrt[3]{x_1x_2 + x_3x_4} + \sqrt[3]{x_1x_3 + x_2x_4} + \sqrt[3]{x_1x_4 + x_2x_3} = 0$$

besteht, wenn die Constanten der Bedingung genügen

$$(\tfrac{1}{3}b)^3 = a^2d - 4bd + c^2.$$

In ähnlicher Art können die übrigen bekannten Resolventen verwertet werden.

Ein anderer Weg, symmetrische Functionen zu erhalten, die frei sind von Bedingsgleichungen, ist der nachfolgende:

In der Hauptgleichung sei c und also eine Wurzel $x = 0$.

Die transformirte wird dann

$$y^3 - 3ay^2 + 3(a^2 - 9b)y - a^3 = 0,$$

$$\sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2} + \sqrt[3]{y_3} = 0.$$

Die Gleichung kann auf die Form

$$(y - a)^3 = 27by$$

gebracht werden. Setzen wir

$$y - a = z,$$

also

$$z^3 - 27bz - 27ab = 0,$$

so ist damit

$$\sqrt[3]{z_1 + a} + \sqrt[3]{z_2 + a} + \sqrt[3]{z_3 + a} = 0$$

verknüpft, so dass, wenn letztere Gleichung auf die bekannte typische Form gebracht wird

$$z^3 - pz - q = 0$$

und

$$a = \frac{p}{q}$$

ist, allgemein für die Gleichungen die Relation

$$\sqrt[3]{z_1 + \frac{q}{p}} + \sqrt[3]{z_2 + \frac{q}{p}} + \sqrt[3]{z_3 + \frac{q}{p}} = 0$$

gültig ist.

Diese Formeln wollen wir zur Darstellung der oben erwähnten Functionen benutzen.

Der allgemeine Gang ist nun wie folgt vorgezeichnet:

Man wähle für die Gleichung 4. Grades

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$$

einen beliebigen Wurzeltypus

$$z = f(x).$$

Dann sind die z Wurzeln einer Resolvente vom 3. Grade

$$z^3 - Az^2 + Bz - C = 0$$

welche wir durch Einführung von $z = u + \frac{A}{3}$ zu einer reducirten

$$u^3 - Pu - Q = 0$$

umgestalten, und demnach auch, wie oben bewiesen, mit ihren Wurzeln durch die Relation

$$\sqrt[3]{u + \frac{Q}{P}} + \sqrt[3]{u + \frac{Q}{P}} + \sqrt[3]{u + \frac{Q}{P}} = 0$$

verknüpft ist. Da aber

$$u = z - \frac{A}{3} = f(x) - \frac{A}{3}$$

ist, so geht eine allgemeine, auf sämtliche Wurzeln x der Hauptgleichung sich beziehende Wurzelrelation von der Form

$$\sqrt[3]{f(x)_1 + M} + \sqrt[3]{f(x)_2 + M} + \sqrt[3]{f(x)_3 + M} = 0$$

hervor.

Da die Ableitungen dieser Art leicht dargestellt werden können, wollen wir die in der Theorie der Gleichungen eine besondere Rolle spielenden Wurzeltypen

$$z = x_1 + x_2 - x_3 - x_4,$$
$$z = x_1 x_2 + x_3 x_4,$$
$$z = x_1 x_2 - x_3 x_4,$$
$$z = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$

auswählen und deren symmetrische Wurzelrelationen summarisch niederschreiben.

Sie sind:

$$\Sigma \sqrt[3]{(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 - \frac{1}{9} \frac{(3a^2 - 8b)^3 - 27(a^3 - 4ab + 8c)^2}{16(b^2 - 3ac + 12d)}} = 0$$

$$\Sigma \sqrt[3]{x_1 x_2 + x_3 x_4 - \frac{1}{9} \frac{b^2 - 27(a^2 d - 4bd + c^2)}{b^2 - 3ac + 12d}} = 0$$

$$\Sigma \sqrt[3]{(x_1 x_2 - x_3 x_4)^2 + \frac{1}{9} \frac{(2ac - b^2 + 4d)^3 + 27(a^2 d - c^2)^2}{(2ac - b^2 + 4d)^2 - 3(a^2 c^2 - 2a^2 bd + 8acd - 2bc^2)}} = 0$$

$$\Sigma \sqrt[3]{(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) - \frac{1}{9} \frac{8b^3 + 27(a^2 d - abc + c^2)}{b^2 - 3ac + 12d}} = 0.$$

Sie können beliebig fortgesetzt werden, da noch eine zahlreiche Menge solcher Typen zur Verfügung steht.

VII.

Ueber die Grösse der Periode des Decimalbruchs gleich $1:p$, für p gleich einer der ersten 1500 Primzahlen.

Von

F. Kessler.

Die Burckhardt'schen Factorentafeln enthalten als Anhang zum ersten Bande *) eine Tabelle, welche zu einer Reihe von Primzahlen p die Grösse der Periode P des Decimalbruchs angiebt, der gleich $\frac{1}{p}$ ist. Wird diese Tabelle bisweilen gebraucht, so möchte es auch Manchen erwünscht sein, dieselbe erweitert zu sehen. Berichtigt zu werden, verdient sie ohnehin.

Die B. Tabelle führt nämlich zunächst ohne Unterbrechung die ersten 372 Primzahlen — bis 2543 — auf und reicht mit 22 weiteren oder im ganzen mit 394 Primzahlen bis zur 1221 ten, d. i. 9901 Zur Vollständigkeit müsste also bis dahin noch über die doppelte Menge der behandelten Zahlen eingefügt werden. Sodann finden sich folgende neun Fehler. Es ist für die

Primzahlen	$p=911$,	1213,	1597,	1831,	1951,	1993,	2311,	2437,	3467
angeblich	$P=450$,	1212,	266,	915,	390,	1992,	462,	2436,	3466
wirklich	$P=455$,	202,	133,	305,	195,	664,	231,	1218,	1733

Dies sind bis auf den ersten Fehler keine Versehen des Setzers, sondern des Berechners. Denn die angegebene Periode ist stets ein

---

*) Table des diviseurs pour tous les nombres du premier million etc. par J. Chr. Burckhardt. Paris 1817, S. 114.

Vielfaches der wahren, fünfmal das Doppelte, zweimal das Dreifache, einmal das Sechsfache. Man sieht wie leicht, auch in welchem Sinne vorzugsweise bei solchen Bestimmungen geirrt wird. Damit man nun nicht argwöhne, dass der von mir berechnete, hier jedoch nur auszugsweise darstellbare Gang dieser Function in gleichem Grade ungenau sei wie die B. Tabelle, möchte ich die Methode, nach der die Periodzahlen berechnet und die Resultate controllirt wurden, so elementar dies auch ist, beschreiben.

Soll die einer bestimmten Primzahl p entsprechende Periode P gefunden werden, so verzeichnet man zunächst alle Teiler von $p-1$ und sucht die Reste, welche die nämlichen Potenzen von 10, durch p geteilt, lassen, bis man zum Rest Eins gelangt. Die Reste werden bezeichnet durch den eingeklammerten Exponenten der Potenz von 10, aus der sie geblieben sind. Ist hiernach (a) der Rest aus 10^a, (b) der Rest aus 10^b, so wird, wie bekannt $(a+b)$, d. h. der Rest aus 10^{a+b} oder aus $10^a \times 10^b$ gleich dem Rest aus dem Producte $(a) \times (b)$ sein. Indem man also zwei Reste mit einander multiplicirt oder einen Rest potenzirt und von dem Producte wieder den Rest sucht, findet man aus Resten niederer Potenzen von 10 solche von höheren. Analog kann man auch von höheren Resten zu niederen mittelst Division herabgehen, wozu indessen meistens eine Zusatzrechnung erfordert wird, deren Umständlichkeit diesen Weg nicht besonders empfehlenswert macht. Hat man zuletzt den Rest Eins erreicht, so wird aber dessen Nummer nur sicher die Periodzahl P sein, wenn man unterwegs keinen Rest, dessen Nummer ein Teiler jener ist, übergangen hat.

Die Rechnungen kürzen sich etwas, wenn man nur solche Reste unmittelbar benutzt, die kleiner als $\frac{1}{2}p$ sind, grössere aber von p substrahirt und die erlangte Differenz, negativ genommen, anstatt jener einsetzt. Bei genauer Beachtung der Vorzeichen bietet dieses Verfahren noch einen besonderen Vorteil, wenn p von der Form $6n+1$ ist, also Reihen von Teilern der Form a, $2a$, $4a$, ..., $3a$, $6a$, $12a$, ..., mindestens zwei Glieder jeder Reihe vorhanden sind. Auch wenn alsdann P in der zweiten Reihe liegt, so genügt es doch, nur die der ersten Reihe entsprechenden Reste zu berechnen. Denn es muss in diesem Falle, wie sich leicht allgemein zeigen lässt, entweder, unter (a) den ersten Rest der ersten Reihe verstanden, bei dem ersten Quadriren $(2a) = -(a) - 1$ werden: dann ist $P = 3a$; oder man erhält, unter (a) irgend einen Rest der ersten Reihe verstanden, einmal $(2a) = (a) - 1$: demgemäss $P = 6a$. Dies möge an der für die B. Tabelle unrichtig berechneten, der Zahl $p = 2311$ [illegible]prechenden Periodzahl erläutert werden. Teiler von $p - 1$ sind

2310	770	330	110	210	70	30	10
1155	385	165	55	105	35	15	5
462	154	66	22	42	14	6	2
231	77	33	11	21	7	3	1

Unter diesen dürfen die rechts abgesperrten unberücksichtigt bleiben, da man die entsprechenden um Eins verminderten Potenzen von 10 schon in Primfactoren zerlegt hat, und keiner derselben gleich dem gegebenen p ist. Man findet also $(8) = +717$, $(17) = -97$, $(35) = -661$, $(70) = +142$, womit vermöge des oben erwähnten Satzes auch die Dreifachen (105), (210) erledigt sind. Ferner führen $(11) = +279$, $(22) = -733$, $(44) = +1137$, $(55) = +616$, $(110) = +452$ zum Ausschluss der Colonne (33) bis (330). Endlich gelangt man durch $(70) \times (7)$ auf $(77) = -883$, $(154) = +882$. Die beiden letzten Gleichungen genügen der Bedingung $(2a) = -(a) - 1$, geben also $P = 3 \times 77 = 231$. Zur Controlle liefert $(55) \times (2)$ den Rest $(57) = +797$, $(115) = -849$, $(231) = +1$, wonach dieses Resultat völlig gesichert ist.

Analog habe ich die Periodgrössen berechnet, welche den ersten 1500 Primzahlen, also bis $p = 12553$, entsprechen, nachdem ich zur Abkürzung der Hülfsoperationen zuvörderst eine Tafel der Quadrate der Grundzahlen bis 10000 construirt hatte, welche beim Operiren mit Resten beiderlei Vorzeichens direct auch weiter für alle $p < 20000$ verwendbar ist. Da die Mitteilung der erlangten Resultate jedoch den Raum vorliegender Zeitschrift über Gebühr in anspruch nehmen würde, so beschränke ich mich hier auf einige summarische Angaben, zunächst über die Verschiedenheit der Werte, welche der Quotient

$$Q = \frac{p-1}{P}$$

innerhalb des untersuchten Bereichs erlangt. Bis zur 1500ten Primzahl wird

$Q=$	1,	3,	5,	7,	9,	11,	13,	15,	17,	19,	21,	23,	25,	27
in	584,	98,	25,	12,	10,	3,	1,	4,	2,	0,	4,	1,	1,	1 Fällen

$Q=$	2,	4,	6,	8,	10,	12,	14,	16,	18,	20,	22,	24,	26,	28
in	438,	106,	70,	23,	21,	15,	11,	5,	11,	2,	1,	3,	1,	2 Fällen

*) Die Hülsse'sche Tafel reicht nur bis 1000, die Jahn'schen Tafeln gehen freilich weiter, sind aber sehr ungenau. So fand ich in den ersten 10000 Quadraten 46 fehlerhafte, in den Kubikzahlen ergab eine Seite, die Kuben der Zahlen 2660 bis 3009, also 350 Daten enthaltend, hiervon 32 falsch mit im Ganzen 55 falschen Ziffern.

Ferner erlangt Q je dreimal die Werte 30, 34, zweimal 36 und je einmal einen der folgenden

32, 33, 40, 42, 44, 46, 47, 54, 55, 56, 64, 67, 68, 70, 72, 76, 78,

82, 84, 90, 92, 98, 101, 110, 118, 130, 140, 146, 172, 177, 399, 664, 825, 909.

Ausserdem wird Q unendlich bei $p = 2$ und bei $p = 5$.

Also wird Q ungerade 755 mal, gerade 743 mal, unendlich 2 mal.

Zerlegt man die Reihe der ersten 1500 Primzahlen in sechs kleinere Gruppen I bis VI zu je 250 Zahlen, so wird

$Q=$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	>10 ungerade,	>10, gerade,	∞
in Grp. I	99,	77,	15,	14,	4,	12,	3,	2,	3,	3,	4,	12,	2mal
II	99,	69,	14,	17,	5,	12,	2,	6,	3,	4,	6,	13.	0 -
III	86,	80,	21,	19,	4,	12,	0,	5,	0,	2,	5,	16,	0 -
IV	102,	65,	14,	20,	4,	13,	5,	4,	1,	4,	3,	15,	0 -
V	88,	81,	21,	17,	2,	12,	1,	6,	1,	5,	4,	12,	0 -
VI	110,	66,	13,	19,	6,	9,	1,	0,	2,	3,	4,	17,	0 -
im ganzen	584,	438,	98,	106,	25,	70,	12,	23,	10,	21,	26	85,	2mal

Schliesslich mögen diejenigen Fälle einzeln genannt werden, in denen die Periodzahl relativ besonders klein, sage $P < Q^2$ ist, zwar mit Fortlassung der Daten, welche sich bereits in der Burkhardtschen Tabelle finden.

p	P	p	P	p	P	p	P	p	P	p	P
2689	42	4201	75	5051	50	6763	161	9689	346	11311	377
3061	204	4357	242	5171	110	7151	275	10037	386	11689	487
3109	148	4483	249	5237	77	7253	74	10271	79	11831	169
3121	156	4637	61	6163	79	7669	284	10837	63	11969	352
3187	177	4663	222	6299	94	7841	56	11071	369	12071	355
4003	87	4789	228	6397	78	9161	229	11087	482	12289	384
4013	34	4973	226	6481	270	9613	267	11161	310	12517	149

Für solche, die specielles Interesse an dem vorstehenden Thema nehmen sollten, habe ich ein vollständiges Verzeichniss der ersten 1500 p mit entsprechenden P und Q autographisch vervielfältigen lassen und erkläre mich bereit, derartige Exemplare auf Verlangen gratis und franco zu versenden.

Februar 1885.

Dr. F. Kessler,
Wiesbaden, Rheinstrasse 84.

VIII.

Miscellen.

1.

Ueber eine die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades umfassende Auflösungsmethode.

A. Die Gleichungen zweiten Grades mit einer Unbekannten.

Eine gemischte Gleichung zweiten Grades aufzulösen.

Die allgemeinste Form einer reducirten quadratischen Gleichung ist:

$$x^2 + 2ax = b.$$

Um die quadratische Ergänzung zu finden, vergleiche man die linke Seite der Gleichung mit der Formel

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

Man sieht, dass die quadratische Ergänzung a^2 ist. Man addire a^2 in obiger Gleichung auf beiden Seiten, und man erhält

$$x^2 + 2ax + a^2 \quad \text{oder} \quad (x+a)^2 = a^2 + b$$

oder, wenn man u statt $x+a$ setzt:

$$u^2 = a^2 + b \quad \text{u. s. w.}$$

B. Die Gleichungen dritten Grades mit einer Unbekannten.

Eine gemischte Gleichung dritten Grades aufzulösen.

Die allgemeinste Form einer vereinfachten kubischen Gleichung ist:

$$x^3 + 3ax^2 + bx = c.$$

Um die kubische Ergänzung zu finden, vergleiche man die linke Seite der Gleichung mit der Formel

$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

Man sieht, dass die kubische Ergänzung zu $x^3 + 3ax^2$ gleich $3a^2x + a^3$ ist. Man addire daher auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung a^3, und addire und subtrahire zugleich auf der linken Seite $3a^2x$, so ist

$$x^2 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + bx - 3a^2x = a^3 + c$$

oder

$$(x+a)^3 + (b - 3a^2)x = a^3 + c.$$

Um auf der linken Seite auch im zweiten Gliede den Factor $(x+a)$ zu erhalten, addire man auf beiden Seiten $(b - 3a^2)a$. Man erhält

$$(x+a)^3 + (b - 3a^2)(x+a) = ab - 2a^3 + c$$

oder, indem man y statt $x+a$, f statt $b - 3a^2$ und g statt $ab - 2a^3 + c$ setzt:

$$y^3 + fy = g.$$

Man führe für y zwei neue willkürliche Grössen u und v ein und setze $y = u + v$, so ist

I. $$(u+v)^3 + f(u+v) = g.$$

Es ist auch

$$(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v).$$

Um diese identische Gleichung mit der vorhergehenden conform zu machen, bringe man $3uv(u+v)$ auf die linke Seite, so hat man

II. $$(u+v)^3 - 3uv(u+v) = u^3 + v^3.$$

Man subtrahire II. von I., so ergiebt sich

$$(f + 3uv).(u+v) = g - (u^3 + v^3).$$

Verfügt man nun über die Grössen u und v noch so, dass

$$g = u^3 + v^3$$

ist, so resultirt

$$(f + 3uv).(u+v) = 0,$$

woraus, da $u+v$ nicht $= 0$ sein kann, folgt:

$$f + 3uv = 0.$$

C. **Die Gleichungen vierten Grades mit einer Unbekannten.**

Eine gemischte Gleichung vierten Grades aufzulösen.

Die allgemeinste Form einer vereinfachten biquadratischen Gleichung ist

$$x^4 + 4ax^3 + bx^2 + cx = d.$$

Um die biquadratische Ergänzung zu finden, vergleiche man die linke Seite mit der Formel

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4.$$

Man sieht, dass die biquadratische Ergänzung zu $x^4 + 4ax^3$ gleich $6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$ ist. Man addire daher auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung a^4, und addire und subtrahire zugleich auf der linken Seite $6a^2x^2$ und $4a^3x$, so ist:

$$x^4 + 4x^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 + bx^2 - 6a^2x^2 + cx - 4a^3x = a^4 + d$$

oder

$$(x+a)^4 + (b - 6a^2)x^2 + (c - 4a^3)x = a^4 + d.$$

Um auf der linken Seite auch im zweiten Gliede den Factor $(x+a)$ zu erhalten, addire man auf beiden Seiten $(b-6a^2)a^2$, und addire und substrahire zugleich auf der linken Seite $(b-6a^2).2ax$, so ist

$$(x+a)^4 + (b-6a^2).(x+a)^2 + (8a^3 - 2ab + c)x = a^2b - 5a^4 + d.$$

Um endlich auch links im dritten Gliede den Factor $(x+a)$ zu erhalten, addire man noch auf beiden Seiten $(8a^3 - 2ab + c).a$, so resultirt die Gleichung

$$(x+a)^4 + (b-6a^2)(x+a)^2 + (8a^3 - 2ab + c)(x+a) = 3a^4 - a^2b + ac + d.$$

Man setze y statt $x+a$, f statt $b-6a^2$, g statt $8a^3 - 2ab + c$ und h statt $3a^4 - a^2b + ac + d$, so ist

$$y^4 + fy^2 + gy = h.$$

Man führe für y drei neue willkürliche Grössen u, v und w ein und setze $y = u + v + w$, so erhält man

$$\text{I.} \quad (u+v+w)^4 + f(u+v+w)^2 + g(u+v+w) = h.$$

Es ist auch

$$(u+v+w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw)$$

oder

$$(u+v+w)^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(uv + uw + vw),$$

also

Die allgemeinste Form einer vereinfachten kubischen Gleichung ist:

$$x^3 + 3ax^2 + bx = c.$$

Um die kubische Ergänzung zu finden, vergleiche man die linke Seite der Gleichung mit der Formel

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3.$$

Man sieht, dass die kubische Ergänzung zu $x^3 + 3ax^2$ gleich $3a^2x + a^3$ ist. Man addire daher auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung a^3, und addire und subtrahire zugleich auf der linken Seite $3a^2x$, so ist

$$x^2 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 + bx - 3a^2x = a^3 + c$$

oder

$$(x + a)^3 + (b - 3a^2)x = a^3 + c.$$

Um auf der linken Seite auch im zweiten Gliede den Factor $(x + a)$ zu erhalten, addire man auf beiden Seiten $(b - 3a^2)a$. Man erhält

$$(x + a)^3 + (b - 3a^2)(x + a) = ab - 2a^3 + c$$

oder, indem man y statt $x + a$, f statt $b - 3a^2$ und g statt $ab - 2a^3 + c$ setzt:

$$y^3 + fy = g.$$

Man führe für y zwei neue willkürliche Grössen u und v ein und setze $y = u + v$, so ist

I. $$(u + v)^3 + f(u + v) = g.$$

Es ist auch

$$(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v).$$

Um diese identische Gleichung mit der vorhergehenden conform zu machen, bringe man $3uv(u + v)$ auf die linke Seite, so hat man

II. $$(u + v)^3 - 3uv(u + v) = u^3 + v^3.$$

Man subtrahire II. von I., so ergiebt sich

$$(f + 3uv).(u + v) = g - (u^3 + v^3).$$

Verfügt man nun über die Grössen u und v noch so, dass

$$g = u^3 + v^3$$

ist, so resultirt

$$(f + 3uv).(u + v) = 0,$$

woraus, da $u + v$ nicht $= 0$ sein kann, folgt:

$$f + 3uv = 0.$$

C. Die Gleichungen vierten Grades mit einer Unbekannten.

Eine gemischte Gleichung vierten Grades aufzulösen.

Die allgemeinste Form einer vereinfachten biquadratischen Gleichung ist

$$x^4 + 4ax^3 + bx^2 + cx = d.$$

Um die biquadratische Ergänzung zu finden, vergleiche man die linke Seite mit der Formel

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4.$$

Man sieht, dass die biquadratische Ergänzung zu $x^4 + 4ax^3$ gleich $6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$ ist. Man addire daher auf beiden Seiten der gegebenen Gleichung a^4, und addire und subtrahire zugleich auf der linken Seite $6a^2x^2$ und $4a^3x$, so ist:

$$x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 + bx^2 - 6a^2x^2 + cx - 4a^3x = a^4 + d$$

oder

$$(x+a)^4 + (b-6a^2)x^2 + (c-4a^3)x = a^4 + d.$$

Um auf der linken Seite auch im zweiten Gliede den Factor $(x+a)$ zu erhalten, addire man auf beiden Seiten $(b-6a^2)a^2$, und addire und substrahire zugleich auf der linken Seite $(b-6a^2).2ax$, so ist

$$(x+a)^4 + (b-6a^2).(x+a)^2 + (8a^3 - 2ab + c)x = a^2b - 5a^4 + d.$$

Um endlich auch links im dritten Gliede den Factor $(x+a)$ zu erhalten, addire man noch auf beiden Seiten $(8a^3 - 2ab + c).a$, so resultirt die Gleichung

$$(x+a)^4 + (b-6a^2)(x+a)^2 + (8a^3 - 2ab + c)(x+a) = 3a^4 - a^2b + ac + d.$$

Man setze y statt $x+a$, f statt $b-6a^2$, g statt $8a^3 - 2ab + c$ und h statt $3a^4 - a^2b + ac + d$, so ist

$$y^4 + fy^2 + gy = h.$$

Man führe für y drei neue willkürliche Grössen u, v und w ein und setze $y = u + v + w$, so erhält man

$$\text{I.} \quad (u+v+w)^4 + f(u+v+w)^2 + g(u+v+w) = h.$$

Es ist auch

$$(u+v+w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2(uv + uw + vw)$$

oder

$$(u+v+w)^2 - (u^2 + v^2 + w^2) = 2(uv + uw + vw),$$

also

$$(u+v+w)^4-2(u^2+v^2+w^2)(u+v+w)^2+(u^2+v^2+w^2)^2=$$
$$4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)+8uvw(u+v+w)$$

oder, indem man diese Gleichung mit I. conform macht:

$$\text{II.}\quad (u+v+w)^4-2(u^2+v^2+w^2)(u+v+w)^2-8uvw(u+v+w)=$$
$$4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)-(u^2+v^2+w^2)^2.$$

Subtrahirt man II. von I., so ist

$$[f+2(u^2+v^2+w^2)](u+v+w)^2+(g+8uvw)(u+v+w)=$$
$$h-[4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)-(u^2+v^2+w^2)^2]$$

Man verfüge nun über u, v und w so, dass

$$h=4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)-(u^2+v^2+w^2)^2,$$

dann ist

$$[f+2(u^2+v^2+w^2)](u+v+w)+g+8uvw=0.$$

Man verfüge weiter über u, v und w so, dass auch $g+8uvw=0$, dann ist

$$(f+2(u^2+v^2+w^2))(u+v+w)=0,$$

woraus folgt, dass, da $u+v+w$ nicht $=0$ sein kann,

$$f+2(u^2+v^2+w^2)=0$$

sein muss.

Demnach hat man zur Bestimmung von u, v und w das System:

$$\left.\begin{aligned} 4(u^2v^2+u^2w^2+v^2w^2)-(u^2+v^2+w^2)^2 &= h \\ 8uvw &= -g \\ u^2+v^2+w^2 &= -\frac{f}{2} \end{aligned}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{aligned} u^2+v^2+w^2 &= -\frac{f}{2} \\ u^2v^2w^2 &= \frac{g^2}{64} \\ u^2v^2+(u^2+v^2)w^2 &= \frac{1}{4}\left(\frac{f^2}{4}+h\right) \end{aligned}\right\}$$

u. s. w.

Sprottau, Mai 1885. Dr. H. am Ende.

2.

Bemerkung zur Descartes'schen Auflösung der biquadratischen Gleichung.

Soll die linke Seite der Gleichung

$$1)\qquad x^4+ax^2+bx+c=0$$

gleich dem Producte

$$2)\qquad (x^2+px+q)(x^2-px+q')$$

sein, so ergeben sich für q, q', p folgende Relationen:

$$3)\qquad \begin{cases} q = \frac{1}{2}\left(a+p^2+\frac{b}{p}\right) \\ q' = \frac{1}{2}\left(a+p^2-\frac{b}{p}\right) \end{cases}$$

$$4)\qquad p^6+2ap^4+(a^2-4c)p^2-b^2=0.$$

Man erhält mithin die 4 Wurzeln x_1, x_2, x_3, x_4 der Gleichung 1) dargestellt durch eine Wurzel der Resolvente 4).

Bezeichnet man die 3 Werte von p^2, welche dieser Resolvente genügen, durch p_1^2, p_2^2, p_3^2 und die zugehörigen Werte von q und q' durch q_1, q_2, q_3 und q_1', q_2', q_3', so erhält man für 2) die 3 Producte

$$2a)\qquad (x^2+p_1x+q_1)(x^2-p_1x+q_1')$$

$$2b)\qquad (x^2+p_2x+q_2)(x^2-p_2x+q_2')$$

$$2c)\qquad (x^2+p_3x+q_3)(x^2-p_3x+q_3').$$

Dass nun jedes dieser 3 Producte durch weitere Zerlegung dieselben 4 linearen Factoren und daher dieselben 4 Wurzeln der vorgelegten Gleichung 1) ergeben m u s s, so dass die 3 Zerlegungen nur die 3 möglichen Zusammenstellungen der 4 Wurzeln zu 2 Paaren

$$x_1x_2,\quad x_3x_4$$
$$x_1x_3,\quad x_2x_4$$
$$x_1x_4,\quad x_2x_3$$

darstellen, ist einleuchtend, da jedes der 3 Producte 2a), 2b), 2c) gleich der linken Seite der Gleichung 1) sein muss; trotzdem scheint mir die Bestätigung, dass dies auch wirklich stattfindet, aus pädagogischem Interesse nützlich zu sein, da die Lösung der Gleichung 3ten Grades durch die Cardani'sche Formel den Anfänger leicht zu einer falschen Auffassung verleiten kann.

Soll nun z. B. 2a) dieselben 4 Wurzeln ergeben wie 2b), so muss jeder der beiden quadratischen Factoren von 2a) mit jedem quadratischen Factor von 2b) einen linearen Factor oder es müssen z. B. die Gleichungen

$$x^2 + p_1 x + q_1 = 0$$
$$x^2 + p_2 x + q_2 = 0$$

eine Wurzel gemeinsam haben. Es ist also zu zeigen, dass die Eliminationsresultante

$$5)\qquad (pq_2 - p_2 q_1)(p_1 - p_2) + (q_1 - q_2)^2 = 0$$

erfüllt ist (ihre Bedeutung und Herleitung lässt sich ja elementar herstellen).

Ersetzt man in ihr nun q_1, q_2 durch ihre Ausdrücke aus den Gleichungen 3), so erhält man:

$$6)\qquad 2a + p_1^2 + p_2^2 + \frac{b^2}{p_1^2 p_2^2} = 0.$$

Da diese Gleichung nur die Quadrate von p_1, p_2 enthält, so ändert sie sich nicht, wenn $-p_1$ für p_1, oder $-p_2$ für p_2 gesetzt wird; sie ist daher gleichzeitig die Bedingung, dass jeder der beiden quadratischen Factoren von 2a) mit jedem quadratischen Factor von 2b) einen linearen Factor gemeinsam haben.

Nun bestehen aber für die 3 Wurzeln p_1^2, p_2^2, p_3^2 der Gleichung 3) die Relationen:

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = -2a$$
$$p_1^2 p_2^2 p_3^2 = b^2;$$

in folge derselben ist 6) identisch erfüllt.

Berlin, Mai 85. C. Weltzien.

3.

Neue Construction von Kegelschnittslinien aus zwei conjugirten Durchmessern.

Es seien $AB = 2a$ und $CD = 2b$ die Achsen einer Ellipse. Nimmt man diese als Coordinatenachsen an, so hat AC die Gleichung

$$ay - bx = ab, \quad BC \ldots ay + bx = ab.$$

Haben die Punkte M (in AC) und N (in BC) dieselbe Abscisse $OQ = m$, so müssen ihre Ordinaten

$$QM = \frac{b}{a}(a + m) \quad \text{und} \quad QN = \frac{b}{a}(a - m)$$

sein; demnach lautet die Gleichung der Geraden BM

$$\frac{y}{a - x} = \frac{b(a + m)}{a(a - m)},$$

die der Geraden AN

$$\frac{y}{a + x} = \frac{b(a - m)}{a(a + m)}$$

und ihr Schnittpunkt P hat die Coordinaten

$$x = \frac{2a^2 m}{a^2 + m^2}, \quad y = \frac{b(a^2 - m^2)}{a^2 + m^2}.$$

Diese Werte genügen der Gleichung

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

(die Gleichung wird auch als Product von BM und AN erhalten), folglich liegt der Punkt P auf der Ellipse, welche AB und CD zu Achsen hat. Die Gleichung der Ellipsentangente im Punkte C hat die Form

$$2bmx + (a^2 - m^2)y = b(a^2 + m^2)$$

und wird durch ($x = m$, $y = b$) erfüllt; die Tangente geht also durch den Punkt L, in welchem die Gerade MN die zu AB Parallele durch C trifft.

Wären AB und CD nicht Achsen, sondern conjugirte Durchmesser der Ellipse, so könnte man diese zu Coordinaten-Achsen wählen, die Rechnung so wie oben durchführen und würde dasselbe Resultat erhalten. Man kann deshalb eine Ellipse aus den Achsen oder conjugirten Durchmessern AB, CD construiren, indem man AC, BC, dann $CF \parallel AB$ zieht und diese Geraden durch beliebige zu CD Parallele resp. in M, N und L schneidet. BM und AN treffen sich dann in einem Ellipsenpunkte P, dessen Tangente durch L geht.

Aehnlich lässt sich folgende Construction der Hyperbel aus den conjugirten Durchmessern AB und CD nachweisen.

Sind AB und CD conjugirte Durchmesser einer Hyperbel, und werden die Geraden AD, BC und die zu ihnen parallele Asymptote durch beliebige zu CD Parallele resp. in M, N und L geschnitten, so treffen sich AN und BM in einem Hyperbelpunkte P, dessen Tangente durch L geht.

Je nachdem AB und CD Achsen oder conjugirte Durchmesser der Hyperbel sind, wird man ein recht- oder schiefwinkliges Coordinatensystem annehmen und erhält als Gleichung für BC

$$ay + bx = ab,$$

für die Asymptote EOG

$$ay + bx = 0,$$

für AD

$$ay + bx = -ab.$$

Ist $x = OQ = m$, so hat man

$$QN = \frac{b}{a}(a - m), \quad QL = -\frac{b}{a}m, \quad QM = -\frac{b}{a}(a + m)$$

und für AN die Gleichung

$$\frac{y}{x + a} = \frac{b(a - m)}{a(a + m)},$$

für BM

$$\frac{y}{x - a} = \frac{b(a + m)}{a(a - m)}.$$

Diese Geraden schneiden sich in einem Punkte P mit den Coordinaten

$$x = \frac{a^2 + m^2}{2m}, \quad y = \frac{b(a^2 - m^2)}{2am},$$

welche der Gleichung

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

genügen, weshalb P auf der Hyperbel mit den Achsen oder conjugirten Durchmessern $AB = 2a$, $CD = 2b$ liegen muss.

Die Gleichung der Hyperbeltangente im Punkte P

$$b(a^2 + m^2)x - a(a^2 - m^2)y = 2a^2bm$$

wird identisch für

$$x = m, \quad y = -\frac{b}{a}m$$

d. h. diese Tangente geht durch den Punkt L.

Es braucht wol kaum erwähnt zu werden, dass man bei beiden Constructionen die Punkte A und B, sowie C und D vertauschen kann.

Pola, im Juli 1885.

Franz Schiffner
k. k. Prof.

4.

Regelmässiger linear begrenzter Winkel von vier Dimensionen.

Nimmt man ein regelmässiges Polyeder V zur Basis einer vierdehnigen Pyramide von der Höhe h, deren Spitze A auf dem, im Mittelpunkte B auf dem Raume von V errichteten Lote liegt, so ist der vierdehnige Winkel an der Spitze derjenige, welchen wir einen regelmässigen nennen. Nach T. LXVI. S. 448. ist seine Grösse

$$W = h\int \frac{\partial V}{r^4}$$

wo r den Radiusvector des Elements ∂V von der Spitze aus bezeichnet.

Ein passendes Coordinatensystem erhalten wir. wenn wir aus B ein Lot $BC = a$ auf eine Seitenfläche F, dann aus deren Mittelpunkt C ein Lot $CD = b$ auf eine Kante $K = 2c$ fällen und die Axen vom Anfangspunkt A aus in den 4 orthogonalen Richtungen AB, BC, CD und K nehmen. Dann sind h, a, b, c die Coordinaten einer Ecke von V.

Ein regelmässige Gebilde contrahiren heisse: mit Erhaltung des Mittelpunkts ein ähnliches in gleicher Stellung construiren. Contrahirt man V, F, K in den Verhältnissen $1:x$, $1:y$, $1:z$, so wird der Endpunkt von K ein beliebiger Punkt P im Raume P, welcher V erzeugt, wenn x, y, z von 0 bis 1 variiren. Nach Contraction sind die Coordinaten von P

$$h, \quad ax, \quad bxy, \quad cxyz$$

Das Körperelement ist ein Product ihrer Differentiale

$$a\,\partial x, \quad bx\,\partial y, \quad cxy\,\partial z$$

und einer Constanten, also

$$\partial V = 6Vx^2y\,\partial x\,\partial y\,\partial z$$
$$r^2 = h^2 + a^2x^2 + b^2x^2y^2 + c^2x^2y^2z^2$$

Integrirt man erst nach y, dann nach z, so kommt:

$$\int_0^1 \frac{y\,\partial y}{r^4} = \frac{1}{2(h^2+a^2x^2)\left[h^2+(a^2+b^2)x^2+c^2x^2z^2\right]}$$

$$\int_0^1 \partial z \int_0^1 \frac{y\,\partial y}{r^4} = \frac{1}{2cx(h^2+a^2x^2)\sqrt{h^2+(a^2+b^2)x^2}}\operatorname{arctg}\frac{cx}{\sqrt{h^2+(a^2+b^2)x^2}}$$

Führt man dies ein und setzt

$$x=\frac{h}{a}\sqrt{\frac{b^2\operatorname{tg}^2\varphi-a^2}{a^2+b^2}};\quad \frac{a}{b}=\operatorname{tg}\alpha;\quad \frac{a}{b}\sqrt{1+\frac{a^2+b^2}{h^2}}=\operatorname{tg}\beta$$

so findet man:

$$W=\frac{3V}{abc}\int\limits_\alpha^\beta\partial\varphi\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{c}{b}\sqrt{\frac{b^2-a^2\cot^2\varphi}{a^2+b^2}}\right)$$

Insbesondere ist hiernach für das

$$\text{Tetraeder } W=12\int\limits_\alpha^\beta\partial\varphi\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{2-\cot^2\varphi}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}};\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{1}{8h^2}}$$

$$\text{Hexaeder } W=24\int\limits_\alpha^\beta\partial\varphi\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{1-\cot^2\varphi}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=1;\quad \operatorname{tg}\beta=\sqrt{1+\frac{1}{2h^2}}$$

$$\text{Oktaeder } W=24\int\limits_\alpha^\beta\partial\varphi\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{1-2\cot^2\varphi}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2};\quad \operatorname{tg}\beta=\sqrt{2+\frac{1}{2h^2}}$$

$$\text{Dodekaeder } W=60\int\limits_\alpha^\beta\partial\varphi\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\cot^2\varphi}\right)$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{5}+1}{2};\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4h}\right)^2}$$

$$\text{Ikosaeder } W=60\int\limits_\alpha^\beta\partial\varphi\operatorname{arc}\operatorname{tg}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cot^2\varphi}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3+\sqrt{5}}{2};\quad \operatorname{tg}\beta=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4h}\right)^2}$$

wo h in Einheiten gleich der Kante gemessen ist. Es ist zu bemerken, dass allein die obere Grenze von der einzig variabeln Grösse h abhängt, die W also Werte einer Integralfunction sind.

R. Hoppe.

IX.

Ueber die Curven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten.

Von

P. H. Schoute.

Zweiter Abschnitt.

(Quadratische Transformation, Zurückführung der zu betrachtenden Curven auf Kegelschnitte, Wendeschnitt und Rückkehrschnitt, Normalcurven erster und zweiter Gattung).

15. „Abgesehen von Realitätsunterschieden giebt es zwei verschiedene Arten von involutorischen quadratischen Transformationen, welche ich als regelmässige und unregelmässige Art einander gegenüber stelle. In der regelmässigen Art entsprechen den drei Fundamentalpunkten A, B, C die Gegenseiten BC, CA, AB des von ihnen gebildeten Dreiecks; in der unregelmässigen Art gehen die den Fundamentalpunkten A und B entsprechenden Geraden AC und BC durch diese Punkte selbst, und entspricht nur dem dritten Fundamentalpunkt C die Gegenseite des Dreiecks ABC. In der regelmässigen Art entspricht einem Strahle durch einen Fundamentalpunkt immer wieder ein Strahl durch den nämlichen Fundamentalpunkt und bilden die einander entsprechenden Strahlen durch diesen Fundamentalpunkt eine quadratische Strahleninvolution; in der unregelmässigen Art entsprechen den Strahlen durch A Strahlen durch B, umgekehrt den Strahlen durch B Strahlen durch A und die Strahlen durch C sich selbst. Die regelmässige Art enthält vier

sich selbst entsprechende Punkte S, welche die Eckpunkte sind eines vollkommenen Vierecks mit den Fundamentalpunkten der Transformation zu Schnittpunkten der Gegenseitenpaare; die unregelmässige Art enthält unendlich viel sich selbst entsprechende Punkte, welche einen Kegelschnitt erfüllen, der AC in A und BC in B berührt".

Bekanntlich hat jede involutorische quadratische Transformation[1]) drei Fundamentalpunkte A, B, C, von welchen jeder nicht einem einzigen Punkte, sondern allen Punkten einer Geraden entspricht. Dabei sind dann diese Fundamentalgeraden allemal die Seiten des Dreiecks ABC. Dieses einander Entsprechen von Eckpunkten und Seiten des Dreiecks ABC kann aber auf zwei verschiedene Weisen Statt finden. Entweder es entspricht jedem Eckpunkte die gegenüberliegende Seite des Dreiecks; oder aber es ereignet sich nur einmal, dass einem Eckpunkte C die gegenüberliegende Seite AB des Dreiecks entspricht, indem den anderen Eckpunkten A und B die durch diese Punkte gehenden Seiten des Dreiecks entsprechen. Denn der involutorische Charakter der Transformation widersteht der sonst bei quadratischen Transformationen in zwei zusammengefallenen Ebenen möglichen Anordnung, wobei den Punkten A, B, C nach einander die Seiten AB, BC, CA entsprechen. Ist nun die bekannte Transformation mittelst symmetrischer Strahlentripel[2]), d. h. die hyperbolisch gleichseitige Transformation[3]) ein einfaches Beispiel der Transformation erster Art, so giebt die Verwandtschaft der Punkte P und P', welche auf Geraden durch einen festen Punkt C einander conjugirt sind in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt K, ein übersichtliches Beispiel der Transformationen zweiter Art; dabei treten dann die Berührungspunkte A und B der aus C an K möglichen Tangenten neben C als Fundamentalpunkte auf.

Durch die Anweisung der den Fundamentalpunkten A, B, C entsprechenden Seiten des Dreiecks ABC sind nun die oben im Satze

---

1) Hierbei setze ich Bekanntheit mit der involutorischen quadratischen Transformation voraus. Einige Andeutungen zu einer elementar-geometrischen Behandlung dieser Theorie giebt Reye (I. Abteilung, Seite 169, Aufgabe 61—71). Es ist hier aber nicht die Stelle dieses bekannte Material weiter geometrisch zu verwerten.

2) Man vergleiche meine Notiz „Deux cas particuliers de la transformation birationnelle" (Bulletin des sciences mathém. et astron., 2e série, tome VI, 1882, page 152—169 et 174—189).

3) Man vergleiche über diese Bezeichnungsweise „Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften" von Dr. H. Schröter, Seite (Jacob Steiner's „Vorlesungen über synthetische Geometrie", zweiter Band).

weiter angeführten Eigenschaften von selbst bedingt. Entspricht erstens jedem Eckpunkte die Gegenseite, so wird einer Geraden durch irgend einen Fundamentalpunkt A eine andere Gerade durch diesen Punkt entsprechen, da diese mit der Gegenseite BC einen durch A, B, C gehenden Kegelschnitt bilden muss. Also entsprechen die Strahlen durch A einander involutorisch und kann dies ebenfalls von den Strahlen durch B und den Strahlen durch C behauptet werden. Und nun schneiden die Doppelstrahlen a_1 und a_2 der Involution um A die Doppelstrahlen b_1 und b_2 der Involution um B in vier sich selbst entsprechenden Punkten S, welche ebenfalls auf den zwei Doppelstrahlen der Involution um C liegen müssen und also die Eckpunkte sind eines vollkommenen Vierecks mit A, B, C als Schnittpunkte der Gegenseitenpaare.

Entspricht zweitens nur dem Punkte C die Gegenseite AB des Dreiecks, indem A und B die durch diese Punkte gehenden Seiten AC und BC zu Fundamentalgeraden haben, so entsprechen wieder die Strahlen durch C einander involutorisch, ist aber einer Geraden durch A eine Gerade durch B zugewiesen und umgekehrt. Ist dann a irgend eine Gerade durch A, b die ihr entsprechende Gerade durch B und P ihr Schnittpunkt, so entspricht P sich selbst; denn dem Schnittpunkte von a und b muss der Schnittpunkt von b und a entsprechen. Da aber die Büschel a und b projectivisch verwandt sind — denn irgend einem Strahle durch A entspricht ein einziger und bestimmter Strahl durch B und umgekehrt — so ist der Ort der Schnittpunkte der einander entsprechenden Strahlen dieser Büschel, d. h. der Ort der sich selbst entsprechenden Punkte S ein durch C und B gehender Kegelschnitt; dieser Kegelschnitt berührt in A und B die Geraden AC und BC, da AC im Büschel um A und BC im Büschel um B der Verbindungslinie AB der Scheitel entspricht. Und es versteht sich, dass die Existenz einer Curve von sich selbst entsprechenden Punkten S nun auch die Strahleninvolution um C als eine Strahleninvolution mit einer unendlichen Anzahl von Doppelstrahlen kennzeichnet; so dass wir den oben als Beispiel vorgeführten Fall als die allgemeinste Transformation zweiter Art anerkennen müssen. Also ist diese Transformation die Verwandtschaft der einander in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt conjugirten Punkte von den Geraden durch einen festen Punkt C; denn es sind die Schnittpunkte von irgend einer Geraden durch C mit dem Kegelschnitte der Punkte S die Doppelpunkte der auf diesen Geraden gelegenen involutorischen quadratischen Punktinvolution.

Tritt bei der Transformation zweiter Art ein Kegelschnitt von Punkten S auf, so ist bekanntlich die Transformation erster Art mit einem Kegelschnittbüschel in Verbindung zu bringen. Liegen näm-

lich zwei gegebene Kegelschnitte K_1 und K_2 vor, so kann man jedem Punkte P ihrer Ebene den Schnittpunkt P' der Polaren p_1 und p_2 von P in Bezug auf K_1 und K_2 als zugeordneten Punkt zuweisen, wobei P' dann überhaupt allen Polaren p von P in Bezug auf die Kegelschnitte K des von K_1 und K_2 bestimmten Büschels gemeinsam ist [4]). Und diese involutorische Verwandtschaft der Punkte P und P' ist dann eine quadratische Transformation erster Art, welche die Eckpunkte und die gegenüberliegenden Seiten des den Kegelschnitten K des Büschels gemeinsamen Poldreiecks ABC zu Fundamentalpunkten und diesen Punkten entsprechenden Fundamentalgeraden und die Basispunkte des Büschels zu sich selbst entsprechenden Punkten S hat. So dass man von einer durch das Fundamentaldreieck ABC und ein Paar einander entsprechender Punkte P und P' bestimmten Transformation erster Art nur die vier Punkte S zu bestimmen hat um in diesen die Basispunkte des die Transformation bestimmenden Kegelschnittbüschels erblicken zu können.

Von der Transformation zweiter Art bildet die bekannte Verwandtschaft der reciproken Radien das einfachste Beispiel [5]). Von allen quadratischen Transformationen zweiter Art wird nur sie hier auftreten, im Folgenden unter quadratischer Transformation im allgemeinen eine Transformation erster Art zu verstehen sein.

16. „In jeder involutorischen quadratischen Transformation, deren Fundamentaldreieck ABC ein Poldreieck eines gegebenen Kegelschnittes K ist, entspricht diesem Kegelschnitte K eine Curve C^4 mit den drei doppelten Inflexionsknoten A, B, C. Und umgekehrt entspricht einer gegebenen Curve C^4 mit den drei Inflexionsknoten A, B, C in jeder involutorischen quadratischen Transformation mit A, B, C als Fundamentalpunkten ein Kegelschnitt, von welchem ABC ein Poldreieck ist".

Bei beliebiger Lage vom Kegelschnitte K in Bezug auf das Fundamentaldreieck ABC (Fig. 17.) entspricht dem Kegelschnitte K eine Curve C^4 vierter Ordnung mit den Doppelpunkten A, B, C [6]).

---

4) Es sind dies die oben angewiesenen Andeutungen zu einer elementar geometrischen Behandlung der Theorie der involutorischen quadratischen Transformationen von Reye.

5) Man vergleiche Reye, a, a. O., 1. Abteilung, Seite 170, Aufgabe 65—79, und „Einleitung in die synthetische Geometrie" von C. F. Geiser, Seite 159—183.

6) Eine ausgezeichnete Uebersicht der Theorie der von Cremona herrührenden birationellen Verwandtschaft giebt Dewulf in seinem „Sur les transformations géométriques des figures planes" (Bulletin des sciences mathém. et tron. 1e. Série, tome V, 1872, page 206—240).

Denn es ist A ein Doppelpunkt der dem Kegelschnitte K entsprechenden Curve, da die Fundamentalgerade BC von A diesen Kegelschnitt in zwei von B und C verschiedenen Punkten A_1 und A_2 schneidet. Und jede Gerade a' durch B schneidet diese Curve ausser A noch in zwei andern Punkten P_1' und P_2', da die entsprechende Gerade a durch A zwei nicht auf BC liegende Punkte P_1 und P_2 mit K gemein hat. Aber in diesem Falle sind die Doppelpunkte A, B, C der C^4 Doppelpunkte ordentlicher Art. Denn, da die Verbindungslinien AA_1 und AA_2 den Kegelschnitt noch in den von A_1 und A_2 verschiedenen Punkten Q_1 und Q_2 schneiden, so trifft jede der beiden Doppelpunkttangenten von C^4 in A diese Curve noch in einem nicht mit A zusammenfallenden Punkte, hat sie also wie eine gewöhnliche Doppelpunkttangente in A drei Punkte mit C^4 gemein.

Ist aber ABC ein Poldreieck von K (Fig. 18.), so werden die Verbindungslinien AA_1 und AA_2 von A mit den auf BC liegenden Punkten von K zu Tangenten von K in A_1 und A_2 und schneidet jede der beiden Doppelpunkttangenten von C^4 in A diese Curve in vier mit A zusammenfallenden Punkten. In diesem Falle ist also jede dieser Tangenten, da sie in A mit dem sie nicht berührenden Zweige von C^4 offenbar nur einen Punkt gemein hat, Wendetangente für den anderen Zweig in A, welcher deshalb in diesem Punkte einen Wendepunkt hat. Also ist die dem Kegelschnitte K entsprechende C^4 eine $\overline{C}^4$ mit den Inflexionsknoten A, B, C (bezeichnet durch $'$).

Dieser Satz, dessen Umkehrbarkeit nun sofort einleuchtet, rührt von Prof. K. Küpper her [7]).

17. „Die Wendetangenten eines Doppelpunkts A der $\overline{C}^4$ sind von den Geraden AB und AC, welche diesen Punkt mit den beiden anderen Doppelpunkten verbinden, harmonisch getrennt".

In einer quadratischen Transformation bilden die einander entsprechenden Geraden durch einen Fundamentalpunkt A, wie wir gesehen haben, eine quadratische Involution und in dieser ist das Doppelverhältniss von irgend vier Strahlen dem der vier entsprechenden Strahlen gleich. Da nun die Tangenten AA_1 und AA_2 aus A an K (Fig. 18.) von AB und AC harmonisch getrennt sind, so sind auch die Geraden AA_1' und AA_2', d. h. die Wendetangenten von $\overline{C}^4$ in A von AC und AB harmonisch getrennt.

---

7) „Ueber Raumcurven vierter Ordnung erster Art und eine specielle ebene Curve vierter Ordnung C^4," (Abhandlungen der k. böhm. Gesellsch. der Wissensch., VI. Folge, 6. Band, 1873).

18. „In Bezug auf die Realität giebt es zwei verschiedene Gattungen von Curven $\overline{C}^4$. Von den Curven erster Gattung sind die drei Doppelpunkte sämtlich reell und zwei von ihnen Knotenpunkte, indem der dritte ein conjugirter Punkt ist. Von den Curven zweiter Gattung ist nur ein einziger Doppelpunkt reell und dieser Punkt immer ein Knotenpunkt".

In Bezug auf die Realität verhält sich das Poldreieck eines Kegelschnittes K auf zwei verschiedene Weisen. Entweder sind alle Ecken und Seiten reell, oder es sind dies nur eine Ecke und die ihr gegenüberliegende Seite. Und nun giebt die quadratische Transformation von K in Bezug auf das Poldreieck als Fundamentaldreieck im ersten Falle eine Curve $\overline{C}^4$ der ersten, im zweiten Falle eine $\overline{C}^4$ der zweiten Gattung.

Im ersten Falle eines ganz reellen Poldreiecks ABC schliesst K bekanntlich einen einzigen Eckpunkt dieses Dreiecks ein [8]). Ist C (Fig. 18.) der eingeschlossene Eckpunkt, so sind also die Tangenten aus A und B an K reell, jene aus C an K aber imaginär, d. h. A und B sind Knotenpunkte und C ist ein conjugirter Punkt von $\overline{C}^4$.

Im zweiten Falle könnte es scheinen, als gäbe es zwei Untergattungen von Curven $\overline{C}^4$; denn bei dem nur teilweise reellen Poldreiecke können wirklich zwei verschiedene Lagen eintreten. Es kann nämlich der reelle Eckpunkt, welcher immer durch C angedeutet werden mag, entweder innerhalb oder ausserhalb K liegen, d. h. es können die Schnittpunkte der reellen Seite c des Dreiecks mit K entweder conjugirt-imaginär oder reell sein. Aber man erkennt leicht, dass nur die zweite Voraussetzung zu einer reellen $\overline{C}^4$ führt. Denn, wenn die Fundamentalpunkte A und B imaginär sind, so muss man wieder zwei Fälle unterscheiden, dass es entweder wol oder nicht möglich ist durch diese Punkte einen nicht zerfallenden reellen Kegelschnitt zu legen. Im ersten Falle — und dann nennt man die Punkte A und B conjugirt-imaginär — entsprechen in jeder quadratischen Transformation mit ABC als Fundamentaldreieck den Geraden der Ebene reelle Kegelschnitte und im allgemeinen den reellen Curven wieder reelle Curven; im zweiten Falle sind die den Geraden der Ebene entsprechenden Kegelschnitte und die den reellen Curven entsprechenden Curven sämtlich imaginär. Nun können aber

---

8) Reye, a. a. O., I. Abteilung, Seite 79 und Seite 83.

die Punkte A und B niemals conjugirt-imaginär sein, wenn ihre reelle Verbindungslinie c den Kegelschnitt K in imaginären Punkten schneidet; denn diese Schnittpunkte sind dann conjugirt-imaginär und nun ist es unmöglich, dass zwei Paar auf einer Geraden liegende conjugirt-imaginäre Punkte einander harmonisch trennen 9), wie es Artikel 17 von den beiden Punktepaaren fordert. Also können die auf c liegenden zu einander in Bezug auf K conjugirten Punkte A und B nur dann conjugirt-imaginär, und also die dem Kegelschnitte K in der quadratischen Transformation ABC entsprechende Curve $\bar{C}^4$ nur dann reell sein, wenn c den Kegelschnitt K in reellen Punkten schneidet, und C deshalb ausserhalb K liegt. Aber dann sind auch die Tangenten aus C an K reell, und ist C ein Knotenpunkt der Curve $\bar{C}^4$, von welcher die beiden imaginären Knotenpunkte nun auch conjugirt-imaginär sind.

19. „Mittelst centraler Projection kann jede $\bar{C}^4$ in einer Curve $\bar{C}^4$ mit einem Mittelpunkte und zwei einander in diesen Punkt senkrecht schneidenden Symmetrieachsen umgebildet werden".

Bei einer Curve $\bar{C}^4$ erster Gattung mit den drei Doppelpunkten A, B, C nehmen wir einen nicht in der Ebene ε der C^4 liegenden Punkt O des auf AB als Durchmesser beschriebenen Kugels als Projectionscentrum und eine Ebene ε_1 parallel zu der durch O und AB gehenden Ebene als Projectionsebene an. Die Projection ist dann eine neue Curve vierter Ordnung $\bar{C}_1^4$, von deren drei Doppelpunkte A_1 und B_1 zwei so in unendlicher Entfernung liegen, dass die sie mit dem dritten Doppelpunkte C_1 verbindenden Geraden C_1A_1 und C_1B_1 senkrecht auf einander stehen. Offenbar ist C_1 Mittelpunkt und sind C_1A_1 und C_1B_1 Symmetrieachsen der Projection C_1^4; denn durch quadratische Transformation in Bezug auf das uneigentliche Fundamentaldreieck $A_1B_1C_1$ geht diese Curve in einen Kegelschnitt über, welcher C_1 zum Centrum und C_1A_1 und C_1B_1 zu Achsen hat.

---

9) Sind die Punkte P, Q von den Punkten R, S einer nämlichen Geraden harmonisch getrennt, so hat man, wenn M und N die Mitten der Segmente PQ und RS andeuten, nach einander die Relationen $MQ^2 = MR.MS$ und $MR.MS = MN^2 - NR^2$, also auch $MQ^2 = MN^2 - NR^2$. Da nun die Voraussetzung PQ und RS seien zwei Paare conjugirt-imaginärer Punkte einer nämlichen Geraden den Grössen MQ^2 und NR^2 negative Werte erteilt, wodurch von der letzten Gleichung das erste Glied negativ und das zweite positiv wird, so können zwei Paare conjugirt-imaginärer Punkte einander nicht harmonisch trennen.

Ist von den drei Inflexionsknoten nur C reell, so denken wir uns durch die conjugirt-imaginären Doppelpunkte A und B einen Kegelschnitt und projiciren nun in der von Poncelet [10]) angegebenen Weise die Figur so, dass c in's Unendliche verschwindet, und der Kegelschnitt einen Kreis zur Projection bekommt. In diesem Falle wird nämlich die Projection von $\overline{C}^4$ eine neue Curve vierter Ordnung $\overline{C}_1^4$, von deren Inflexionsknoten nur ein einziger C_1 reell ist, und die beiden anderen mit den imaginären Kreispunkten zusammenfallen. Da jede Transformation der reciproken Radien, welche C_1 zum Centrum hat, diese $\overline{C}_1^4$ in einen Kegelschnitt mit dem Mittelpunkte C_1 überführt, hat diese $\overline{C}_1^4$ ebenfalls C_1 zum Mittelpunkt und zwei senkrecht auf einander stehende Geraden durch C_1 zu Symmetrieachsen. Und offenbar ist der Kegelschnitt, in welchen $\overline{C}_1^4$ sich umbildet, eine gleichseitige Hyperbel, da die unendlich fernen Punkte dieser Curve zweiter Ordnung von den imaginären Kreispunkten harmonisch getrennt werden.

In der oben angeführten Arbeit hat Herr Küpper bewiesen, dass die vier Eckpunkte eines vollkommenen Vierecks, für welchen die drei Inflexionsknoten einer $\overline{C}^4$ die Schnittpunkte der drei Paare von Gegenseiten sind, auf dieser Curve liegen, sobald dies mit einem der vier Punkte der Fall ist, was dann weiter die Grundlage bildet von einer ganzen Reihe von Eigenschaften solcher Punktquadrupel auf $\overline{C}^4$. Diese Eigenschaften sind eine unmittelbare Folge der Möglichkeit jede $\overline{C}^4$ als eine Curve mit einem Mittelpunkte und zwei sich senkrecht in ihm schneidende Symmetrieachsen zu projiciren.

Wir nennen diese letztere Curve eine „Normalcurve $\overline{C}^4$".

20. „Die Wendepunktstangenten von $\overline{C}^4$ werden in ihren Schnittpunkten mit den gegenüberliegenden Seiten des Doppelpunktsdreiecks ABC von einem Kegelschnitte berührt. Von diesem Kegelschnitte, welcher weiter als „Wendeschnitt" bezeichnet werden soll, ist ABC ein Poldreieck".

In einer quadratischen Transformation sind die drei quadratischen Involutionen der Strahlen a, a' durch A, b, b' durch B und c, c' durch C dadurch an einander gebunden, dass den durch einen Punkt P gehenden Strahlen a, b, c allemal drei ebenfalls durch einen Punkt P' gehende Strahlen a', b', c' entsprechen. Hieraus folgt,

---

10) „Traité des propriétés projectives des figures", deuxième édition I, page 53, art. 109.

dass drei Strahlen a_1, b_1, c_1, welche die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks ABC in drei Punkten einer Geraden treffen, drei Strahlen a_1', b_1', c_1' entsprechen, welche ebenfalls diese Eigenschaft zeigen. Schneiden nämlich die drei Strahlen a_1, b_1, c_1 die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks ABC in drei Punkten einer Geraden, so gehen nach den Sätzen von Menelaus und de Ceva die drei Strahlen a_2, b_2, c_2, welche a_1, b_1, c_1 von den Dreiecksseiten harmonisch trennen, durch einen Punkt P; deshalb gehen dann auch die den Strahlen a_2, b_2, c_2 entsprechenden Strahlen a_2', b_2', c_2' durch den Punkt P' und werden umgekehrt nach den Sätzen von de Ceva und Menelaus die drei Strahlen, welche a_2', b_2', c_2' von den Dreiecksseiten harmonisch trennen, die gegenüberliegenden Seiten wieder in drei Punkten einer Geraden treffen. Aber es sind die Strahlen, welche a_2', b_2', c_2' von den Dreiecksseiten harmonisch treffen, offenbar die den a_1, b_1, c_1 entsprechenden Strahlen; also u. s. w.

Mittelst dieser neuen Form der Relation zwischen den drei Strahleninvolutionen einer quadratischen Transformation und des Pascal'schen Satzes zeigt man nun leicht, dass in jeder quadratischen Transformation mit A, B, C als Fundamentalpunkten den sechs Strahlen, welche die auf den Seiten des Dreiecks ABC liegenden Punkte irgend eines Kegelschnittes K mit den gegenüberliegenden verbinden, sechs Strahlen entsprechen, welche die Dreiecksseiten in sechs auf einem neuen Kegelschnitte K' liegenden Punkten schneiden. Sind nämlich A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 (Fig. 19.) die Schnittpunktenpaare des Kegelschnittes K mit den Seiten des Dreiecks ABC, und wird BC von B_1C_2 in A_3, CA von C_1A_2 in B_3 und AB von A_1B_2 in C_3 geschnitten, so sind dem Pascal'schen Satze nach A_3, B_3, C_3 drei Punkte einer Geraden. Deuten nun $A_1'A_2'A_3'$, $B_1'B_2'B_3'$, $C_1'C_2'C_3'$ [11]) die Schnittpunkte an von den Seiten des Dreiecks mit den durch die gegenüberliegenden Eckpunkte gehenden Geraden, welche den Verbindungslinien von A_1, A_2, A_3 mit A, von B_1, B_2, B_3 mit B, von C_1, C_2, C_3 mit C entsprechen, so zeigt die neue Form der Abhängigkeit zwischen den drei quadratischen Involutionen um A, B, C an, dass einerseits A_3', B_3', C_3' in einer Geraden liegen und dies anderseits mit jedem der drei Punkttripel $B_1'C_2'A_3'$, $C_1'A_2'B_3'$, $A_1B_2'C_3'$ der Fall ist, dass also dem Pascal'schen Satze zufolge die sechs Punkte $A_1'A_2'$, B_1,B_2', $C_1'C_2'$ Punkte eines Kegelschnittes K' sind.

---

11) Um Missverständniss vorzubeugen, weise ich hier an, dass diese neuen Punkte A_1' u. s. w. in der Transformation nicht den Punkten A_1 u. s. w. entsprechen; ebenso wenig wie die ein wenig mehr unten vorgeführte Curve K' dem Kegelschnitte K entspricht.

Ist hiermit nun im allgemeinen geometrisch nachgewiesen, dass die sechs Doppelpunkttangenten irgend einer Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten den gegenüberliegenden Seiten des Doppelpunktsdreiecks in sechs Punkten eines Kegelschnittes begegnen [12]), so sind bei unserer $\overline{C}^4$ überdies die zwei Schnittpunkte einer Seite des Dreiecks mit den Wendetangenten des gegenüberliegenden Eckpunktes von den auf dieser Seite liegenden Doppelpunkten harmonisch getrennt [13]). Also ist ABC ein Poldreieck des durch die sechs Punkte gehenden Kegelschnittes, und wird diese Curve von den Wendetangenten auf den Seiten des Dreiecks ABC berührt [14]).

21. „Die $\overline{C}^4$ kann durch quadratische Transformation in ihren Wendeschnitt übergeführt werden".

Bekanntlich ist eine involutorische quadratische Transformation bestimmt, sobald man ausser den drei Fundamentalpunkten A, B, C ein Paar einander entsprechende Punkte P, P' kennt. Also kann man zur Bestimmung der Transformation innerhalb der von den Fundamentalgeraden erheischten Einschränkung zwei der drei von den Strahlen durch A, B, C gebildeten quadratischen Involutionen beliebig annehmen. Bestimmt man nun die Transformation, welche unsere $\overline{C}^4$ mit den drei Inflexionsknoten A, B, C in einen Kegelschnitt überführen soll, dadurch, dass die beiden durch A gehenden und ebenso die beiden durch B gehenden Wendetangenten einander entsprechen, so wird die $\overline{C}^4$ übergehen in einen Kegelschnitt, der den Wendeschnitt von $\overline{C}^4$ in seinen auf BC und CA liegenden Punkten berührt und also mit dem Wendeschnitte identisch ist. Es entsprechen in dieser Transformation dann auch die beiden durch C gehenden Wendetangenten einander.

---

12) Für den analytischen Beweis dieses bekannten Satzes vergleiche man Salmon-Fiedler's „höhere ebene Curven" Art. 286.

13) In unserem Falle der Curven $\overline{C}^4$ fällt der von den Doppelpunktstangenten der C^4 berührte Kegelschnitt zusammen a) mit dem Kegelschnitte, welcher berührt wird von den sechs aus den Doppelpunkten an C^4 möglichen Tangenten, b) mit dem Kegelschnitte durch die Schnittpunkte der Doppelpunkttangenten und der gegenüberliegenden Seiten des Doppelpunktdreiecks, c) mit dem Kegelschnitte durch die Schnittpunkte der aus den Doppelpunkten an C^4 möglichen Tangenten und der gegenüberliegenden Seiten des Doppelpunktsdreiecks.

14) Jede $\overline{C}^4$ hat nur einen Wendeschnitt; aber jeder Kegelschnitt hat eine dreifach unendliche Anzahl von Poldreiecken und lässt also eine dreifach [illegible]liche Anzahl von Curven $\overline{C}^4$ zu, deren Wendeschnitt er ist.

Man kann zur Bestimmung einer Transformation, welche $\bar{C}^4$ in ihren Wendeschnitt umzubilden im Stande ist, allerdings auch die Wendetangenten a_1 und a_2 (Fig. 20.) der $\bar{C}^4$ in A, resp. die Wendetangenten b_1 und b_2 in B als die Doppelstrahlen der Involution um A, resp. um B annehmen; denn AB und AC sind harmonisch getrennt von a_1 und a_2 und ebenso BC und BA von b_1 und b_2. Da die Doppelstrahlen der Involution um C, dann aber die reellen Diagonalen des von den vier Wendetangenten gebildeten einfachen Vierseits $a_1 b_1 a_2 b_2$, nicht die imaginären Wendetangenten in C sind, und also bei dieser Transformation die Punkte A, B, C sich auf verschiedene Weisen verhalten, so habe ich die oben gegebene vorgezogen. Sie ist wirklich die einzige, welche die $\bar{C}^4$ in ihren Wendeschnitt überführend die Punkte A, B, C ganz gleich hervortreten lässt, und sie gewährt, wie sich im folgenden Abschnitte zeigen wird, bei den fortgesetzten Untersuchungen wichtige Vorteile [15]).

22. „Wir unterscheiden zwei Normalcurven $\bar{C}^4$ erster Gattung und eine Normalcurve $\bar{C}^4$ zweiter Gattung; sie werden mittelst ihrer Wendeschnitte auf einfache Weise construirt".

Schon bei Artikel 19. wäre es möglich gewesen, bei der einfachen Gestalt der Curven $\bar{C}^4$ erster Gattung zwei verschiedene Formen anzuweisen; absichtlich ist dies aber dort nicht geschehen, weil erst an dieser Stelle der Wendeschnitt in die Betrachtung aufgenommen werden kann. Wenn nämlich die zwei Doppelpunkte A und B in senkrecht auf einander stehenden Richtungen in's Unendliche projicirt werden und der Doppelpunkt C also Mittelpunkt der Curve wird, so kann dieser nicht in's Unendliche verschwindende Doppelpunkt entweder der einzige conjugirte Punkt oder aber einer der beiden Knotenpunkte sein. Im ersten Falle hat $\bar{C}^4$ im Unendlichen zwei Knotenpunkte und ist ihr Wendeschnitt eine Ellipse, im zweiten Falle hat $\bar{C}^4$ im Unendlichen einen Knotenpunkt und einen conjugirten Punkt und ist ihr Wendeschnitt eine Hyperbel. Diese beiden Normalcurven $\bar{C}^4$ erster Gattung, die wir als erste und zweite Normalcurve erster Gattung andeuten, und die einzige Normalcurve $\bar{C}^4$ zweiter Gattung werden wir am Ende dieses Artikels im Bilde vorführen. Dazu fassen wir aber erst die Transformation, welche $\bar{C}^4$ in ihren Wendeschnitt überführt, etwas näher in's Auge.

Ist E (Fig. 21.) der Wendeschnitt der ersten Normalcurve $\bar{C}^4$ erster Gattung und liegen deshalb die unendlich fernen Inflexions-

---

15) **Man vergleiche den dritten Abschnitt, Artikel 35 und 36.**

punkte A und B auf den Achsen der Ellipse E, welche den conjugirten Inflexionspunkt C zum Mittelpunkt hat, so kann man von dem beliebig gewählten Punkte P die Polare p in Bezug auf E bestimmen, die von dieser Polaren in den Achsen bestimmten Segmente CR_1 und CS_1 nach der andern Seite hin als CR' und CS' auf den Achsen abtragen und auf diesen neuen Segmenten CR' und CS' ein Rechteck construiren; der nicht auf den Achsen liegende Eckpunkt P' dieses Rechtecks ist dann der entsprechende Punkt von P. Sind R und S die Projectionen von P auf BC und CA, so findet man nämlich unmittelbar, dass R_1 und S_1 die Pole sind von PR und PS, woraus die Gleichungen $CR.CR_1 = CA_1^2$ und $CS.CS_1 = CB_1^2$ oder $CR.CR' = CA_1.CA_2$ und $CS.CS' = CB_1.CB_2'$ hervorgehen. Und da in der Involution um A die Achse CA und in der Involution um B die Achse CB der unendlich fernen Geraden entspricht, so zeigen diese beiden Relationen, dass PR und $P'R'$ einander in der Involution um A, PS und $P'S'$ einander in der Involution um B entsprechen, dass also P und P' einander entsprechen in der betrachteten quadratischen Transformation. Und da diese Transformation von Hause aus eine involutorische ist, so findet man umgekehrt P aus P', wenn man die Polare p' von P' in Bezug auf E bestimmt, die von dieser Geraden in den Achsen bestimmten Segmente CR_1' und CS_1' als CR und CS nach der anderen Seite auf die Achsen abträgt und auf CR und CS ein Rechteck construirt.

Ist nun der beliebig gewählte Punkt ein Punkt Q von E, so lässt die allgemeine Construction Q' als den vierten Eckpunkt des Rechtecks kennen, welches man auf die von der im diametral gegenüber Q liegenden Punkte Q_1' an E angelegten Tangente q_1' auf den Achsen bestimmten Segmenten beschreibt. Und deshalb kann die $\overline{C}^4$ mittelst ihres Wendeschnittes E Punkt für Punkt construirt werden. So erhält man dann (Fig. 22.) eine aus vier Aesten bestehende Curve, welche ich nach ihrer Form als „Kreuzcurve" bezeichnen will.

Wenn zweitens H (Fig. 23.) der Wendeschnitt der zweiten Normalcurve $\overline{C}^4$ erster Gattung ist und deshalb ein conjugirter Doppelpunkt A auf der reellen und ein Knotenpunkt B auf der imaginären Achse der Hyperbel H, welche den dritten Doppelpunkt, den Knotenpunkt C, zum Centrum hat, unendlich fern liegt, so führt ein analoger Weg zu analogen Resultaten. Schneidet die Polare p eines beliebig gewählten Punktes P die Achsen BC und CA in R_1 und S_1, sind R' und S' die in Bezug auf C zu R_1 und S_1 symmetrische Punkte, und ist P' der vierte Eckpunkt des auf CR' und CS' beschriebenen Rechtecks, so entsprechen auch hier die Punkte P und P' einander, und führt ein ganz gleicher Weg von P' zu P zurück. Der Beweis hiervon kann dem Vorhergehenden ganz entnommen

Will man dabei aber die Betrachtung der imaginären Punkte

A_1 und A_2 umgehen, so kann man sich der Combination der Strahleninvolutionen um B und C bedienen. Es ist dann erstens S_1 der Pol von PS und also $CS.CS_1 = CB_1^2$, oder $CS.CS' = CB_1.CB_2$, woraus folgt, dass PS und $P'S'$ einander in der Involution um B entsprechen. Und zweitens geht die Strahleninvolution um C, welche durch die Achsen von H als ein Paar und die Asymptoten von H als ein zweites Paar bestimmt ist, in die Involution der conjugirten Durchmesser von H über, wenn man von jedem Strahlenpaare einen Strahl um die Achsen umlegt. Woraus dann weiter folgen muss, dass CP und CP' einander entsprechen in der Involution um C. Denn in dieser Involution entspricht CP die Gerade, welche man durch Umlegung von der Parallele zu p durch C um die Achsen erhält.

Ist nun wieder der beliebig gewählte Punkt ein Punkt Q von H, so ist Q' der vierte Eckpunkt des Rechtecks, welches man auf den von der im diametral gegenüberliegenden Punkte Q_1' an H angelegten Tangente q_1' auf den Achsen bestimmten Segmenten beschreibt. So erhält man für den geometrischen Ort des Punktes Q' eine aus zwei Aesten bestehende Curve (Fig. 24.), welcher ich nach ihrer Form den Namen „Kohlenspitzencurve" beilegen will.

Es ist nicht zu leugnen, dass es nun weiter noch möglich ist Kreuzcurve und Kohlenspitzencurve so zu projiciren, dass der Wendeschnitt der ersten ein Kreis, jene der zweiten eine gleichseitige Hyperbel wird. Mit dem Auge auf den bekannten von Joachimsthal herrührenden Normalenproblemen, die schon im ersten Abschnitte angeführt sind, behalte ich aber in meinem Aufsatze die Normalcurven $\overline{C}^4$ erster Gattung mit elliptischem und ungleichseitig hyperbolischen Wendeschnitte bei.

So sind wir nun gekommen an die einzige Normalcurve $\overline{C}^4$ zweiter Gattung, welche die imaginären Kreispunkte zu zwei ihrer drei Inflexionsknoten hat, und deren Wendeschnitt eine [illegible] Hyperbel H ist mit dem dritten Inflexionspunkte C als [illegible] trachten wir sogleich die Strahleninvolution um C, [illegible] dass ihre Doppelstrahlen senkrecht auf einander stehen. [illegible] den imaginären Kreispunkten harmonisch getrennt [illegible] werden diese Doppelstrahlen den von je zwei einander [illegible] Strahlen durch C gebildeten Winkel halbiren und die [illegible] welche $\overline{C}^4$ in ihren Wendeschnitt H überführt, in eine [illegible] der reciproken Radien mit C als Centrum übergehen, [illegible] je zwei einander entsprechenden Punkten den [illegible] einen der beiden Doppelstrahlen überspiegelt. [illegible] diese Aenderung, dass zwei einander entsprechende [illegible]

mit C in einer Geraden liegen werden, und diese einander entsprechenden Punkte auf einer beliebig gewählten Geraden g durch C, also eine Involution bilden mit C als Centralpunkt. Und zweitens entspricht auch in der geänderten Transformation einem Kreise mit C als Centrum nach den Gesetzen der quadratischen Verwandtschaft wieder ein Kreis, welcher dann, da C Centralpunkt ist von den Involutionen auf den Geraden durch C ebenfalls C zum Centrum hat, d. h. die einander entsprechenden Punkte bilden auf den Geraden durch C Involutionen, nicht nur mit gemeinschaftlichem Centralpunkte, sondern auch mit gemeinschaftlicher Potenz.

Da nun die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel H (Fig. 25.) einander entsprechende Strahlen der Involution um C sind, sind die Achsen der Hyperbel die Doppelstrahlen dieser Involution, und muss also die ursprüngliche Transformation, welche $\overline{C}^4$ in H umbildet, mit einer Umlegung um eine dieser Achsen verbunden werden, um in eine Transformation der reciproken Radien überzugehen. Und die Polare dieser Transformation ist mittelst der Brennpunkte F von H zu bestimmen. Diese Punkte werden nämlich als Schnittpunkte der von den imaginären Kreispunkten an H geführten Tangenten unmittelbar als einander entsprechende Punkte anerkannt. Deshalb ist der absolute Wert der Potenz dem Quadrate von CF gleich, und ist ihr, wenn die Umlegung um die reelle Achse der Hyperbel geschieht, das negative, wenn sie um die imaginäre Achse von H stattfindet, das positive Zeichen beizulegen. Und da nun $CF = CD\sqrt{2}$ ist, so schneidet die reelle Achse der Hyperbel unsere $\overline{C}^4$ ausser C in zwei Punkten G, deren Entfernung von C durch $CF\sqrt{2} = 2CD$ angedeutet wird.

Nach den bekannten Gesetzen der erhaltenen umgelegten Transformation der reciproken Radien findet man nun aus dem Punkte Q von H den entsprechenden Punkt Q' von $\overline{C}^4$. So erhält man dann für C^4 eine geschlossene sich selbst einmal durchsetzende Curve, die sich unmittelbar als eine Lemniskate offenbart, wenn man die Lemniskate geometrisch als die erste Fusspunktencurve einer gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf ihren Mittelpunkt definirt. Da nämlich CQ und CQ' (Fig. 26.) antiparallel sind in Bezug auf die Achsen, und CQ und die Tangente q in Q an H antiparallel sind in Bezug auf die Asymptoten von H, steht nach Artikel 5. also CQ' senkrecht auf q. Und man zeigt ohne Mühe, dass die auf dieser Senkrechten CQ' zu messende Entfernung CQ_0 des Centrums C von q halb so gross ist als $Q'C$. Denn ebenso, wie in Artikel 3. hat man, wenn Q_x und Q_y die Schnittpunkte von der Tangente q mit den Asymptoten CX und CY sind, nach einander $CQ \,.\, CQ_0 = QQ_x \,.\, CQ_0 = \frac{1}{2} CQ_x \,.\, CQ_y =$

$\frac{1}{2}CF^2$, was in Verbindung mit der oben gefundenen Relation $CQ\,CQ' = CF^2$ die Gleichung $Q'C = 2CQ_0$ liefert. Also ist die Normalcurve zweiter Gattung die von C aus negativ verdoppelte erste Fusspunktencurve der gleichseitigen Hyperbel H für den Mittelpunkt und also als erste Fusspunktencurve der von C aus negativ verdoppelten gleichseitigen Hyperbel H selbst eine Lemniskate [16]).

Diese letzte Betrachtung führt uns nun zur selben Zeit zu einer anderen Deutung der umgelegten Transformation der reciproken Radien, welche zu kennen uns im Folgenden nützlich sein wird. Ist nämlich P ein nicht auf H liegender Punkt von CQ, p seine Polare in Bezug auf H, P' der ihm auf CQ' entsprechende Punkt, und sind P_1 und P_0 die Schnittpunkte der Polare p mit CQ und CQ', so ist aus der Gleichung $CQ^2 = CP.CP_1$ und die Proportion $CQ_0 : CQ = CP_0 : CP_1$, ebenso wie in Artikel 13. die Relation $CQ.CQ_0 = CP.CP_0$ abzuleiten. Und hierdurch geht die Bedingung $CQ.CQ' = CP.CP'$ über in $CQ' : CQ_0 = CP' : CP_0$. Da nun aber $Q'C = 2CQ_0$ ist, so ist auch $P'C = 2CP_0$. Also findet man ganz allgemein den dem beliebig gewählten Punkte P entsprechenden Punkt P', wenn man das

16) Diese für die gleichseitige Hyperbel H in Bezug auf ihren Mittelpunkt C gefundene Beziehung zwischen der Curve, welche man durch die Transformation der reciproken Radien erhält, und der ersten Fusspunktencurve erinnert an den bekannten Satz, nach welchem man allgemein die erste Fusspunktencurve irgend einer Curve C^n für irgend einen Punkt M erhält, wenn man auf der Polarfigur von C^n in Bezug auf irgend einen um M als Centrum beschriebenen Kreis die Transformation der reciproken Radien anwendet, welche M zum Centrum und das Quadrat des Radius des Kreises zur Potenz hat (Picquet, a. a. O., tome I, page 375).

Da die Lemniscate die von C aus verdoppelte erste Fusspunktencurve von H für ihr Centrum ist, ist sie auch der Ort der Spiegelbilder von C in Bezug auf die Tangenten von H. Diese Betrachtungsweise schliesst sich als besonderer Fall an eine allgemeine Theorie an, welche von dem irischen Mathematiker Dr. J. Casey in seiner schönen Abhandlung „On bicircular quadrics" (Transactions of the royal irish Academy Volume 24, Science, Part 12, 1869) entwickelt worden ist. Nach dieser Theorie, welche in analytischer Behandlung gegeben ist, ist die Einhüllende eines veränderlichen Kreises, welcher einen gegebenen Kreis J rechtwinklig schneidet und auf einem gegebenen Kegelschnitte F sein Centrum hat, eine Curve vierter Ordnung, welche die imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten hat, und kann diese Curve auch betrachtet werden als der Ort der Grenzpunkte der Kreisbüschel, welche von J und den Tangenten von F bestimmt werden. Ist nun J ein Punkt, der Punkt C, und F eine gleichseitige Hyperbel mit C als Centrum, die Curve H, so geht letztere Erzeugungsweise von Casey in die oben angegebene über.

von C auf die Polare p von P in Bezug auf H gefällte Lot CP_0 nach der entgegengesetzten Seite hin verdoppelt [17]).

23. „Wenn man eine gegebene Curve C^n so um irgend einen Punkt M ihrer Ebene dreht und zu gleicher Zeit aus diesem Punkte M multiplicirt, dass diese Curve fortwährend durch einen anderen festen Punkt P der Ebene geht, so beschreibt irgend ein Punkt Q dieser Curve einen Ort, welchen man auch erhält, wenn man die Lage von C^n, wobei Q in P hineinfällt, um MP umlegt und auf diese umgelegte Lage die Transformation der reciproken Radien anwendet, welche M zum Centrum und das Quadrat von MP zur Potenz hat".

Ist nämlich C^n_1, (Fig. 27.) die Lage von C^n, wobei der bewegende Punkt Q mit P zusammenfällt, ist C^n_2 irgend eine andere Lage von C^n, wobei dieser bewegende Punkt sich in Q_2 befindet, und entspricht dem Punkte P von C^n_2 der Punkt P_1 von C^n_1, so hat man die Relationen Wkl. $P_1MP =$ Wkl. PMQ_2 und $MP_2 : MP = MP : MQ_2$. Und da nun P_1 die Lage C^n_1 von C^n beschreibt, wenn Q_2 seinen Ort erzeugt, so beweisen diese beiden Relationen den Satz.

Wendet man diesen Satz auf den Fall einer gleichseitigen Hyperbel an, welche sich auf die angegebene Weise um ihr Centrum dreht, so findet man mittelst der Ergebnisse des vorhergehenden Artikels den Satz der 23. Note des ersten Abschnitts zurück. In diesem Sinne ist der Satz dieses Artikels eine Verallgemeinerung der dort angeführten Betrachtungsweise Steiners [18]).

24. Die Nebeneinanderstellung der beiden betrachteten Fälle a) des Mittelpunktskegelschnittes K mit seinem von den unendlich fernen

---

17) Die Punkte F werden die Doppelpunkte von der Lemniskate genannt, die beiden Geraden, welche einen dieser Punkte mit den imaginären Kreispunkten verbinden, sind nämlich Tangenten der Curve.

18) So findet man nun auch umgekehrt, dass der Ort der Scheitel der Reihe von Lemniskaten, welche einen nach Grösse und Lage gegebenen Durchmesser gemein haben, die gleichseitige Hyperbel ist, welche diese Strecke nach Grösse und Lage zur reellen Achse hat, u. s. w. Im allgemeinen ist der Ort, welcher beschrieben wird von einem bestimmten Punkt einer Cissoide, einer Strophoide einer Schneckenlinie, von Pascal oder irgend einer Fusspunktencurve eines Kegelschnittes, wenn diese Curve sich so um ihren Doppelpunkt M dreht, dass sie sich selbst ähnlich bleibend durch einen festen Punkt geht, eine Parabole durch M und P, gleichseitige Hyperbel durch M und P, irgend ein Kegelschnitt durch P, welcher M zum Brennpunkt hat oder allge- [...]rgend ein Kegelschnitt durch P. (Picquet a. a. O. tome I, page 375).

Punkten A und B der Achsen und dem Mittelpunkte C gebildeten Poldreiecke, b), der gleichseitigen Hyperbel H mit ihrem von den imaginären Kreispunkten und dem Mittelpunkte C gebildeten Poldreiecke, welche uns zu den Normalcurven beider Gattung geführt haben, bildet die Grundlage eines Uebertragungsprincips".

Ist der Mittelpunktskegelschnitt K der a) Sätze ein Kreis, so tritt das Princip in seiner einfachsten Gestalt auf. Nach ihm entsprechen den Wahrheiten, dass eine Kreissehne von der Senkrechten durch das Centrum halbirt wird, dass die Kreistangente senkrecht auf dem Radius des Berührungspunktes steht, dass der Ort des Scheitels eines rechten Winkels, dessen Schenkel je durch einen festen Punkt gehen, der über die von diesen Punkten begrenzte Strecke als Durchmesser zu beschreibende Kreis ist, als a) Sätze die Sätze der Artikel 1., 2. und 4. als b) Sätze. Hierbei geht dann selbstverständlich die senkrechte Lage von zwei Geraden der a) Sätze in die antiparallele Lage in Bezug auf die Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel von den b) Sätzen über, indem die Kreisinvolution von der hyperbolisch gleichseitigen Involution dieser Hyperbel ersetzt wird.

In der allgemeinen Form des Princips entsprechen nach ihm die Sätze 8. und 9. und ebenso die beiden Teile des Satzes 11. einander. In Verbindung hiermit, dass der Kegelschnitt K dann nicht durch die den senkrechten Stand beherrschenden imaginären Kreispunkte geht, geht die senkrechte Lage zweier Geraden der a) Sätze hier in antiparalle Lage in Bezug auf irgend eine feste Gerade über. Und beim Uebergange vom ersten Teile des Satzes 11. zum zweiten muss man noch den bekannten Satz anwenden, nach welchem die vier Schnittpunkte zweier gleichseitigen Hyperbeln, die im zweiten Teile des Satzes 11. angegebene Lage haben, wie aus dem Satze von Artikel 12. zu entnehmen ist[19]).

Durch centrale Projection gehen die a) Sätze und b) Sätze in allgemeinere Sätze über, welche sich auf einen Kegelschnitt mit irgend einem seiner Poldreiecke beziehen. So folgt z. B. aus dem Satze des Artikels 11. ganz allgemein, dass die Ersetzung einer ungeraden Zahl von Schnittpunkten eines Kegelschnittes K mit irgend einem anderen Kegelschnitte, welcher die zwei Eckpunkte A und B irgend eines Poldreiecks ABC von K enthält, durch die mit ihnen

---

19) Da der Satz von Art. 12. im Texte mittelst des Satzes von Art. 11. bewiesen worden ist, mag er beim Uebergange vom ersten Teile des Satzes 11 zum zweiten nicht angewendet werden, wenn man ihn zur Umgehung einer Argumentation im Kreise nicht vorher ohne Hilfe des Satzes von Art. 11. bewiesen hat. Hierzu vergleiche man aber die 18te Note d. ersten Abschn.

auf Geraden durch C liegenden Punkte von K vier Punkte liefert, welche mit A, resp. B einen die Gerade AB in A, resp. B berührenden Kegelschnitt bestimmt.

Im folgenden Abschnitte werden wir noch einigen Sätzen begegnen, die als a) Sätze und b) Sätze nebeneinander zu stellende besondere Fälle eines allgemeinen Satzes sind. Wir werden den allgemeinen Satz dann mittelst centraler Projection aus den beiden besonderen Fällen beweisen, diese aber — obgleich sie offenbar zusammenhangen — jeden für sich behandeln.

Jetzt gehe ich über zu den dualistisch entsprechenden Umhüllenden vierter Classe $\bar{K}^4$ mit drei Rückkehrdoppeltangenten. Dabei überlasssse ich es aber dem geneigten Leser den ganzen Entwicklungsgang dieses Abschnittes auf's neue durch zu machen. Ich verzichte hierauf um so eher als sich sogleich eine sehr einfache Polarisation darbieten wird, welche die gefundenen Sätze unmittelbar in die ihnen dualistisch entsprechenden Sätze überführt.

25. „In jeder tangentiellen quadratischen Transformation, deren drei Fundamentalgeraden ein Poldreiseit abc eines gegebenen Kegelschnittes K bilden, entspricht dieser Curve zweiter Classe eine Curve vierter Classe $\bar{K}^4$ mit drei Doppeltangenten a, b, c, wovon jede die Curve in zwei Rückkehrpunkten berührt. Und umgekehrt entspricht einer gegebenen Curve vierter Classe $\bar{K}^4$ mit den drei Rückkehrdoppeltangenten a, b, c in jeder tangentiellen quadratischen Transformation mit a, b, c als Fundamentalgeraden ein Kegelschnitt K, von welchem abc ein Poldreiseit ist".

„Die Rückkehrpunkte einer Doppeltangente a der $\bar{K}^4$ sind von den Schnittpunkten von a mit b und c harmonisch getrennt".

„In Bezug auf die Realität giebt es zwei verschiedene Gattungen von Curven $\bar{K}^4$. Von den Curven erster Gattung sind die drei Doppeltangenten sämtlich reell und auf zweien von diesen auch die beiden Rückkehrpunkte. Von den Curven zweiter Gattung ist nur eine einzige Doppeltangente reell, und hat diese Tangente immer zwei reelle Berührungspunkte".

„Mittelst centraler Projection kann jede $\bar{K}^4$ in eine Curve $\bar{K}^4$ mit einem Mittelpunkte und zwei einander in diesen Punkt senkrecht schneidenden Symmetrieachsen umgebildet werden".

„Durch die Rückkehrpunkte von $\bar{K}^4$ geht ein Kegelschnitt, wel-
in diesen Punkten von den nach den gegenüberliegenden Eck-

punkten des Doppeltangentendreiecks abc gehenden Geraden berührt wird. Von diesem Kegelschnitte, welchen ich weiterhin als „Rückkehrschnitt" bezeichne, ist abc ein Poldreiseit".

„Die $\overline{K}^4$ kann durch tangentielle quadratische Transformation in ihren Rückkehrschnitt übergeführt werden".

Diese Sätze werden den vorhergehenden Sätzen der Artikel 16., 17., 18., 19., 20., 21. nach den Gesetzen der Dualität unmittelbar entnommen.

26. „Die Polarisation von $\overline{C}^4$ in Bezug auf ihren Wendeschnitt K führt diese Curve in eine $\overline{K}^4$ über, welche K zum Rückkehrschnitte hat. Dabei gehen zwei einander entsprechende Punkte von $\overline{C}^4$ und K allemal in zwei einander entsprechende Tangenten von $\overline{K}^4$ und K über".

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge der Gesetze der Dualität. Wir bemerken, dass der letzte Teil nur dann wahr sein wird, wenn wir von den zwei tangentiellen Transformationen, welche $\overline{K}^4$ in ihren Rückkehrschnitt über zu führen im Stande sind, nun auch wieder die regelmässigste wählen.

27. „Wir unterscheiden zwei Normalcurven $\overline{K}^4$ erster Gattung und eine Normalcurve $\overline{K}^4$ zweiter Gattung; sie werden mittelst ihrer Rückkehrschnitte auf einfache Weise construirt".

Die Normalcurven $\overline{K}^4$, d. h. die Curven $\overline{K}^4$ erster und zweiter Gattung mit einem Mittelpunkte und zwei einander in diesem Punkte senkrecht schneidenden Symmetrieachsen, sind offenbar die reciproken Polaren von den Normalcurven $\overline{C}^4$ in Bezug auf ihre Wendeschnitte. Wir finden also die Construction der Normalcurven $\overline{K}^4$ mittelst Polarisation der Normalcurven $\overline{C}^4$ in Bezug auf ihre Wendeschnitte.

In Artikel 22. ist die Relation der Punkte P und P' angegeben, die einander entsprechen in der quadratischen Transformation, welche die Normalcurve $\overline{C}^4$ erster Gattung in ihren Wendeschnitt E (Fig. 21.), resp. H (Fig. 23) überführt. Also entsprechen einander auch die Polaren p und p' von P und P' in Bezug auf E, resp. H in der tangentiellen quadratischen Transformation, welche die in Bezug auf E, resp. H genommene reciproke Polare $\overline{K}^4$ von der Normalcurve $\overline{C}^4$ erster Gattung, d. h. die Normalcurve $\overline{K}^4$ erster Gattung in ihren mit E, resp. H zusammenfallenden Rückkehrschnitt umbildet. Deshalb erhält man die in dieser tangentiellen quadratischen Transformation irgend einer gegebenen Geraden p entsprechende Gerade p'

wenn man zum Pole P von p für E, resp. H den in Bezug auf C symmetrisch liegenden Punkt P_1' bestimmt und die senkrechten Projectionen R_1' und S_1' dieses Punktes auf die Achsen des Kegelschnittes mit einander verbindet. Und wenn die gegebene Gerade q die E (Fig. 28.), resp. H (Fig. 29.) in Q berührt, so hat man den dem Berührungspunkte Q diametral gegenüberliegenden Punkt Q_1' auf die angedeutete Weise zu projiciren und die Projectionen zu vereinen. Mittelst dieser Construction sind nun die beiden Normalcurven $\bar{K}^4$ erster Gattung Tangente für Tangente aus ihren Rückkehrschnitten abzuleiten.

Wie die vom Punkte Q' (Fig. 28.), resp. (Fig. 29.) beschriebene Kreuzcurve, resp. Kohlenspitzencurve die Endpunkte A und B der Achsen und das Centrum C von E, resp. H zu Inflexionsknoten hat und in diesen Punkten von den aus diesen Punkten an E, resp. H möglichen Tangenten dreipunktig berührt wird, so hat auch ihre Polarfigur in Bezug auf E, resp. H die erste, resp. zweite Normalcurve $\bar{K}^4$ erster Gattung, welche E, resp. H zum Rückkehrschnitt hat, die Achsen von E, resp. H und die unendlich ferne Gerade zu Rückkehrdoppeltangenten, und sind die Schnittpunkte von diesen Doppeltangenten mit E, resp. H die Berührungsrückkehrpunkte. Also hat die erste Normalcurve $\bar{K}^4$ erster Gattung vier reelle Rückkehrpunkte in den vier Scheiteln von E und die zweite Normalcurve $\bar{K}^4$ erster Gattung ebenfalls vier reelle Rückkehrpunkte, wovon zwei eigentliche in den reellen Scheiteln von H und zwei uneigentliche in den unendlich fernen Punkten von H.

Weiter ist in Artikel 22. die Verwandtschaft umgebildet zwischen den Punkten P und P', welche einander entsprechen in der die Normalcurve $\bar{C}^4$ zweiter Gattung in ihren Wendeschnitt H (Fig. 26.) überführenden quadratischen Transformation. Erst fanden wir, dass zwischen diesen Punkten eine um die imaginäre Achse von H umgelegte Transformation der reciproken Radien obwaltet, nachher haben wir P' aus P bestimmt durch das aus C auf die Polare p von P gefällte Lot, nach der entgegengesetzten Seite hin zu verdoppeln. Ist nun p' die Polare von P', so entsprechen einander p und p' in der tangentiellen Transformation, welche die reciproke Polare $\bar{K}^4$ von der Normalcurve $\bar{C}^4$ zweiter Gattung in Bezug auf H, d. h. die Normalcurve $\bar{K}^4$ zweiter Gattung in ihren mit H zusammenfallenden Rückkehrschnitt umbildet. Wird aber der Schnittpunkt von p' mit der senkrecht auf ihr stehenden Geraden CP durch P_0' bezeichnet, so lässt die Substitution der Werte $CP = 2P_0'C$ und $CP' = P_0C$ die Relation $CP.CP' = CF^2$ übergehen in $CP_0 . CP_0' = \frac{1}{2}CF^2$.) findet man die einer beliebig gewählten Geraden p entsprechende

Gerade p', wenn man den Pol P von p mit C verbindet, auf diese Gerade von C aus nach der von P abgewandten Seite hin eine Strecke $CP_0' = \frac{1}{2}PC$ abträgt, und in P_0' eine Senkrechte auf CP errichtet. Und ist die gegebene Gerade eine Tangente q von H in irgend einem Punkte Q, so steht die entsprechende Gerade q' in der Mitte des Radius-Vectors CQ_1' des diametral gegenüber Q liegenden Punktes Q_1' auf diesem Radius-Vector senkrecht. Mittelst dieser Construction der einer Tangente q von H entsprechenden Geraden q' ist die Normalcurve $\overline{K}^4$ zweiter Gattung, Tangente für Tangente aus ihrem Rückkehrschnitte abzuleiten. Sie ist uns aber schon bekannt. Denn nach ihrer Construction ist diese Curve die von C aus negativ halbirte erste negative Fusspunktencurve von H für C, d. h. die von C aus negativ halbirte Anti-Evolute von H in Bezug auf die Achsen von H, welche (Fig. 11.) schon im Bilde vorgeführt ist.

Wie die Lemniskate das Centrum C von H und die imaginären Kreispunkte zu Inflexionspunkten hat, und in diesen Punkten von den aus diesen Punkten an H möglichen Tangenten, d. h. in C von den Asymptoten von H und in jedem der beiden imaginären Kreispunkte von durch die Brennpunkte gehenden Geraden berührt wird, so hat auch ihre Polarfigur in Bezug auf H, die Normalcurve $\overline{K}^4$ zweiter Gattung, welche H zum Rückkehrschnitt hat, die unendlich ferne Gerade und die von C nach den imaginären Kreispunkten führenden Geraden zu Rückkehrdoppeltangenten, und sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit H die Berührungsrückkehrpunkte. Also hat die Normalcurve $\overline{K}^4$ zweiter Gattung eine reelle Doppeltangente, die unendlich ferne Gerade, und sind die unendlich fernen Punkte von H Rückkehrpunkte dieser Curve.

28. „Die Evolute einer Ellipse, resp. Hyperbel ist eine erste, resp. zweite Normalcurve $\overline{K}^4$ erster Gattung".

Die Evolute eines Mittelpunktskegelschnittes K ist eine Curve vierter Classe, da bekanntlich (Artikel 8.) durch irgend einen Punkt der Ebene vier Normalen an K möglich sind. Diese Curve hat drei Doppeltangenten, die beiden Achsen CA und CB von K und die unendlich ferne Gerade g_∞, denn jede dieser Geraden ist zweimal Normale von K. Ausserdem ist jede Achse von K Normale in zwei Scheiteln von K, in zwei Punkten, wo der Krümmungskreis aus Symmetriegründen vier nebeneinanderliegende Punkte mit K gemein hat, und der Krümmungsmittelpunkt also stationär ist in der Normale der Evolute, wenn diese Normale die Evolute umhüllt, d. h. jede Achse von K berührt die Evolute in zwei Rückkehrpunkten. Und wenn dies bei zwei der drei Doppeltangenten der Fall ist, so muss

es auch bei der dritten Statt finden. Denn, wenn zwei der drei Doppeltangenten die Curve vierter Classe in Rückkehrpunkten berühren, so führt eine tangentielle quadratische Transformation mit den drei Doppeltangenten als Fundamentalgeraden die Curve in einen Kegelschnitt über, von welchem das Fundamentaldreiseit ein Poldreiseit ist, und diesem Kegelschnitte entspricht in der angewendeten Transformation eine $\overline{K}^4$. Und ist die Evolute eine $\overline{K}^4$, dann ist sie wegen der besonderen Lage ihres Doppeltangentendreiseits eine Normalcurve $\overline{K}^4$ erster Gattung, d. h. es ist die Evolute einer Ellipse, resp. Hyperbel eine erste, resp. zweite Normalcurve $\overline{K}^4$ erster Gattung.

29. „Der Rückkehrschnitt K' der Evolute eines Mittelpunktskegelschnittes K ist die um die kleine, resp. imaginäre Achse von K umgelegte Polarfigur von K in Bezug auf den durch die Brennpunkte von K gehenden Kreis. Und der Rückkehrschnitt K'' der Evolute von K' ist concentrisch, ähnlich, und ähnlich liegend mit K".

Der Rückkehrschnitt der Evolute eines Mittelpunktskegelschnittes K wird aus Symmetriegründen als ein mit K concentrischer und ähnlich liegender Kegelschnitt K' erkannt, der also von den vier reellen Rückkehrpunkten der Evolute bestimmt ist. Die reciproke Polare von K in Bezug auf den durch die Brennpunkte von K gehenden Kreis ist, wie sich ebenso aus Symmetriegründen ergiebt, ebenfalls ein mit K concentricher und ähnlich liegender Kegelschnitt K_1. Also wird der Satz des Zusammenfallens von K' und K_1 bewiesen sein, sobald nur gezeigt ist, dass der letztere Kegelschnitt K_1 durch die vier reellen Rückkehrpunkte von der Evolute von K geht.

Ist der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse E (Fig. 30.), so sind nach Artikel 7. die Rückkehrpunkte A_1' und A_2' der Evolute durch den Wert $\frac{b^2}{a}$ von R_a, die Rückkehrpunkte B_1' und B_2' durch den Wert $\frac{a^2}{b}$ von R_b bestimmt. Ersetzt man nun wie gewöhnlich a^2-b^2 durch c^2, so findet man $\frac{c^2}{a}$ für CA_1' und $\frac{c^2}{b}$ für CB_1', und diese Werte lassen die Punkte A_1', A_2' und B_2' B_2' erkennen als die Pole der Scheiteltangenten der Ellipse E in Bezug auf den auf F_1F_2 als Durchmesser beschriebenen Kreis, d. h. es fallen bei Ellipsen die Kegelschnitte K' und K_1 zusammen.

Ist P ein beliebig gewählter Punkt des Rückkehrschnittes E', und entspricht der Tangente p dieses Rückkehrschnittes in diesem [Pu]nkte P also die Gerade p_1, so steht diese Gerade als Tangente der

Evolute von E in irgend einem Punkte Q von E auf E senkrecht. Weiter berührt die Polare r von P in Bezug auf den Kreis der Brennpunkte die Ellipse E in irgend einem Punkte R. Und nun lässt sich zeigen, dass Q und R symmetrisch zu einander liegen in Bezug auf die kleine Achse von E; denn es sind p' und PC antiparallel in Bezug auf die Achsen von E, weshalb dies auch mit den senkrecht auf ihnen stehenden Tangenten in Q und R an E der Fall sein muss, diese Punkte Q und R also symmetrisch zu einander sein werden in Bezug auf eine der Achsen und dann, wie man ohne Mühe nachweist, in Bezug auf die kleine Achse. Also bilden die Verwandtschaften von E mit E' mit der Evolute von E und dem Kreise durch die Brennpunkte von E eine geschlossene Kette, wenn man die Ellipse E' als die um die kleine Achse von E umgelegte Polarcurve von E in Bezug auf den Kreis der Brennpunkte von E betrachtet.

Ist weiter der gegebene Kegelschnitt eine Hyperbel H (Fig. 31.), so sind die Rückkehrpunkte A_1' und A_2' der Evolute wieder durch den Wert $\frac{b^2}{a}$ von R_a bestimmt. Wenn hier nun wie gewöhnlich $a^2+b^2=c^2$ gesetzt wird, so findet man $\frac{c^2}{a}$ für CA_1'; deshalb sind die Punkte A_1' und A_2' die Pole der reellen Scheiteltangenten von H in Bezug auf den auf F_1F_2 als Durchmesser beschriebenenKreis [20]). Ferner ergiebt sich ohne Mühe, dass der Krümmungsmittelpunkt des dem unendlich fernen Punkte der Asymptote CX, resp. CYvon H immer nahenden Punktes von H dem unendlich fernen Punkte der in C auf CX, resp. CY errichteten Senkrechten CX', resp. CY' immer näher rückt; also sind auch die unendlich fernen Rückkehrpunkte der Evolute die Pole der Asymptoten von H in Bezug auf den Kreis über F_1F_2, womit der Teil des Zusammenfallens der Kegelschnitte K' und K_1 des Satzes auch für die Hyperbel H' und H_1 bewiesen ist. Und man findet hier ebenso wie bei der Ellipse eine geschlossene Kette von Verwandtschaften, wenn man die Hyperbel H' als die um die imaginäre Achse von H umgelegte Polarcurve von H in Bezug auf den Kreis der Brennpunkte von H betrachtet.

Endlich folgt die Aehnlichkeit der Kegelschnitte K und K'' bei Ellipsen aus der umgekehrten Proportionalität der Achsen von K und K', und bei Hyperbeln aus der senkrechten Lage der Asymptoten von der einen zu jenen der anderen [21]).

---

20) Es werden also die Punkte A_1' und A_2' gefunden, wenn man an diesen Kreis in seinen Schnittpunkten mit CX und CY die Tangenten anlegt.

21) Ist im Allgemeinen K_{n+1} der Rückkehrschnitt der Evolute von K_n,

30. „Jede erste, resp. zweite Normalcurve $\overline{K}^4$ erster Gattung mit dem Rückkehrschnitte K ist die Evolute einer bestimmten mit K concentrischen und ähnlich liegenden Ellipse E, resp. Hyperbel H".

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des vorhergehenden. Ist nämlich K' der Rückkehrschnitt von der Evolute von K, und K'' der Rückkehrschnitt von der Evolute K', so ist K'' ähnlich und ähnlich liegend mit K. Aber dann ist auch die Normalcurve $\overline{K}^4$ erster Gattung concentrisch, ähnlich und ähnlich liegend mit der Normalcurve K^4 erster Gattung, deren Rückkehrschnitt K'' ist, d. h. mit der Evolute von K', und ist die gegebene Normalcurve $\overline{K}^4$ erster Gattung aus Aehnlichkeitsgründen, also die Evolute eines mit K' concentrischen, ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnittes.

Der Satz dieses Artikels ergänzt jenen des Artikels 28.

31. „Die Anti-Evolute einer gleichseitigen Hyperbel H in Bezug auf irgend einen Durchmesser CR ist eine Normalcurve $\overline{K}^4$ zweiter Gattung, und umgekehrt ist die Normalcurve $\overline{K}^4$ zweiter Gattung die Anti-Evolute einer gleichseitigen Hyperbel H in Bezug auf CR. Der Rückkehrschnitt H' von der Anti-Evolute von H für CR ist die um C über 180^0 gedrehte Polarfigur von H in Bezug auf die durch die Brennpunkte [22]) gehende gleichseitige Hyperbel H_1, welche CR zur reellen Achse hat. Und der Rückkehrschnitt H'' der Anti-Evolute von H' in Bezug auf CR ist wieder ähnlich liegend mit H".

Die Anti-Evolute von H für CR (Fig. 10.) ist nach Artikel 10. die erste negative Fusspunktencurve von der gleichseitigen Hyperbel, welche durch das Symbol $H(2 \text{ Wkl } DCR, \cos 2 \text{ Wkl. } DCR)$ anzu-

---

und sind a, b und c die Halbachsen und die lineäre Excentricität von K_1, so sind nach einander die Halbachsen von K_2, K_3, K_4 . . . angewiesen durch $\frac{c^2}{a}, \frac{c^2}{b}; \frac{c^4}{ab^2}, \frac{c^4}{a^2b}; \frac{c^6}{a^3b^2}, \frac{c^6}{a^2b^3} \ldots$ Also bilden die grossen, resp. kleinen Achsen der Kegelschnitte K mit unpaarem Index die unpaaren, und die kleinen, resp. grossen Achsen der Kegelschnitte K mit paarem Index die paaren Glieder von zwei geometrischen Reihen mit der Ratio $\frac{c^2}{ab}$, oder wenn $\frac{b}{a}$ durch m angedeutet wird, mit der Ratio $\frac{1}{m} - m$. Also ist $K = K_1$, wenn $m = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, d. h. wenn b der grösste Teil der nach dem goldenen Schnitte geteilten Halbachse a ist.

22) Hier kann man unter die Brennpunkte auch die imaginären Brennpunkte mitzählen.

deuten ist. Nach Artikel 27. ist sie also eine Normalcurve $\bar{K}^4$ zweiter Gattung und wird der Rückkehrschnitt H' dieser Curve mittelst negativer Verdoppelung der vorhergehenden Hyperbel erhalten. Betrachten wir nun den Rückkehrschnitt H' erst als ganzes Gebilde, so können wir vorläufig vom Zeichen dieser Verdoppelung absehen und deshalb H' als H(2 Wkl. DCR, 2 cos 2 Wkl. DCR) bezeichnen. Andererseits ist nach Artikel 13. die Polarfigur von H in Bezug auf $H_1 = H(\alpha, m)$ durch $H_2 = H(2\alpha, m^2)$ angewiesen. Also werden H' und H_2 coincidiren, wenn den beiden Bedingungen $\alpha =$ Wkl. DCR und $m^2 = 2 \cos 2$ Wkl. DCR Genüge geleistet wird. Nun sagt die erste Bedingung uns, dass die reelle Achse von H_1 mit CR zusammenfallen soll. Und die zweite Bedingung lehrt uns, dass H_1 die Brennpunkte von H enthalten muss. Denn sind H und H_1 die in Fig. 14. vorgeführte Hyperbel und CD_1 nach der ersten Bedingung, also die Gerade CR, so ist $\frac{CP_2}{CP} = m^2$, und diese Gleichung giebt mittelst der zweiten Bedingung $CP' = 2CP$, also in Verbindung mit $CP.CP' = CQ^2$ auch $CQ = CP\sqrt{2}$, d. h. der Punkt Q von H_1 ist Brennpunkt von H.

Da die Deutung der Polarisation von H in Bezug auf H_1 als eine Combination von Drehung und Multiplication das einander Entsprechen der Elemente nicht aufhebt, und dies ebenso wenig geschieht, wenn die Anti-Evolute als eine erste negative Fusspunktencurve betrachtet wird, so ist die Verwandtschaft der Tangenten von H und H' rein bewahrt, wenn wir das oben bei Seite geschaffte Zeichen der Verdoppelung in die Betrachtung aufnehmen, was uns dann nötigt H' als die um C über 180° gedrehte Polarfigur von H in Bezug auf die angegebene gleichseitige Hyperbel zu deuten.

Das übrige des Satzes leuchtet nun unmittelbar ein [23]).

23) Ist allgemein H_{n+1} der Rückkehrschnitt von der Anti-Evolute von H_n für CR, so bilden die reellen Achsen von H_1, H_2, H_3 ... eine geometrische Progression mit der Ratio 2 cos 2 Wkl. DCR. Es wird also H_2 mit H_1 zusammenfallen, wenn 2 cos 2 Wkl. $DCR = 1$, d. h. wenn Wkl. $DCR = 30°$ ist.

X.

Zur Transformation der Thetafunctionen.

Von

Fritz Rohde.

---

§ 1.

Im 25ten Bande der mathematischen Annalen veröffentlicht Herr Prof. Dr. Krause eine Notiz, in welcher er das Problem stellt:

> „Es sollen zwischen den transformirten Thetafunctionen und den ursprünglichen die möglichst allgemeinen Beziehungen hergestellt werden“.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass der Transformationsgrad n eine ungerade Zahl sei, und beschränken uns ferner auf die bekannten Repräsentanten.

Wenn man dann setzt:

$$v' = tv, \quad \tau' = \frac{t\tau + 8\xi}{t_1}, \quad tt_1 = n,$$

so lautet die Transformationsgleichung:

$$\vartheta_0(v', \tau') = \sum_{l=0}^{l=\frac{n-1}{2}} x_l \vartheta_0^{n-2l}(v)\, \vartheta_\alpha^{2l}(v)$$

wo α die Werte 1, 2 oder 3 annehmen kann.

Durch Substitution halber Perioden ergeben sich hieraus die entsprechenden Formeln für die übrigen Thetafunctionen.

Die Constanten x_l kann man auf doppelte Weise darstellen, erstens mit Hülfe der Grössen $\vartheta_\alpha\left(\frac{m+m_1\tau}{n}\right)$ und zweitens als rationale Functionen der ursprünglichen und der transformirten Thetafunctionen für die Nullwerte der Argumente.

Diese beiden Methoden sind durchgeführt von:

Königsberger, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen.

Krause, Acta mathematica 3, pag. 93.

Müller, Zur Transformation der Thetafunctionen. Grunert's Archiv, Band 1, 2te Reihe.

In der vorhin angegebenen Formel kann man eins der Glieder unter dem Summenzeichen durch einen anderen Repräsentanten $\vartheta_0(v'', \tau'')$ ersetzen, so dass dann eine Gleichung von der Form besteht:

$$\vartheta_0(v', \tau') = c\,\vartheta_0(v'', \tau'') + \Sigma' x_l\, \vartheta_0^{n-2l}(v)\, \vartheta_\alpha^{2l}(v),$$

wobei die letzte Summe über genau dieselben Verbindungen zu nehmen ist, wie vorhin, mit Ausnahme einer einzigen und zwar beliebigen. Dieses ist dadurch angedeutet, dass die Summe mit einem Strich versehen ist. Man erhält $\frac{n+1}{2}$ solcher Gleichungen, und, wenn man um halbe Perioden substituirt,

$$4\,\frac{n+1}{2} = 2(n+1) \quad \text{mit} \quad \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \text{ Unbekannten.}$$

Die erste dieser 4 Gleichungen hat die Form:

$$\vartheta_3^n \frac{\vartheta_0(v', \tau')}{\vartheta_0^n(v, \tau)} = c\vartheta_3^n \frac{\vartheta_0(v'', \tau'')}{\vartheta_0^n(v, \tau)} + \Sigma' x_l\, \vartheta_3^{n-2l}\, \vartheta_2^{2l}\, \mathrm{sn}^{2l}(u, k),$$

wobei dann zu setzen ist:

$$u = \pi\vartheta_3^2 v, \quad u' = \pi O_3'^2 v' = t' u \frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2}, \quad u'' = \pi O_3''^2 v'' = t'' u \frac{O_3''^2}{\vartheta_3^2},$$

$$k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \quad c' = \frac{O_2'^2}{O_3'^2}, \quad c'' = \frac{O_2''^2}{O_3''^2},$$

$$\vartheta_\alpha(v, \tau) = \vartheta_\alpha, \quad \vartheta_\alpha(v', \tau') = O_\alpha', \quad \vartheta_\alpha(v'', \tau'') = O_\alpha''.$$

Wir denken uns nun beide Seiten der Gleichung nach Potenzen von u entwickelt. Dann sind die Coefficienten der Potenzen von u rationale Functionen der Grössen ϑ_α, O_α' und O_α''.

Die Entwicklungscoefficienten bei den Functionen: $\frac{\vartheta_0(v' \tau')}{\vartheta_0^n(v, \tau)}$ und $\frac{\vartheta_0(v'', \tau'')}{\vartheta_0^n(v, \tau)}$ sehen wir dabei als unbekannte Grössen an.

Wenn man nun die Coefficienten gleich hoher Potenzen einander gleich setzt, so erhält man eine beliebig grosse Anzahl von Bestimmungsgleichungen. Eliminirt man aus diesen die Unbekannten, so ergiebt sich eine grosse Mannigfaltigkeit von Beziehungen zwischen den ursprünglichen und den transformirten Thetafunctionen für die Nullwerte der Argumente.

In ähnlicher Weise kann man in der eingangs erwähnten Transformationsgleichung 2, 3 u. s. w. Producte durch die Repräsentanten ersetzen. Wenn man alle Producte ersetzt, so erhält man für den Fall, dass n eine ungerade Primzahl ist, den bekannten Satz von Jacobi.

Führt man so viele Repräsentanten ein, dass nur ein einziges Product in der Summe stehen bleibt, so ergiebt sich:

$$\vartheta_0^{n-2l}(v)\,\vartheta_a^{2l}(v) = \sum_1^{\frac{n-1}{2}} x_l\,\vartheta_0(v^{(l)}, \tau^{(l)})$$

wo die Grössen $\vartheta_0(v^{(l)}, \tau^{(l)})$ beliebige Repräsentanten der $n$ten Ordnung bedeuten.

Die Aufgabe lautet dann:

„Es sollen die Potenzen und Producte $n$ter Ordnung linear durch die Repräsentanten ausgedrückt werden".

Man kann zwei Wege einschlagen, um diesen speciellen Fall der Transformation durchzuführen, nämlich:

1) Man drückt die Coefficienten x_l auf die vorhin angegebene Art rational durch die ursprünglichen und transformirten Thetafunctionen aus.

2) Man führt die Transformation der $n$ten Ordnung mit Hülfe der Transformation $(n-1)$ter Ordnung auf folgende Weise durch:

Es sei eine beliebige Potenz der $(n-1)$ten Ordnung als lineare Function der Repräsentanten $(n-1)$ter Ordnung dargestellt, z. B.:

$$\vartheta_0^{n-1}(v) = \Sigma x_\varrho\,\vartheta_a(v^{(\varrho)}, \tau^{(\varrho)})$$

wo die Grössen $\vartheta_a(v^{(\varrho)}, \tau^{(\varrho)})$ beliebige Repräsentanten $(n-1)$ter Ordnung sind.

Multiplicirt man diese Formel mit $\vartheta_\beta(v, \tau)'$, so ergiebt sich die Transformationsgleichung $n$ter Ordnung:

$$\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_0^{n-1}(v) = \Sigma x_\varrho \vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\alpha(v^{(\varrho)}, \tau^{(\varrho)}).$$

Das Problem ist demnach darauf reducirt, die Producte von der Form: $\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_\alpha(v^{(\varrho)}, \tau^{(\varrho)})$ linear durch die Repräsentanten auszudrücken, so dass man folgende Form erhält:

$$\vartheta_\beta(v)\,\vartheta_0^{n-1}(v) = \Sigma x_\sigma \vartheta_\gamma(v^{(\sigma)}, \tau^{(\sigma)})$$

welche eine Transformationsgleichung $n$ter Ordnung darstellt. Genau so findet man die übrigen Producte.

Wie man leicht sieht, enthält das Problem eine Lücke. Es lassen sich nämlich nur diejenigen Producte durch die Repräsentanten ausdrücken, in denen eine einzige ungerade Potenz als Factor vorkommt. Die Transformation der übrigen Producte ist von Herrn Prof. Klein (siehe dessen Arbeit: Zur Theorie der elliptischen Functionen $n$ter Stufe) auf eine von der unseren völlig verschiedene Methode durchgeführt worden.

Man kann beide Methoden benutzen, um zwischen den ursprünglichen und den transformirten Thetafunctionen eine grosse Anzahl von Relationen herzustellen.

Im Sommersemester 1884 liess nun Herr Prof. Dr. Krause im mathematischen Seminar nach beiden Richtungen hin arbeiten, wobei sich für den Fall $n = 3$ eine Anzahl von Relationen ergab, unter anderen auch fast sämtliche schon von Göring gefundene. (Göring, Mathematische Annalen, Band 7).

Die hierbei auftretenden Producte $\vartheta_\beta(v)\vartheta_\alpha(v^{(\varrho)}, \tau^{(\varrho)})$ liessen sich durch mechanisches Ausmultipliciren als lineare Functionen der Repräsentanten dritter Ordnung darstellen. Für den Fall der Transformation fünfter Ordnung war dies aber nicht mehr möglich, und übernahm ich daher im Anfang des folgenden Semesters die Durchführung des schon von Hern Prof. Schröter in seiner Habilitationsschrift begonnenen, aber nicht zu Ende geführten Problems, die erwähnten Producte durch die Repräsentanten der $n$ten Ordnung auszudrücken.

Aehnliche Probleme sind bereits von den Herren Krazer und Prym behandelt worden, und zwar in bedeutend allgemeinerer Form. (Krazer und Prym: Ueber die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel, Acta mathematica, Band 3, pag. 240).

Diese Betrachtungen sind jedoch sehr abstract gehalten, und die Gewinnung von Thetarelationen aus der Endformel verursacht be-

deutende Schwierigkeiten. Demgegenüber ist die Schroeter'sche Methode durchaus elementar, so dass die Durchführung derselben ebenfalls von Interesse sein wird.

Die Abhandlung wird, entsprechend den beiden Methoden, in zwei Abschnitte zerfallen. In § 2 und § 3 wird die erste Methode auf die speciellen Fälle $n = 3$ und $n = 5$ angewandt werden.

§ 4. wird die allgemeine Entwicklung des Products $\vartheta_\beta(v)\vartheta_\alpha(v^{(\varrho)}\, \tau^{(\varrho)})$ bringen, während in den beiden letzten Paragraphen die Anwendung des § 4. auf die Transformation 3ter und 5ter Ordnung behandelt wird.

Als Quellen für die Arbeit sind zu betrachten:

Krause: Sur la transformation des fonctions elliptiques. Acta mathematica, pag. 93.

Müller: Zur Transformation der Thetafunctionen. Grunert's Archiv, Band 1, 2te Reihe.

Krause: Zur Transformation der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Mathematische Annalen, Band 25.

Göring: Die Teilwerte der Jacobi'schen Thetafunctionen. Mathematische Annalen, Band 7.

Schröter, Habilitationsschrift, Breslau.

Der Grundgedanke des Thema's rührt nach beiden Richtungen von Herrn Prof. Dr. Krause her. Ich will an dieser Stelle nicht verfehlen, ihm meinen Dank abzustatten für die Bereitwilligkeit, mit der er mich bei der Lösung der verschiedenen Probleme unterstützte und auf die einschlägige Litteratur hinwies.

Abschnitt I.

§ 2.

Die Transformation dritter Ordnung.

Für den Fall $n = 3$ lautet die am Schluss des vorigen Paragraphen beschriebene Transformationsgleichung:

$$\vartheta_0(3v, 3\tau) + c_0\vartheta_0(v, \tau/_3) = c_1\vartheta_0{}^3(v, \tau).$$

Mit Hülfe der Substitution um halbe Perioden findet man folgendes Gleichungssystem:

$$\vartheta_0(3v,\ 3\tau) + c_0\vartheta_0(v,\ \tau/_3) = \quad c_1\vartheta_0^3(v,\ \tau)$$
$$\vartheta_3(3v,\ 3\tau) + c_0\vartheta_3(v,\ \tau/_3) = \quad c_1\vartheta_3^3(v,\ \tau)$$
$$\vartheta_1(3v,\ 3\tau) - c_0\vartheta_1(v,\ \tau/_3) = -\,c_1\vartheta_1^3(v,\ \tau)$$
$$\vartheta_2(3v,\ 3\tau) + c_0\vartheta_2(v,\ \tau/_3) = \quad c_1\vartheta_2^3(v,\ \tau)$$

Dividirt man sämtliche Gleichungen durch $\vartheta_0^3(v,\ \tau)$, so ergiebt sich:

$$\frac{\vartheta_0(3v,3\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} + c_1\frac{\vartheta_0(v,\tau/_3)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} = c_1$$

$$\frac{\vartheta_3(3v,3\tau)}{\vartheta_0(3v,3\tau)}\cdot\frac{\vartheta_0(3v,3\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} + c_0\frac{\vartheta_3(v,\tau/_3)}{\vartheta_0(v,\tau/_3)}\cdot\frac{\vartheta_0(v,\tau/_3)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} = c_1\frac{\vartheta_3^3(v,\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)}$$

$$\frac{\vartheta_1(3v,3\tau)}{\vartheta_0(3v,3\tau)}\cdot\frac{\vartheta_0(3v,3\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} - c_0\frac{\vartheta_1(v,\tau/_3)}{\vartheta_0(v,\tau/_3)}\cdot\frac{\vartheta_0(v,\tau/_3)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} = -\,c_1\frac{\vartheta_1^3(v,\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)}$$

$$\frac{\vartheta_2(3v,3\tau)}{\vartheta_0(3v,3\tau)}\cdot\frac{\vartheta_0(3v,3\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} + c_0\frac{\vartheta_2(v,\tau/_3)}{\vartheta_0(v,\tau/_3)}\cdot\frac{\vartheta_0(v,\tau/_3)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} = c_1\frac{\vartheta_2^3(v,\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)}$$

In diesem System setzen wir:

$$\frac{\vartheta_0(3v,3\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} = \varphi_0(v) \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_0(v,\tau/_3)}{\vartheta_0^3(v,\tau)} = \varphi_1(v)$$

und drücken die anderen Quotienten durch elliptische Functionen aus. Dabei setzen wir:

$$\vartheta_\alpha(3v,3\tau) = O_\alpha, \quad \vartheta_\alpha(v,\tau/_3) = O_\alpha', \quad \vartheta_\alpha(v,\tau) = \vartheta_\alpha$$

Es ist dann:

$$\frac{\vartheta_3(v,\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\operatorname{dn}\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right). \quad \frac{\vartheta_3(3v,3\tau)}{\vartheta_0(3v,3\tau)} = \frac{O_3}{O_0}\operatorname{dn}\left(3u\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2},\ \frac{O_2^2}{O_3^2}\right),$$

$$\frac{\vartheta_3(v,\tau/_3)}{\vartheta_0(v,\tau/_3)} = \frac{O_3'}{O_0'}\operatorname{dn}\left(u\frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2},\ \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)$$

$$\frac{\vartheta_1(v,\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\operatorname{sn}\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right). \quad \frac{\vartheta_1(3v,3\tau)}{\vartheta_0(3v,3\tau)} = \frac{O_2}{O_3}\operatorname{sn}\left(3u\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2},\ \frac{O_2^2}{O_3^2}\right).$$

$$\frac{\vartheta_1(v,\tau/_3)}{\vartheta_0(v,\tau/_3)} = \frac{O_2'}{O_3'}\operatorname{sn}\left(u\frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2},\ \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)$$

$$\frac{\vartheta_2(v,\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}\operatorname{cn}\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right) \quad \frac{\vartheta_2(3v,3\tau)}{\vartheta_0(3v,3\tau)} = \frac{O_2}{O_0}\operatorname{cn}\left(3u\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2},\ \frac{O_2^2}{O_3^2}\right),$$

$$\frac{\vartheta_2(v,\tau/_3)}{\vartheta_0(v,\tau/_3)} = \frac{O_2'}{O_0'}\operatorname{cn}\left(u\frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2},\ \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)$$

Eingesetzt:

$$\varphi_0(v) + c_0\varphi_1(v) = c_1$$

$$\frac{O_3}{O_0}\,\mathrm{dn}\left(3u\,\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2^2}{O_3^2}\right)\varphi_0(v)+c_0\frac{O_3'}{O_0'}\,\mathrm{dn}\left(u\frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)\varphi_1(v)=c_1\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_0^3}\,\mathrm{dn}^3\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_2}{O_3}\,\mathrm{sn}\left(3u\,\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2^2}{O_3^2}\right)\varphi_0(v)-c_0\frac{O_2'}{O_3'}\,\mathrm{sn}\left(u\frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)\varphi_1(v)=-c_1\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3^3}\,\mathrm{sn}^3\left(u\,\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_2}{O_0}\,\mathrm{cn}\left(3u\,\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2^2}{O_3^2}\right)\varphi_0(v)+c_0\frac{O_2'}{O_0'}\,\mathrm{cn}\left(u\frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)\varphi_1(v)=c_1\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_0^3}\,\mathrm{cn}^3\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

Wir entwickeln nun sämtliche Functionen nach Potenzen von u. Die Entwicklung der elliptischen Functionen lautet:

$$\mathrm{sn}\,u = u - \frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{6\vartheta_3^4}u^3 + \ldots$$

$$\mathrm{cn}\,u = 1 - \frac{u^2}{2} + \ldots$$

$$\mathrm{dn}\,u = 1 - \frac{\vartheta_2^4}{2\vartheta_3^4}u^2 + \ldots$$

$$\varphi_0(v) = y_0 + y_2 u^2 + y_4 u^4 + \ldots$$
$$\varphi_1(v) = y_0' + y_2' u^2 + y_4' u^4 + \ldots$$

Dann nehmen die Gleichungen folgende Gestalt an:

$$y_0 + y_2 u^2 + \ldots + c_0(y_0' + y_2' u^2 + \ldots) = c_1$$

$$\frac{O_3}{O_0}\left(1-\frac{\vartheta_2^4}{2\vartheta_3^4}9u^2\frac{O_3^4}{\vartheta_3^4}+\ldots\right)(y_0+y_2u^2+\ldots)+c_0\frac{O_3'}{O_0'}\left(1-\frac{\vartheta_2^4}{2\vartheta_3^4}u^2\,\frac{O_3'^4}{\vartheta_3^4}\,\ldots\right)\times$$
$$(y_0'+y_2'u^2+\ldots)=c_1\frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_0^3}\left(1-\frac{3}{2}\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}u^2+\ldots\right)$$

$$-\frac{O_2}{O_3}\left(3u\,\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}-\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{6\vartheta_3^4}27u^3\,\frac{O_3^6}{\vartheta_3^6}+\ldots\right)(y_0+y_2u^2+\ldots)$$
$$+c_0\frac{O_2'}{O_3'}\left(u\,\frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2}-\frac{\vartheta_2^4+\vartheta_3^4}{6\vartheta_3^4}u^3\,\frac{O_3'^6}{\vartheta_3^6}+\ldots\right)(y_0'+y_2'u^2+\ldots)=c_1\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3^3}(u^3-\ldots)$$

$$\frac{O_2}{O_0}\left(1-\frac{9u^2O_3^4}{2\vartheta_3^4}+\ldots\right)(y_0+y_2u^2+\ldots)+c_0\frac{O_2'}{O_0'}\left(1-u^2\frac{O_3'^4}{2\vartheta_3^4}+\ldots\right)\times$$
$$(y_0'+y_2'u^2+\ldots)=c_1\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_0^3}\left(1-\frac{3}{2}u^2+\ldots\right).$$

Es gilt nun der Satz, dass in jeder identischen Gleichung die Coefficienten gleich hoher Potenzen der Unbekannten einander gleich sind.

Wenn wir diesen Satz auf unsere Gleichungen anwenden und dabei bis zur $2n$ten, resp. $(2n+1)$ten Potenz fortschreiten, so er-

halten wir $4n$ Gleichungen mit $2(n+1)$ Unbekannten. Da wir nun n beliebig gross annehmen können, so ist klar, dass uns beliebig viele Bestimmungsgleichungen zur Verfügung stehen.

Dabei ist aber zu beachten, dass, je höher man geht, die Gleichungen desto complicirter werden und sich zur Ableitung von Relationen zwischen den verschiedenen Thetafunctionen wenig eignen.

In unserm speciellen Falle wollen wir die Coefficienten von u^0, u^1, u^2 und u^3 einander gleich setzen. Dadurch erhalten wir 8 Gleichungen mit 6 Unbekannten. Diese letzteren reduciren sich jedoch auf 4, da y_0 und y_0' bekannt sind, denn es ist:

$$y_0 = \frac{O_0}{\vartheta_0^3} \quad \text{und} \quad y_0' = \frac{O_0'}{\vartheta_0^3}$$

Die Bestimmungsgleichungen lauten:

$$\text{I} \quad y_0 + c_0 y_0' = c_1$$

$$\text{II} \quad \frac{O_3}{O_0} y_0 + c_0 \frac{O_3'}{O_0'} y_0' = c_1 \frac{\vartheta_3^3}{\vartheta_0^3}$$

$$\text{III} \quad \frac{3 O_2 O_3}{\vartheta_3^2} y_0 - c_0 \frac{O_2' O_3'}{\vartheta_3^2} y_0' = 0$$

$$\text{IV} \quad \frac{O_2}{O_0} y_0 + c_0 \frac{O_2'}{O_0'} y_0' = c_1 \frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_0^3}$$

$$\text{V} \quad y_2 + c_0 y_2' = 0$$

$$\text{VI} \quad \frac{O_3}{O_0} y_2 - \frac{9 \vartheta_2^4 O_3^5}{2 \vartheta_3^8 O_0} y_0 + c_0 \frac{O_3'}{O_0'} y_2' - c_0 \frac{\vartheta_2^4 O_3'^5}{2 \vartheta_3^8 O_0'} y_0' = -\frac{3}{2} c_1 \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_0^3 \vartheta_3}$$

$$\text{VII} \quad -\frac{3 O_2 O_3}{\vartheta_3^2} y_2 + \frac{9 O_2 O_3^5 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)}{2 \vartheta_3^{10}} y_0 + c_0 \frac{O_2' O_3'}{\vartheta_3^2} y_2'$$
$$- c_0 \frac{O_2' O_3'^5 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)}{\vartheta_3^{10}} y_0' = c_1 \frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3^3}$$

$$\text{VIII} \quad \frac{O_2}{O_0} y_2 - 9 \frac{O_2 O_3^4}{O_0 \vartheta_3^4} y_0 + c_0 \frac{O_2'}{O_0'} y_2' - c_0 \frac{O_2' O_3'^4}{O_0' \vartheta_3^4} y_0' = -\frac{3 c_1 \vartheta_2^3}{2 \vartheta_0^3}$$

Mit diesen Gleichungssystemen combiniren wir das folgende:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(3v, 3\tau) + c_2 \vartheta_0(v, \tau_{/3}) &= c_3 \vartheta_3^2(v, \tau) \vartheta_0(v, \tau) \\
\vartheta_3(3v, 3\tau) + c_2 \vartheta_3(v, \tau_{/3}) &= c_3 \vartheta_0^2(v, \tau) \vartheta_3(v, \tau) \\
\vartheta_1(3v, 3\tau) - c_2 \vartheta_1(v, \tau_{/3}) &= c_3 \vartheta_2^2(v, \tau) \vartheta_1(v, \tau) \\
\vartheta_2(3v, 3\tau) + c_2 \vartheta_2(v, \tau_{/3}) &= - c_3 \vartheta_1^2(v, \tau) \vartheta_2(v, \tau)
\end{aligned}$$

Dividirt man wieder durch $\vartheta_0^3(v,\tau)$ und führt die elliptischen Functionen ein, so ergiebt sich:

$$\varphi_0(v) + c_2\varphi_1(v) = c_3 \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^2} \mathrm{dn}^2\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_3}{O_0} \mathrm{dn}\left(3u\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2^2}{O_3^2}\right)\varphi_0(v) + c_2\frac{O_3'}{O_0'}\mathrm{dn}\left(u\frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right) = c_3\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}\mathrm{dn}\left(u \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_2}{O_3}\mathrm{sn}\left(3u\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2^2}{O_3^2}\right)\varphi_0(v) - c_2\frac{O_2'}{O_3'}\mathrm{sn}\left(u\frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)$$
$$= c_3\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3\vartheta_0^2}\mathrm{sn}\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)\mathrm{cn}^2\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_2}{O_0}\mathrm{cn}\left(3u\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2^2}{O_3^2}\right)\varphi_0(v) + c_2\frac{O_2'}{O_0'}\mathrm{cn}\left(u\frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)$$
$$= -c_3\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3^2\vartheta_0}\mathrm{sn}^2\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)\mathrm{cn}\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

Wenn man nun nach Potenzen van u entwickelt, so bleibt die linke Seite genau so, wie beim vorigen System, nur tritt c_2 an Stelle von c_0.

Wir setzen sofort die Coefficienten gleich hoher Potenzen einander gleich und erhalten:

$$\text{I} \quad y_0 + c_2 y_0' = c_3\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_0^2}$$

$$\text{II} \quad \frac{O_3}{O_0}y_0 + c_2\frac{O_3'}{O_0'}y_0' = c_3\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0}$$

$$\text{III} \quad \frac{3O_2O_3}{\vartheta_3^2}y_0 - c_2\frac{O_2'O_3'}{\vartheta_3^2}y_0' = c_3\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3\vartheta_0^2}$$

$$\text{IV} \quad \frac{O_2}{O_0}y_0 + c_2\frac{O_2'}{O_0'}y_0' = 0$$

$$\text{V} \quad y_2 + c_2 y_2' = -\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_0^2\vartheta_3^2}$$

$$\text{VI} \quad \frac{O_3}{O_0}y_2 - \frac{9\vartheta_2^4 O_3^5}{2\vartheta_3^8 O_0}y_0 + c_2\frac{O_3'}{O_0'}y_2' - c_2\frac{\vartheta_2^4 O_3'^5}{2\vartheta_3^8 O_0'}y_0' = -\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_0\vartheta_3^3}c_3$$

$$\text{VII} \quad \frac{3O_2O_3}{\vartheta_3^2}y_2 - \frac{9O_2O_3^5(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)}{2\vartheta_3^{10}}y_0 + c_2\frac{O_2'O_3'}{\vartheta_3^2}y_2' - c_2\frac{O_2'O_3'^5(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4)}{\vartheta_3^{10}}$$
$$= -\frac{(7\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)\vartheta_2^3}{6\vartheta_3^5\vartheta_0^2}c_3$$

$$\text{VII} \quad \frac{O_2}{O_0}y_2 - 9\frac{O_2O_3^4}{O_0\vartheta_3^4}y_0 + c_2\frac{O_2'}{O_0'}y_2' - c_2\frac{O_2'O_3'^4}{O_0'\vartheta_3^4}y_0' = -\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3^2\vartheta_0}c_3$$

Dies ist wieder ein System von 8 Gleichungen mit 4 Unbekannten. Zusammen mit dem vorigen System haben wir also 16 Gleichungen mit 8 Unbekannten. Diese reduciren sich jedoch auf 6, da in beiden Systemen die Unbekannten y_2 und y_2' denselben Wert haben.

Man gelangt ausserdem noch zu 2 neuen Systemen, indem man in der Gleichung:

$$\vartheta_0(3v, 3\tau) + x_0\,\vartheta_0(v, \tau/_3) = x_1\,\vartheta_\alpha^2(v, \tau)\,\vartheta_0(v, \tau)$$

das eine Mal $\alpha = 1$, das andere Mal $\alpha = 2$ setzt. Es ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(3v, 3\tau) + c_4\,\vartheta_0(v, \tau/_3) &= c_5\,\vartheta_1^2(v, \tau)\,\vartheta_0(v, \tau)\\
\vartheta_3(3v, 3\tau) + c_4\,\vartheta_3(v, \tau/_3) &= c_5\,\vartheta_2^2(v, \tau)\,\vartheta_3(v, \tau)\\
\vartheta_1(3v, 3\tau) - c_4\,\vartheta_1(v, \tau/_3) &= -c_5\,\vartheta_0^2(v, \tau)\,\vartheta_1(v, \tau)\\
\vartheta_2(3v, 3\tau) + c_4\,\vartheta_2(v, \tau/_3) &= c_5\,\vartheta_3^2(v, \tau)\,\vartheta_2(v, \tau)
\end{aligned}$$

und als letztes System:

$$\begin{aligned}
\vartheta_0(3v, 3\tau) + c_6\,\vartheta_0(v, \tau/_3) &= c_7\,\vartheta_2^2(v, \tau)\,\vartheta_0(v, \tau)\\
\vartheta_3(3v, 3\tau) + c_6\,\vartheta_3(v, \tau/_3) &= c_7\,\vartheta_1^2(v, \tau)\,\vartheta_3(v, \tau)\\
\vartheta_1(3v, 3\tau) - c_6\,\vartheta_1(v, \tau/_3) &= -c_7\,\vartheta_3^2(v, \tau)\,\vartheta_1(v, \tau)\\
\vartheta_2(3v, 3\tau) + c_6\,\vartheta_2(v, \tau/_3) &= -c_7\,\vartheta_0^2(v, \tau)\,\vartheta_2(v, \tau)
\end{aligned}$$

Wenn man die Unbekannten eliminirt, so erhält man aus dem ersten Gleichungssystem folgende 3 Relationen:

$$1.\qquad \begin{aligned}
\left(3\frac{O_2}{O_3'} + \frac{O_2'}{O_3}\right)\vartheta_3^3 &= \left(3\frac{O_2}{O_0'} + \frac{O_2'}{O_0}\right)\vartheta_0^3\\
\left(3\frac{O_3}{O_2'} + \frac{O_3'}{O_2}\right)\vartheta_2^3 &= \left(3\frac{O_3}{O_0'} + \frac{O_3'}{O_0}\right)\vartheta_0^3\\
\left(3\frac{O_0}{O_3'} + \frac{O_0'}{O_3}\right)\vartheta_3^3 &= \left(3\frac{O_0}{O_2'} + \frac{O_0'}{O_2}\right)\vartheta_2^3
\end{aligned}$$

Aus je einem der 3 letzten Gleichungssysteme resultiren die Beziehungen:

$$2.\qquad \begin{aligned}
\frac{O_2}{O_0} - \frac{O_2'}{O_0'} &= -\frac{\vartheta_3}{\vartheta_0^3}(3O_2O_3 + O_2'O_3')\\
\frac{O_3}{O_2} - \frac{O_3'}{O_2'} &= \frac{\vartheta_0}{\vartheta_2^3}(3O_0O_3 + O_0'O_3')\\
\frac{O_0}{O_3} - \frac{O_0'}{O_3'} &= \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3^3}(3O_0O_2 + O_0'O_2')
\end{aligned}$$

ferner ein analoges System:

$$\frac{O_3}{O_0}-\frac{O_3'}{O_0'}=-\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2^3}(3O_2O_3+O_2'O_3')$$

$$3.\qquad \frac{O_0}{O_2}-\frac{O_0'}{O_2'}=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2^3}(3O_0O_3+O_0'O_3')$$

$$\frac{O_2}{O_3}-\frac{O_2'}{O_3'}=-\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3^3}(3O_0O_2+O_0'O_2')$$

und endlich die 3 eleganten Relationen:

$$\frac{O_0O_3'-O_3O_0'}{O_0O_2'-O_2O_0'}=\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$$

$$4.\qquad \frac{O_3O_2'-O_2O_3'}{O_0O_2'-O_2O_0'}=\frac{\vartheta_0}{\vartheta_3}$$

$$\frac{O_0O_3'-O_3O_0'}{O_2O_3'-O_3O_2'}=-\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0}$$

Durch Combination von 2. und 4. erhält man das Gleichungssystem:

$$\frac{\vartheta_0^2}{O_0O_0'}(O_3O_2'-O_2O_3')=3O_2O_3+O_2'O_3'$$

$$5.\qquad \frac{\vartheta_2^2}{O_2O_2'}(O_0O_3'-O_3O_0')=3O_0O_3+O_0'O_3'$$

$$\frac{\vartheta_3^2}{O_3O_3'}(O_0O_2'-O_2O_0')=3O_0O_2+O_0'O_2'$$

Diese letzten 3 Gleichungen sind schon von Göring aufgestellt worden. (Göring: Ueber die Teilwerte der Jacobi'schen Thetafunctionen, Mathematische Annalen, Band 7, pag. 311. Formel 22).

Die beiden Gleichungssysteme 4. und 5. ergeben noch die Beziehung:

$$6.\qquad \vartheta_0^3(O_3O_2'-O_2O_3')+\vartheta_2^3(O_0O_3'-O_3O_0')=\vartheta_3^3(O_0O_2'-O_2O_0')$$

Es erübrigt noch, die Beziehungen zwischen je drei Repräsentanten aufzustellen. Aus dem in § 1. gesagten ist ersichtlich, dass für den Fall $n=3$ Relationen von der Form:

$$\vartheta_\alpha(v',\tau')+c_0\vartheta_\alpha(v'',\tau'')+c_1\vartheta_\alpha(v''',\tau''')=0$$

existiren müssen. Wir betrachten den speciellen Fall:

$$\vartheta_0(v,\tau/_3)+c_0\vartheta_0\left(v,\frac{\tau+8}{3}\right)+c_1\vartheta_0\left(v,\frac{\tau+16}{3}\right)=0$$

Durch Substitution halber Perioden erhält man das System:

$$\vartheta_0(v, \tau/_3) + c_0 \vartheta_0\left(v, \frac{\tau+8}{3}\right) + c_1 \vartheta_0\left(v, \frac{\tau+16}{3}\right) = 0$$

$$\vartheta_3(v, \tau/_3) + c_0 \vartheta_3\left(v, \frac{\tau+8}{3}\right) + c_1 \vartheta_3\left(v, \frac{\tau+16}{3}\right) = 0$$

$$\vartheta_1(v, \tau/_3) + c_0 \vartheta_1\left(v, \frac{\tau+8}{3}\right) + c_1 \vartheta_1\left(v, \frac{\tau+16}{3}\right) = 0$$

$$\vartheta_2(v, \tau/_3) + c_0 \vartheta_2\left(v, \frac{\tau+8}{3}\right) + c_1 \vartheta_2\left(v, \frac{\tau+16}{3}\right) = 0$$

Berechnet man c_0 und c_1 aus den ersten beiden Gleichungen, so findet man:

$$c_0 = -\frac{O_0' O_3''' - O_3' O_0'''}{O_0'' O_3''' - O_3'' O_0'''} \qquad c_1 = -\frac{O_0'' O_3' - O_3'' O_0'}{O_0'' O_3''' - O_3'' O_0'''}$$

Andrerseits ist aber nach der Jacobi'schen Relation:

$$\vartheta_0(v, \tau/_3) + \alpha \vartheta_0\left(v, \frac{\tau+8}{3}\right) + \alpha^2 \vartheta_0\left(v, \frac{\tau+16}{3}\right) = 0$$

Demnach:

$$c_0 = \alpha \qquad c_1 = \alpha^2$$

Durch Vergleichung dieser auf 2 verschiedene Arten gefundenen Coefficienten findet man folgende Relationen:

$$O_3' O_0''' - O_0' O_3''' = \alpha\,(O_0'' O_3''' - O_3'' O_0''')$$
$$O_0' O_3'' - O_3' O_0'' = \alpha^2(O_0'' O_3''' - O_3'' O_0''')$$
$$O_3' O_0''' - O_0' O_3''' = \alpha^2(O_0' O_3'' - O_3' O_0'')$$

Ebenso, wenn man c_0 und c_1 aus je 2 anderen Gleichungen berechnet:

$$O_2' O_0''' - O_0' O_2''' = \alpha\,(O_0'' O_2''' - O_2'' O_0''')$$
$$O_0' O_2'' - O_2' O_0'' = \alpha^2(O_0'' O_2''' - O_2'' O_0''')$$
$$O_2' O_0''' - O_0' O_2''' = \alpha^2(O_0' O_2'' - O_2' O_0'')$$

und:

$$O_2' O_3''' - O_3' O_2''' = \alpha\,(O_3'' O_2''' - O_2'' O_3''')$$
$$O_3' O_2'' - O_2' O_3'' = \alpha^2(O_3'' O_2''' - O_2'' O_3''')$$
$$O_2' O_3''' - O_3' O_2''' = \alpha^2(O_3' O_2'' - O_2' O_3'')$$

$$O_0'(O_2' O_3' - O_2''' O_3''') = \alpha\, O_0''(O_2''' O_3''' - O_2'' O_3'')$$
$$O_0'(O_2'' O_3'' - O_2' O_3') = \alpha^2 O_0'''(O_2''' O_3''' - O_2'' O_3'')$$
$$O_0'''(O_2' O_3' - O_2''' O_3''') = \alpha^2 O_0''(O_2'' O_3'' - O_2' O_3')$$

$$O_2'(O_0'O_3'-O_0'''O_3''') = \alpha\, O_2''(O_0'''O_3'''-O_0''O_3'')$$
$$O_2'(O_0''O_3''-O_0'O_3') = \alpha^2 O_2'''(O_0'''O_3'''-O_0''O_3'')$$
$$O_2'''(O_0'O_3'-O_0'''O_3''') = \alpha^2 O_2''(O_0''O_3''-O_0'O_3')$$

$$O_3'(O_0'O_2'-O_0'''O_2''') = \alpha\, O_3'(O_0'''O_2'''-O_0''O_2'')$$
$$O_3'(O_0''O_2''-O_0'O_2') = \alpha^2 O_3'''(O_0'''O_2'''-O_0''O_2'')$$
$$O_3'''(O_0'O_2'-O_0'''O_2''') = \alpha^2 O_3'(O_0''O_2''-O_0'O_2')$$

Es ist klar, dass man die Repräsentanten noch auf 3 andere Arten zu je dreien combiniren kann und daraus ebenfalls eine grosse Anzahl von Relationen erhalten kann. Ich unterlasse dies jedoch und wende mich zum Fall $n = 5$.

§ 3.

Die Transformation fünfter Ordnung.

Für den Fall $n = 5$ lautet die erste Transformationsgleichung:

$$\vartheta_0(v', \tau') = x_1\, \vartheta_0(v'', \tau'') + x_2 \vartheta_0^3(v, \tau)\, \vartheta_1^2(v, \tau) + x_3 \vartheta_0(v, \tau) \vartheta_1^4(v, \tau)$$

Bildet man nun durch Substitution halber Perioden die entsprechenden Gleichungen und setzt der Einfachheit halber:

$$v' = 5v, \quad \tau' = 5\tau, \quad v'' = v, \quad \tau'' = \tau/_5,$$

so ergiebt sich folgendes System:

$$\vartheta_0(5v, 5\tau) = x_1 \vartheta_0(v, \tau/_5) + x_2 \vartheta_0^3(v, \tau) \vartheta_1^2(v, \tau) + x_3 \vartheta_0(v, \tau) \vartheta_1^4(v, \tau)$$
$$\vartheta_3(5v, 5\tau) = x_1 \vartheta_3(v, \tau/_5) + x_2 \vartheta_3^3(v, \tau) \vartheta_2^2(v, \tau) + x_3 \vartheta_3(v, \tau) \vartheta_2^4(v, \tau)$$
$$\vartheta_1(5v, 5\tau) = x_1 \vartheta_1(v, \tau/_5) + x_2 \vartheta_1^3(v, \tau) \vartheta_0^2(v, \tau) + x_3 \vartheta_1(v, \tau) \vartheta_0^4(v, \tau)$$
$$\vartheta_2(5v, 5\tau) = x_1 \vartheta_2(v, \tau/_5) + x_2 \vartheta_2^3(v, \tau) \vartheta_3^2(v, \tau) + x_3 \vartheta_2(v, \tau) \vartheta_3^4(v, \tau)$$

Dividirt durch $\vartheta_0^5(v, \tau)$:

$$\frac{\vartheta_0(5v, 5\tau)}{\vartheta_0^5(v, \tau)} = x_1 \frac{\vartheta_0(v, \tau/_5)}{\vartheta_0^5(v, \tau)} + x_2 \frac{\vartheta_1^2(v, \tau)}{\vartheta_0^2(v, \tau)} + x_3 \frac{\vartheta_1^4(v, \tau)}{\vartheta_0^4(v, \tau)}$$

$$\frac{\vartheta_3(5v, 5\tau)}{\vartheta_0(5v, 5\tau)} \frac{\vartheta_0(5v, 5\tau)}{\vartheta_0^5(v, \tau)} = x_1 \frac{\vartheta_3(v, \tau/_5)}{\vartheta_0(v, \tau/_5)} \frac{\vartheta_0(v, \tau/_5)}{\vartheta_0^5(v, \tau)} + x_2 \frac{\vartheta_3^3(v, \tau)}{\vartheta_0^3(v, \tau)} \frac{\vartheta_2^2(v, \tau)}{\vartheta_0^2(v, \tau)}$$
$$+ x_3 \frac{\vartheta_3(v, \tau)}{\vartheta_0(v, \tau)} \frac{\vartheta_2^4(v, \tau)}{\vartheta_0^4(v, \tau)}$$

$$\frac{\vartheta_1(5v, 5\tau)}{\vartheta_0(5v, 5\tau)} \frac{\vartheta_0(5v, 5\tau)}{\vartheta_0^5(v, \tau)} = x_1 \frac{\vartheta_1(v, \tau/_5)}{\vartheta_0(v, \tau/_5)} \frac{\vartheta_0(v, \tau/_5)}{\vartheta_0^5(v. \tau)} + x_2 \frac{\vartheta_1^3(v, \tau)}{\vartheta_0^3(v, \tau)} + x_3 \frac{\vartheta_1(v, \tau)}{\vartheta_0(v, \tau)}$$

$$\frac{\vartheta_2(5v,5\tau)}{\vartheta_0(5v,5\tau)}\,\frac{\vartheta_0(5v,5\tau)}{\vartheta_0^5(v,\tau)}=x_1\frac{\vartheta_2(v,\tau/_5)}{\vartheta_0(v,\tau/_5)}\,\frac{\vartheta_0(v,\tau/_5)}{\vartheta_0^5(v,\tau)}+x_2\frac{\vartheta_2^3(v,\tau)}{\vartheta_0^3(v,\tau)}\,\frac{\vartheta_3^2(v,\tau)}{\vartheta_0^2(v,\tau)}$$
$$+x_3\frac{\vartheta_2(v,\tau)}{\vartheta_0(v,\tau)}\,\frac{\vartheta_3^4(v,\tau)}{\vartheta_0^4(v,\tau)}$$

Wir setzen nun:

$$\frac{\vartheta_0(5v,5\tau)}{\vartheta_0^5(v,\tau)}=\varphi_0(v)\quad\text{und}\quad\frac{\vartheta_0(v,\tau/_5)}{\vartheta_0^5(v,\tau)}=\varphi_1(v)$$

Führt man jetzt die elliptischen Functionen ein, so gestalten sich die **Gleichungen** folgendermassen:

$$\varphi_0(v)=x_1\varphi_1(v)+x_2\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\operatorname{sn}^2\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)+x_3\frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4}\operatorname{sn}^4\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_3}{O_0}\operatorname{dn}\left(5u\,\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}.\ \frac{O_2^2}{O_3^2}\right)\varphi_0(v)=x_1\frac{O_3'}{O_0'}\operatorname{dn}\left(u\ \frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2},\ \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)$$
$$\varphi_1(v)+x_2\frac{\vartheta_3^3\vartheta_2^2}{\vartheta_0^5}\operatorname{dn}^3\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)+x_3\frac{\vartheta_3\vartheta_2^4}{\vartheta_0^5}\operatorname{dn}\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)\operatorname{cn}^4\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_2}{O_3}\operatorname{sn}\left(5u\,\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2}.\ \frac{O_2^2}{O_3^2}\right)\varphi_0(v)=x_1\frac{O_2'}{O_3'}\operatorname{sn}\left(u,\ \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)\varphi_1(v)+x_2\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3^3}\operatorname{sn}^3\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$
$$+x_3\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}\operatorname{sn}\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_2}{O_0}\operatorname{cn}\left(5u\,\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2},\ \frac{O_2^2}{O_3^2}\right)\varphi_0(v)=x_1\frac{O_2'}{O_0'}\operatorname{cn}\left(u\ \frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2},\ \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)\varphi_1(v)$$
$$+x_1\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3^2}{\vartheta_0^5}\operatorname{cn}^3\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)\operatorname{dn}^2\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$
$$+x_3\frac{\vartheta_2\vartheta_3^4}{\vartheta_0^5}\operatorname{cn}\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)\operatorname{dn}^4\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

Es ist aber ebenso, wie früher:

$$\varphi_0(v)=y_0+y_2u^2+y_4u^4+\dots$$
$$\varphi_1(v)=y_0'+y_2'u^2+y_4'u^4+\dots$$

Entwickelt man jetzt die Functionen nach Potenzen von u und **setzt** die Coefficienten gleich hoher Potenzen einander gleich, so er**giebt** sich:

I $\quad y_0=x_1y_0'$

II $\quad \dfrac{O_3}{O_0}y_0=\dfrac{O_3'}{O_0'}x_1y_0'+x_2\dfrac{\vartheta_3^3\vartheta_2^2}{\vartheta_0^5}+x_3\dfrac{\vartheta_3\vartheta_2^4}{\vartheta_0^5}$

III $\quad \dfrac{5O_2O_3}{\vartheta_3^2}y_0=\dfrac{O_2'O_3'}{\vartheta_3^2}x_1y_0'+\dfrac{\vartheta_2}{\vartheta_3}x_3$

$$\text{IV}\quad \frac{O_2}{O_0}y_0=\frac{O_2'}{O_0'}x_1y_0'+\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3^2}{\vartheta_0^5}x_2+\frac{\vartheta_2\vartheta_3^4}{\vartheta_0^5}x_3$$

$$\text{V}\quad y_2=x_1y_2'+\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}x_2$$

$$\text{VI}\quad -\frac{25\vartheta_2^4O_3^5}{2\vartheta_3^8O_0}y_0+\frac{O_3}{O_0}y_2=-\frac{\vartheta_2^4O_3'^5}{2\vartheta_3^8O_0'}x_2y_0'+\frac{O_3'}{O_0'}x_1y_2'$$
$$-\frac{\vartheta_2^2(2\vartheta_3^4+3\vartheta_2^4)}{2\vartheta_3\vartheta_0^5}x_2-\frac{\vartheta_2^4(4\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)}{2\vartheta_3^3\vartheta_0^5}x_3$$

$$\text{VII}\quad -\frac{125O_3^5O_2(\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)}{6\vartheta_3^{10}}y_0+\frac{5O_2O_3}{\vartheta_3^2}y_2=-\frac{O_3'^5O_2'(\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)}{6\vartheta_3^{10}}x_1y_0'$$
$$+\frac{O_2'O_3'}{\vartheta_3^2}x_1y_2'+\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_3^3}x_2-\frac{\vartheta_2(\vartheta_3^4+\vartheta_2^4)}{6\vartheta_3^5}x_3$$

$$\text{VIII}\quad -\frac{25O_2O_3^4}{2\vartheta_3^4O_0}y_0+\frac{O_2}{O_0}y_2=-\frac{O_2'O_3'^4}{2\vartheta_3^4O_0'}x_1y_0'+\frac{O_2'}{O_0'}x_1y_2'$$
$$-\frac{\vartheta_2^3(3\vartheta_3^4+2\vartheta_2^4)}{2\vartheta_0^5\vartheta_3^2}x_2-\frac{\vartheta_2(\vartheta_3^4+4\vartheta_2^4)}{2\vartheta_0^5}x_3$$

Ebenso ergiebt sich das 2te Gleichungssystem nach Einführung der elliptischen Functionen:

$$\varphi_0(v)=x_4\varphi_1(v)+x_5+x_6\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\,\mathrm{sn}^2\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_3}{O_0}\,\mathrm{dn}\left(5u\,\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2},\frac{O_2^2}{O_3^2}\right)\varphi_0(v)=x_4\frac{O_3'}{O_0'}\,\mathrm{dn}\left(u,\ \frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2},\frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)\varphi_1(v)$$
$$+x_5\frac{\vartheta_3^5}{\vartheta_0^5}\,\mathrm{dn}^5\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)+x_6\frac{\vartheta_3^3\vartheta_2^2}{\vartheta_0^5}\,\mathrm{dn}^3\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_2^2}\right)\mathrm{cn}^2\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_2}{O_3}\,\mathrm{sn}\left(5u\,\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2},\frac{O_2^2}{O_3^2}\right)\varphi_0(v)=x_4\frac{O_2'}{O_3'}\,\mathrm{sn}\left(u\ \frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2},\frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)\varphi_1(v)$$
$$+x_5\frac{\vartheta_2^5}{\vartheta_0^5}\,\mathrm{sn}^5\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)+x_6\frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_0^3}\,\mathrm{sn}^3\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{Q_2}{O_0}\,\mathrm{cn}\left(5u\,\frac{O_3^2}{\vartheta_3^2},\frac{O_2^2}{O_3^2}\right)\varphi_0(v)=x_4\frac{O_2'}{O_0'}\,\mathrm{cn}\left(u\ \frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2},\frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right)\varphi_1(v)$$
$$+x_5\frac{\vartheta_2^5}{\vartheta_0^5}\,\mathrm{cn}^5\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)+x_6\frac{\vartheta_2^3\vartheta_3^2}{\vartheta_0^5}\,\mathrm{cn}^3\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)\mathrm{dn}^2\left(u,\ \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

und, wenn man die Coefficienten gleicher Potenzen einander gleich setzt:

$$y_0 = x_4 y_0' + x_5$$

$$\frac{O_3}{O_0} y_0 = \frac{O_3'}{O_0'} x_4 y_0' + \frac{\vartheta_3^5}{\vartheta_0^5} x_5 + \frac{\vartheta_3^3 \vartheta_2^2}{\vartheta_0^5} x_6$$

$$\frac{5 O_2 O_3}{\vartheta_3^2} y_0 = \frac{O_2' O_3'}{\vartheta_3^2} x_4 y_0'$$

$$\frac{O_2}{O_0} y_0 = \frac{O_2'}{O_0'} x_4 y_0' - \frac{\vartheta_2^5}{\vartheta_0^5} x_5 + \frac{\vartheta_2^3 \vartheta_3^2}{\vartheta_0^5} x_6$$

$$y_2 = x_4 y_2' + \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2} x_6$$

$$\frac{O_3}{O_0} y_2 - \frac{25 \vartheta_2^4 O_3^5}{2 \vartheta_3^8 O_0} y_0 = \frac{O_3'}{O_0'} x_4 y_2' - \frac{\vartheta_2^4 O_3'^5}{2 \vartheta_3^8 Q_0'} x_4 y_0' - \frac{5 \vartheta_3 \vartheta_2^4}{\vartheta_0^5} x_5 - \frac{\vartheta_2^2 (2 \vartheta_3^4 + 3 \vartheta_2^4)}{2 \vartheta_3 \vartheta_0^5} x_6$$

$$\frac{5 O_2 O_3}{\vartheta_3^2} y_2 - \frac{125 (\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4) O_3^5 O_2}{6 \vartheta_3^{10}} y_0 = \frac{O_2' O_3'}{\vartheta_3^2} x_4 y_2' - \frac{(\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4) O_3'^5 O_2'}{6 \vartheta_3^{10}} x_4 y_0' + \frac{\vartheta_2^3}{\vartheta_0^3} x_6$$

$$\frac{O_2}{O_0} y_2 - \frac{25 O_3^4 O_2}{2 \vartheta_3^4 O_0} y_0 = \frac{O_2'}{O_0'} x_4 y_2' - \frac{O_2' O_3'^4}{2 \vartheta_3^4 O_0'} x_4 y_0' - \frac{5 \vartheta_2^5}{2 \vartheta_0^5} x_5 - \frac{\vartheta_2^3 (3 \vartheta_3^4 + 2 \vartheta_2^4)}{2 \vartheta_3^2 \vartheta_0^5} x_6$$

Das dritte System lautet, wenn man die elliptischen Functionen einführt:

$$\varphi_0(v) = x_7 \varphi_1(v) + x_8 + x_9 \frac{\vartheta_2^4}{\vartheta_3^4} \operatorname{sn}^4\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_3}{O_0} \operatorname{dn}\left(5u \frac{O_3^2}{\vartheta_3^2} \cdot \frac{O_2^2}{O_3^2}\right) \varphi_0(v) = x_7 \frac{O_3'}{O_0'} \operatorname{dn}\left(u \frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2} \cdot \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right) \varphi_1(v) + x_8 \frac{\vartheta_3^5}{\vartheta_0^5} \operatorname{dn}^5\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right) + x_9 \frac{\vartheta_3 \vartheta_2^4}{\vartheta_0^5} \operatorname{dn}\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right) \operatorname{cn}^4\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_2}{O_3} \operatorname{sn}\left(5u \frac{O_2^2}{\vartheta_3^2} \cdot \frac{O_2^2}{O_3^2}\right) \varphi_0(v) = x_7 \frac{O_2'}{O_3'} \operatorname{cn}\left(u \frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right) \varphi_1(v) + x_8 \frac{\vartheta_2^5}{\vartheta_0^5} \operatorname{sn}^5\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right) + x_9 \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \operatorname{sn}\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

$$\frac{O_2}{O_0} \operatorname{cn}\left(5u \frac{O_3^2}{\vartheta_3^2} \cdot \frac{O_2^2}{O_3^2}\right) \varphi_0(v) = x_7 \frac{O_2'}{O_0'} \operatorname{cn}\left(u \frac{O_3'^2}{\vartheta_3^2}, \frac{O_2'^2}{O_3'^2}\right) \varphi_1(v) + x_8 \frac{\vartheta_2^5}{\vartheta_0^5} \operatorname{cn}^5\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right) + x_9 \frac{\vartheta_2 \vartheta_3^4}{\vartheta_0^5} \operatorname{cn}\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right) \operatorname{dn}^4\left(u, \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\right)$$

und hieraus folgt:

$$\text{I} \quad y_0 = x_7 y_0' + x_8$$

$$\text{II} \quad \frac{O_3}{O_0} y_0 = \frac{O_3'}{O_0'} x_7 y_0' + x_8 \frac{\vartheta_3^5}{\vartheta_0^5} + x_9 \frac{\vartheta_3 \vartheta_2^4}{\vartheta_0^5}$$

$$\text{III} \quad \frac{5 O_2 O_3}{\vartheta_3^2} y_0 = \frac{O_2' O_3'}{\vartheta_3^2} x_7 y_0' + x_9 \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$$

$$\text{IV} \quad \frac{O_2}{O_0} y_0 = \frac{O_2'}{O_0'} x_7 y_0' + x_8 \frac{\vartheta_2^5}{\vartheta_0^5} + x_9 \frac{\vartheta_2 \vartheta_3^4}{\vartheta_0^5}$$

$$\text{V} \quad y_2 = x_7 y_2'$$

$$\text{VI} \quad \frac{O_3}{O_0} y_2 - \frac{25 \vartheta_2^4 O_3^5}{2 \vartheta_3^8 O_0} y_0 = \frac{O_3'}{O_0'} x_7 y_2' - \frac{\vartheta_2^4 O_3'^5}{2 \vartheta_3^8 O_0'} x_7 y_0' - \frac{5 \vartheta_3 \vartheta_2^4}{\vartheta_0^5} x_8 - \frac{\vartheta_2^4 (4 \vartheta_3^4 + \vartheta_2^4)}{2 \vartheta_3^3 \vartheta_0^5} x_9$$

$$\text{VII} \quad \frac{5 O_2 O_3}{\vartheta_3^2} y_2 - \frac{125 (\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4) O_3^5 O_2}{6 \vartheta_3^{10}} y_0 = \frac{O_2' O_3'}{\vartheta_3^2} x_7 y_0' - \frac{(\vartheta_3^4 + \vartheta_2^4) O_3'^5 O_2'}{6 \vartheta_3^{10}} x_7 y_0' - \frac{\vartheta_2 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)}{6 \vartheta_3^5} x_9$$

$$\text{VIII} \quad \frac{O_2}{O_0} y_2 - \frac{25 O_3^4 O_2}{2 \vartheta_3^4 O_0} y_0 = \frac{O_2'}{O_0'} x_7 y_2' - \frac{O_3'^4 O_2'}{2 \vartheta_3^4 O_0'} x_7 y_0' - \frac{5 \vartheta_2^5}{2 \vartheta_0^5} x_8 - \frac{\vartheta_2 (\vartheta_3^4 + 4 \vartheta_2^4)}{2 \vartheta_0^5} x_9$$

Aus jedem dieser 3 Systeme erhält man noch 2 andere, indem man statt $\vartheta_1^4(v, \tau)$ und $\vartheta_1^2(v, \tau)$ setzt:

1) $\vartheta_2^4(v, \tau)$ und $\vartheta_2^2(v, \tau)$

2) $\vartheta_3^4(v, \tau)$ und $\vartheta_3^2(v, \tau)$

Die ersten Gleichungen des ersten Systems würden nach dieser Aenderung lauten:

$$\vartheta_0(5v.5\tau) = x_1 \quad \vartheta_0(v, \tau/5) + x_2 \quad \vartheta_0^3(v, \tau) \vartheta_2^2(v, \tau) + x_3 \quad \vartheta_0(v, \tau) \vartheta_2^4(v, \tau)$$

und:

$$\vartheta_0(5v, 5\tau) = x_1 \quad \vartheta_0(v, \tau/5) + x_2 \quad \vartheta_0^3(v, \tau) \vartheta_3^2(v, \tau) + x_3 \quad \vartheta_0(v, \tau) \vartheta_3^4(v, \tau)$$

wobei selbstverständlich x_1, x_2 und x_3 in jeder Gleichung andere Constanten bedeuten.

Es existiren ausserdem noch einige andere Transformationsgleichungen, die man erhalten kann, indem man in den ersten Gleichungen des ersten und dritten Systems statt $\vartheta_1^4(v, \tau)$ die Producte:

$$\vartheta_1^2(v, \tau) \vartheta_2^2(v, \tau) \quad \text{und} \quad \vartheta_1^2(v, \tau) \vartheta_3^2(v, \tau) \quad \text{setzt.}$$

In diesem Falle gestalten sich z. B. die ersten Gleichungen des ersten Systems:

$$\vartheta_0(5v,5\tau)=x_1\ \vartheta_0(v,\tau/_5)+x_2\ \vartheta_0^3(v,\tau)\vartheta_1^2(v,\tau)+x_3\ \vartheta_0(v,\tau)\vartheta_1^2(v,\tau)\vartheta_2^2(v,\tau)$$

und:

$$\vartheta_0(5v,5\tau)=x_1\ \vartheta_0(v,\tau/_5)+x_2\ \vartheta_0^3(v,\tau)\vartheta_1^2(v,\tau)+x_3\ \vartheta_0(v,\tau)\vartheta_1^2(v,\tau)\vartheta_3^2(v,\tau)$$

Wir haben also eine grosse Anzahl von Bestimmungsgleichungen gefunden, die wir zur Auffindung von Thetarelationen verwerten können.

Aus den 4 ersten Gleichungen des ersten Systems in Verbindung mit den dazu gehörigen beiden Systemen ergeben sich die Gleichungen:

$$1.\quad \begin{aligned} O_0O_0'(5O_2O_3-O_2'O_3') &= \vartheta_0\vartheta_3(O_2O_0'-O_0O_2')-\vartheta_0\vartheta_2(O_3O_0'-O_0O_3') \\ O_2O_2'(5O_0O_3-O_0'O_3') &= \vartheta_2\vartheta_3(O_0O_2'-O_2O_0')-\vartheta_0\vartheta_2(O_3O_2'-O_2O_3') \\ O_3O_3'(5O_0O_2-O_0'O_2') &= \vartheta_2\vartheta_3(O_0O_3'-O_3O_0')-\vartheta_0\vartheta_3(O_2O_3'-O_3O_2') \end{aligned}$$

Aus dem 2ten System erhält man:

2.

$$\frac{O_0O_0'}{\vartheta_0}(5O_2O_3-O_2'O_3')+\frac{O_2O_2'}{\vartheta_2}(5O_0O_3-O_0'O_3')=\frac{O_3O_3'}{\vartheta_3}(5O_0O_2-O_0'O_2')$$

Aus 1. ergeben sich durch Combination der 3 Gleichungen unter sich:

$$3.\quad \begin{aligned} (5O_0O_2+\vartheta_0\vartheta_2)(\vartheta_2O_0'+\vartheta_0O_2')O_3 &= (\vartheta_0\vartheta_2+O_0'O_2')(\vartheta_2O_0+\vartheta_0O_2)O_3' \\ (5O_2O_3-\vartheta_2\vartheta_3)(\vartheta_3O_2'-\vartheta_2O_3')O_0 &= (\vartheta_2\vartheta_3-O_2'O_3')(\vartheta_3O_2-\vartheta_2O_3)O_0' \\ (5O_0O_3-\vartheta_0\vartheta_3)(\vartheta_0O_3'-\vartheta_3O_0')O_2 &= (\vartheta_0\vartheta_3-O_0'O_3')(\vartheta_0O_3-\vartheta_3O_0)O_2' \end{aligned}$$

Durch andere Combination erhält man:

$$4.\quad \begin{aligned} (\vartheta_2O_3-\vartheta_3O_2)(O_3'\vartheta_2-\vartheta_3O_2')O_0 &= (\vartheta_2\vartheta_3-O_2O_3)(\vartheta_2\vartheta_3-O_2'O_3')O_0' \\ (\vartheta_3O_0-\vartheta_0O_3(\vartheta_3O_0'-\vartheta_0O_3')O_2 &= (\vartheta_0\vartheta_3-O_0O_3)(\vartheta_0\vartheta_3-O_0'O_3')O_2' \\ (\vartheta_0O_2+\vartheta_2O_0)(O_2'\vartheta_0-\vartheta_2O_0')O_3 &= (\vartheta_0\vartheta_2+O_0O_2)(\vartheta_0\vartheta_2+O_0'O_2')O_3' \end{aligned}$$

und endlich:

$$5.\quad \begin{aligned} (5O_2O_3-\vartheta_2\vartheta_3)(5\vartheta_2\vartheta_3-O_2'O_3')O_0 &= (\vartheta_2O_3-O_2\vartheta_3)(\vartheta_3O_2'-\vartheta_2O_3')O_0' \\ (5O_0O_3-\vartheta_0\vartheta_3)(5\vartheta_0\vartheta_3-O_0'O_3')O_2 &= (\vartheta_3O_0-O_3\vartheta_0)(O_3'\vartheta_0-\vartheta_3O_0')O_2' \\ (5O_0O_2+\vartheta_0\vartheta_2)(5\vartheta_0\vartheta_2+O_0'O_2')O_3 &= (\vartheta_0O_2+\vartheta_2O_0)(O_0'\vartheta_2+O_2'\vartheta_0)O_3' \end{aligned}$$

Durch Zusammenfassung von 3 und 4. gelangt man zu folgenden Relationen:

$$(\vartheta_2\vartheta_3 - O_2O_3)(\vartheta_3O_2' - \vartheta_2O_3')\vartheta_0^2 = (\vartheta_2\vartheta_3 - O_2'O_3')(\vartheta_2O_3 - \vartheta_3O_2)O_0O_0'$$

$$6.\quad (\vartheta_0\vartheta_3 - O_0O_3)(\vartheta_0O_3' - \vartheta_3O_0')\vartheta_2^2 = (\vartheta_0\vartheta_3 - O_0'O_3')(\vartheta_3O_0 - \vartheta_0O_3)O_2O_2'$$

$$(\vartheta_0\vartheta_2 - O_0O_2)(\vartheta_2O_0' - \vartheta_0O_2')\vartheta_3^2 = (\vartheta_0\vartheta_2 - O_0'O_2')(\vartheta_0O_2 - \vartheta_2O_0)O_3O_3'$$

und:

7.

$$(5\vartheta_2\vartheta_3 - O_2'O_3')(\vartheta_2O_3 - \vartheta_3O_2)\vartheta_0^2 = (5O_2O_3 - \vartheta_2\vartheta_3)(\vartheta_3O_2' - \vartheta_2O_3')O_0O_0'$$

$$(5\vartheta_0\vartheta_3 - O_0'O_3')(\vartheta_3O_0 - \vartheta_0O_3)\vartheta_2^2 = (5O_0O_3 - \vartheta_0\vartheta_3)(\vartheta_0O_3' - \vartheta_3O_0')O_2O_2'$$

$$(5\vartheta_0\vartheta_2 + O_0'O_2')(\vartheta_0O_2 + \vartheta_2O_0)\vartheta_3^2 = (5O_0O_2 + \vartheta_0\vartheta_2)(\vartheta_2O_0' + \vartheta_0O_2')O_3O_3'$$

Eine weitere Reihe von Beziehungen ergiebt sich, wenn man die 4 letzten Gleichungen des ersten und 2ten Systems hinzunimmt. Daraus entspringen folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&(5O_2^2 - O_2'^2)(5O_2^2 - 6\vartheta_2^2 + O_2'^2) = \\
8.\quad &(5O_0^2 - O_0'^2)(5O_0^2 - 6\vartheta_0^2 + O_0'^2) = \\
&(5O_3^2 - O_3'^2)(5O_3^2 - 6\vartheta_3^2 + O_3'^2)
\end{aligned}$$

ausserdem noch:

$$(5O_2^2 - O_2'^2)(5O_2^2 - 4\vartheta_2^2 + O_2'^2) = 2\vartheta_3^2(5O_3^2 - O_3'^2) - 2\vartheta_0^2(5O_0^2 - O_0'^2)$$

$$(5O_0^2 - O_0'^2)(5O_0^2 - 4\vartheta_0^2 + O_0'^2) = 2\vartheta_3^2(5O_3^2 - O_3'^2) - 2\vartheta_2^2(5O_2^2 - O_2'^2)$$

$$(5O_3^2 - O_3'^2)(5O_3^2 - 4\vartheta_3^2 + O_3'^2) = 2\vartheta_2^2(5O_2^2 - O_2'^2) - 2\vartheta_0^2(5O_0^2 - O_0'^2)$$

Endlich führen wir die Beziehungen zwischen je einem Product 5ter Ordnung und 3 Repräsentanten an.

Wir nehmen als Beispiel einen speciellen Fall, nämlich:

$$\vartheta_0(v,\tau)\vartheta_1^2(v,\tau)\vartheta_2^2(v,\tau) = x_1\vartheta_0(5v,5\tau) + x_2\vartheta_0(v,\tau/5) + x_3\vartheta_0\left(v,\ \frac{\tau+32}{5}\right)$$

$$\vartheta_3(v,\tau)\vartheta_2^2(v,\tau)\vartheta_1^2(v,\tau) = x_1\vartheta_3(5v,5\tau) + x_2\vartheta_3(v,\tau/5) + x_3\vartheta_3\left(v,\ \frac{\tau+32}{5}\right)$$

$$-\vartheta_1(v,\tau)\vartheta_0^2(v,\tau)\vartheta_3^2(v,\tau) = x_1\vartheta_1(5v,5\tau) + x_2\vartheta_1(v,\tau/5) + x_3\vartheta_1\left(v,\ \frac{\tau+32}{5}\right)$$

$$-\vartheta_2(v,\tau)\vartheta_3^2(v,\tau)\vartheta_0^2(v,\tau) = x_1\vartheta_2(5v,5\tau) + x_2\vartheta_2(v,\tau/5) + x_3\vartheta_2\left(v,\ \frac{\tau+32}{5}\right)$$

Wenn wir nun $v = 0$ setzen, so ergiebt sich:

$$x_1 = \begin{vmatrix} 0 & O_0' & O_0'' \\ 0 & O_3' & O_3'' \\ -\vartheta_2\vartheta_0^2\vartheta_3^2 & O_2' & O_2'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} O_0 & O_0' & O_0'' \\ O_3 & O_3' & O_3'' \\ O_2 & O_2' & O_2'' \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} O_0 & O & O_0'' \\ O_3 & O & O_3'' \\ O_2 & -\vartheta_2\vartheta_0^2\vartheta_3^2 & O_2'' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} O_0 & O_0' & O_0'' \\ O_3 & O_3' & O_3'' \\ O_2 & O_2' & O_2'' \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} O_0 & O_0' & O \\ O_3 & O_3' & O \\ O_2 & O_2' & -\vartheta_2\vartheta_0^2\vartheta_3^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} O_0 & O_0' & O_0'' \\ O_3 & O_3' & O_3'' \\ O_2 & O_2' & O_2'' \end{vmatrix}$$

Ebenso kann man x_1, x_2 und x_3 auf 3 andere Arten berechnen, und man findet durch Gleichsetzung der Ausdrücke neue Relationen.

Auf dieselbe Weise gelangt man zu den Beziehungen zwischen je 4 Repräsentanten, indem man z. B. setzt:

$$\vartheta_0(v', \tau') + x_1\vartheta_0(v'', \tau'') + x_2\vartheta_0(v''', \tau''') + x_3\vartheta_0(v'''', \tau'''') = 0$$

Ich unterlasse jedoch die Lösung dieses Problems, da die Methode den bisher angewandten vollständig analog ist.

Es lässt sich demnach auf die von uns bis jetzt behandelte Weise eine beliebig grosse Anzahl von Relationen darstellen. Man gelangt jedoch nicht zu einer symetrischen Darstellung der Potenzen und Producte $n$ter Ordnung. Die Lösung dieses Problems wird nun die Aufgabe des zweiten Abschnitts bilden.

Zweiter Abschnitt.

§ 4.

Die Entwicklung der Potenzen und Producte $n$ter Ordnung in Fourier'sche Reihen.

Die Aufgabe des zweiten Abschnittes ist:

„Es sollen die Potenzen und Producte der $n$ten Ordnung durch die Repräsentanten $n$ter Ordnung ausgedrückt werden".

Dieses Problem ist bereits von Herrn Prof. Schroeter behandelt (siehe dessen Habilitationsschrift) und für die Potenzen bis zur sechsten Ordnung durchgeführt worden. Schon bei der fünften Potenz aber können die Coefficienten nur mit Hülfe quadratischer Gleichungen bestimmt werden. Ueberdies bemerkt Herr Schroeter selbst, dass bei den Potenzen, die grösser als 6 sind, seine Methode nicht zum Ziele zu führen scheine.

Endlich hat Herr Schroeter nur die Potenzen der Thetafunctionen, dagegen nicht die Producte derselben behandelt.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, dass, und wie durch eine leichte Modification des Schroeter'schen Verfahrens die Lösung des Problems bedeutend weiter fortgeführt werden kann, wie denn insbesondere der Fall $n = 5$ seine völlige Erledigung findet.

Wir erhalten die Potenzen und Producte der $n$ten Ordnung, indem wir diejenigen der $(n-1)$ten Ordnung mit einer beliebigen fundamentalen Thetafunction multipliciren. Dabei treten nun auf der anderen Seite der Gleichung Producte auf, deren einer Factor die fundamentale Thetafunction, der andere ein Repräsentant $(n-1)$ter Ordnung ist. Das Problem ist demnach auf folgendes zurückgeführt:

„Es sollen die Producte der Repräsentanten $(n-1)$ter Ordnung mit einer beliebigen fundamentalen Thetafunction gebildet werden".

Dazu machen wir die beschränkende Annahme, dass n eine Primzahl ist, und bezeichnen diese letztere mit p.

Dann haben die Repräsentanten der $p$ten Ordnung die Form:

$$\vartheta_\alpha(px, p\tau) \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha\left(x, \frac{\tau + 2^p\varrho}{p}\right),$$

wo ϱ die Werte von 0 bis $p-1$ annehmen kann.

Wir haben die Form $\dfrac{\tau + 2^p\varrho}{p}$ statt der sonst üblichen $\dfrac{\tau + 8\varrho}{p}$ gewählt, weil sie bei späteren Rechnungen einige Erleichterungen gewährt.

Von den Repräsentanten der $(p-1)$ten Ordnung beschränken wir uns auf die bekannten von der Form:

$$\vartheta_\alpha((p-1)x, (p-1)\tau) \quad \text{und} \quad \vartheta_\alpha\left(x, \frac{\tau + \xi}{p-1}\right).$$

wo ξ alle Werte von 0 bis $p-2$ annimmt.

Es sind demnach die beiden Producte zu bestimmen:

$$\vartheta_\beta(x, \tau)\vartheta_\alpha((p-1)x, (p-1)\tau) \quad \text{und} \quad \vartheta_\beta(x, \tau)\vartheta_\alpha\left(x, \frac{\tau + \xi}{p-1}\right)$$

Dazu gehen wir auf das schon von Schroeter behandelte Problem zurück.

Man soll das Product bilden:

$$\vartheta_\gamma(x, \alpha\tau)\vartheta_\delta(y, \beta\tau)$$

Es ist nun:

$$\vartheta_3(x, \alpha\tau)\vartheta_3(y, \beta\tau) = \Sigma\Sigma e^{\pi i[m^2\alpha\tau + n^2\beta\tau + 2mx + 2ny]} \quad (m \text{ und } n \text{ von } -\infty \text{ bis } \infty)$$

Wir setzen:

$$n = m + h$$

und erhalten:

$$\vartheta_3(x, \alpha\tau)\vartheta_3(y, \beta\tau) = \Sigma\Sigma e^{\pi i[m^2(\alpha+\beta)\tau + 2mh\beta\tau + h^2\beta\tau + 2m(x+y) + 2hy]}$$
$$(h \text{ von } -\infty \text{ bis } \infty)$$

Setzen wir nun: $(\alpha+\beta)\tau$ statt τ, so bekommen wir:

$$\vartheta_3(x, \alpha(\alpha+\beta)\tau)\vartheta_3(y, \beta(\alpha+\beta)\tau) = \Sigma\Sigma e^{\pi i[(m(\alpha+\beta)+\beta h)^2\tau + h^2\alpha\beta\tau + 2m(x+y) + 2hy]}$$

Jetzt führen wir ein:

$$h = (\alpha+\beta)n + \mu,$$

wo n von $-\infty$ bis $+\infty$ und μ von 0 bis $\alpha+\beta-1$ zu nehmen ist.

$$\vartheta_3(x, \alpha(\alpha+\beta)\tau)\vartheta_3(y, \beta(\alpha+\beta)\tau)$$
$$= \sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha+\beta-1}\sum_m\sum_n e^{\pi i[(\alpha\beta(\alpha+\beta)n+\mu)^2\tau + ((\alpha+\beta)(m+\beta n)+\beta\mu)^2\tau + 2m(x+y) + 2n(\alpha+\beta)y + 2\mu y]}$$

$m - \beta n$ für m eingeführt:

$$= \sum_\mu\sum_m\sum_n e^{\pi i[m^2(\alpha+\beta)^2\tau + 2m(\alpha+\beta)\beta\mu\tau + n^2(\alpha+\beta)^2\alpha\beta\tau + 2n(\alpha+\beta)\mu\alpha\beta\tau + \mu^2\beta(\alpha+\beta)\tau}$$
$$+ 2m(x+y) + 2n(\alpha y - \beta x) + 2\mu y]$$

Setzt man jetzt: τ statt $(\alpha+\beta)\tau$, so gestaltet sich das Product:

$$\vartheta_3(x, \alpha\tau)\vartheta_3(y, \beta\tau)$$
$$= \sum_0^{\alpha+\beta-1} e^{\pi i(\mu^2\beta\tau + 2\mu y)} \cdot \Sigma\Sigma e^{\pi i[(\alpha+\beta)m^2\tau + 2m(x+y+\mu\beta\tau) + \alpha\beta(\alpha+\beta)n^2\tau + 2n(\alpha y - \beta x + \alpha\beta\mu\tau)]}$$

also:

$$\vartheta_3(x, \alpha\tau)\vartheta_3(y, \beta\tau)$$
$$= \sum_0^{\alpha+\beta-1} e^{\pi i(\mu^2\beta\tau + 2\mu y)} \cdot \vartheta_3(\alpha y - \beta x + \alpha\beta\mu\tau, \alpha\beta(\alpha+\beta)\tau)\vartheta_3(x+y+\mu\beta\tau, (\alpha+\beta)\tau)$$

Nach genau derselben Methode behandeln wir die übrigen Producte und finden ein System von 4 Gleichungen:

I.

$$\vartheta_3(x,\alpha\tau)\vartheta_3(y,\beta\tau)$$
$$=\sum_\mu e^{\pi i[\mu^2\beta\tau+2\mu y]}\vartheta_3(x+y+\mu\beta\tau,(\alpha+\beta)\tau)\vartheta_3(\alpha y-\beta x+\mu\alpha\beta\tau.\,\alpha\beta(\alpha+\beta)\tau)$$

$$\vartheta_3(x,\alpha\tau)\vartheta_2(y,\beta\tau)$$
$$=\sum_\mu e^{\pi i[(\mu+\frac{1}{2})^2)\beta\tau+2\mu y]}\vartheta_3(x+y+(\mu+\tfrac{1}{2})\beta\tau,(\alpha+\beta)\tau)\vartheta_3(\alpha y-\beta x+(\mu+\tfrac{1}{2})\alpha\beta\tau,$$
$$\alpha\beta(\alpha+\beta)\tau)$$

$$\vartheta_0(x,\alpha\tau)\vartheta_0(y,\beta\tau)$$
$$=\sum_\mu e^{\pi i[\mu^2\beta\tau+2\mu(y-\frac{1}{2})]}\vartheta_3(x+y+\mu\beta\tau,(\alpha+\beta)\tau)\vartheta_3(\alpha y-\beta x-\frac{\alpha-\beta}{2}+\mu\alpha\beta\tau,$$
$$\alpha\beta(\alpha+\beta)\tau$$

$$\vartheta_3(x,\alpha\tau)\vartheta_0(y,\beta\tau)$$
$$=\sum_\mu e^{\pi i[\mu^2\beta\tau+2\mu(y-\frac{1}{2})]}\vartheta_0(x+y+\mu\beta\tau,(\alpha+\beta)\tau)\vartheta_3(\alpha y-\beta x-\frac{\alpha}{2}+\mu\alpha\beta\tau,$$
$$\alpha\beta(\alpha+\beta)\tau)$$

Setzt man jetzt:

$x+\alpha y$ statt x und
$-x+\beta y$ statt y,

so gestalten sich die Gleichungen:

II.

$$\vartheta_3(x+\alpha y,\alpha\tau)\vartheta_3(-x+\beta y,\beta\tau)$$
$$=\sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha+\beta-1} e^{\pi i[\mu^2\beta\tau+2\mu(-x+\beta y)]}\vartheta_3(\alpha+\beta)y+\mu\beta\tau,(\alpha+\beta)\tau)\vartheta_3(-(\alpha+\beta)x+\mu\alpha\beta\tau,$$
$$\alpha\beta(\alpha+\beta)\tau)$$

$$\vartheta_3(x+\alpha y,\alpha\tau)\vartheta_2(-x+\beta y,\beta\tau)$$
$$=\sum_\mu e^{\pi i[(\mu+\frac{1}{2})^2\beta\tau+2(\mu+\frac{1}{2})(-x+\beta y)]}\vartheta_3((\alpha+\beta)y+(\mu+\tfrac{1}{2})\beta\tau,(\alpha+\beta)\tau)$$
$$\vartheta_3(-(\alpha+\beta)x+(\mu+\tfrac{1}{2})\alpha\beta\tau,\alpha\beta(\alpha+\beta)\tau)$$

$$\vartheta_0(x+\alpha y,\alpha\tau)\vartheta_0(-x+\beta y,\beta\tau)$$
$$=\sum_\mu e^{\pi i[\mu^2\beta\tau+2\mu(-x+\beta y-\frac{1}{2})]}\vartheta_3((\alpha+\beta)y+\mu\beta\tau,(\alpha+\beta)\tau)$$
$$\vartheta_3(-(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha-\beta}{2}+\mu\alpha\beta\tau,\alpha\beta(\alpha+\beta)\tau)$$

$$\vartheta_3(x+\alpha y,\alpha\tau)\vartheta_0(-x+\beta y.\,\beta\tau)$$
$$=\sum_\mu e^{\pi i[\mu^2\beta\tau+2\mu(-x+\beta y-\frac{1}{2})]}\vartheta_0((\alpha+\beta)y+\mu\beta\tau,(\alpha+\beta)\tau)$$
$$\vartheta_3(-(\alpha+\beta)x-\frac{\alpha}{2}+\mu\alpha\beta\tau,\alpha\beta(\alpha+\beta)\tau)$$

In den 3 ersten Gleichungen dieses Systems (die 4te gebrauchen wir später), setzen wir:

$$x = 0, \qquad \alpha = p-1, \qquad \beta = 1$$

und nehmen an, dass p eine ungerade Primzahl ist.

Wir erhalten:

IIIa.

$$\vartheta_3((p-1)y,(p-1)\tau)\vartheta_3(y,\tau)$$
$$=\sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} e^{\pi i[\mu^2\tau+2\mu y]}\vartheta_3(py+\mu\tau,p\tau)\vartheta_3(\mu(p-1)\tau,p(p-1)\tau)$$

$$\vartheta_3((p-1)y,(p-1)\tau)\vartheta_2(y,\tau)$$
$$=\sum_{\mu} e^{\pi i[(\mu+\frac{1}{2})^2\tau+2(\mu+\frac{1}{2})y]}\vartheta_3(py+(\mu+\tfrac{1}{2})\tau,p\tau)\vartheta_3((\mu+\tfrac{1}{2})(p-1)\tau,p(p-1)\tau)$$

$$\vartheta_0((p-1)y,(p-1)\tau)\vartheta_0(y,\tau)$$
$$=\sum_{\mu} e^{\pi i[\mu^2\tau+2\mu(y-\frac{1}{2})]}\vartheta_3(py+\mu\tau,p\tau)\vartheta_0(\mu(p-1)\tau),p(p-1)\tau)$$

Ferner substituiren wir in der ersten, 2ten und 4ten Gleichung des Systems II. folgende Werte:

$$y = 0, \qquad \alpha = p-1 \qquad \beta = 1.$$

und führen $\frac{\tau+\xi}{p-1}$ statt τ ein, wo ξ alle Werte von 0 bis $(p-2)$ annehmen kann. Wir erhalten:

IIIb.

$$\vartheta_3(x,\tau+\xi)\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)$$
$$=\sum_{\mu} e^{\pi i\left[\mu^2\frac{\tau+\xi}{p-1}-2\mu x\right]}\vartheta_3\left(\mu\frac{\tau+\xi}{p-1},\; p\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px-\mu(\tau+\xi),p(\tau+\xi))$$

$$\vartheta_3(x,\tau+\xi)\vartheta_2\left(x,\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)$$
$$=\sum_{\mu} e^{\pi i\left[\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2\frac{\tau+\xi}{p-1}-2(\mu+\frac{1}{2})x\right]}\times$$
$$\vartheta_3\left((\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\tau+\xi}{p-1},\; p\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px-(\mu+\tfrac{1}{2})(\tau+\xi),p(\tau+\xi))$$

$$\vartheta_3(x,\tau+\xi)\vartheta_0\left(x,\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)$$
$$=\sum_{\mu} e^{\pi i\left[\mu^2\frac{\tau+\xi}{p-1}-2\mu(x-\frac{1}{2})\right]}\times$$
$$\vartheta_3\left(\mu\frac{\tau+\xi}{p-1},\; p\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px-\mu(\tau+\xi),p(\tau+\xi))$$

Diese 6 Gleichungen bringen wir in eine andere Form.

Die erste Gleichung des Systems III. kann man auch schreiben:

$$\vartheta_3((p-1)y,(p-1)\tau)\vartheta_3(y,\tau) = \vartheta_3(py,p\tau)\vartheta_3(0,p(p-1)\tau)$$
$$+\sum_{\mu=1}^{\mu=p-1} e^{\pi i[\mu^2\tau+2\mu y]}\vartheta_3(py+\mu\tau,p\tau)\vartheta_3(\mu(p-1)\tau,p(p-1)\tau).$$

Da p nun ungerade ist, so muss die Zahl der Summanden unter dem Summenzeichen stets eine gerade sein.

Wir wollen nun die Summe zweier beliebigen Glieder bilden, die gleich weit vom Ende abstehen, also die Summe des μten und des $(p-\mu)$ten Gliedes. Dieselbe wird lauten:

$$e^{\pi i[\mu^2\tau+2\mu y]}\vartheta_3(py+\mu\tau,p\tau)\vartheta_3(\mu(p-1)\tau,p(p-1)\tau)$$
$$+e^{\pi i[(p-\mu)^2\tau+2(p-\mu)y]}\vartheta_3(py+(p-\mu)\tau,p\tau)\vartheta_3((p-\mu)(p-1)\tau,p(p-1)\tau)$$

Das letzte Glied der Summe wollen wir etwas umformen:

$$e^{\pi i[(p-\mu)^2\tau+2(p-\mu)y]}\vartheta_3(py+p\tau-\mu\tau,p\tau)\vartheta_3(p(p-1)\tau-\mu(p-1)\tau,$$
$$p(p-1)\tau)$$
$$=e^{\pi i[(p-\mu)^2\tau+2(p-\mu)y]}e^{-\pi i[p\tau+2py-2\mu\tau]}\times$$
$$\vartheta_3(py-\mu\tau,p\tau)e^{-\pi i[p(p-1)\tau-2\mu(p-1)\tau]}\vartheta_3(\mu(p-1)\tau,p(p-1)\tau)$$
$$=e^{\pi i[\mu^2\tau-2\mu y]}\vartheta_3(py-\mu\tau,p\tau)\vartheta_3(\mu(p-1)\tau,p(p-1)\tau)$$

Die Summe der beiden Glieder ist also:

$$e^{\pi i\mu^2\tau}\vartheta_3(\mu(p-1)\tau,p(p-1)\tau)\{e^{2\pi i\mu y}\vartheta_3(py+\mu\tau,p\tau)+e^{-2\pi i\mu y}\times$$
$$\vartheta_3(py-\mu\tau,p\tau)\}$$

und die Gleichung lautet, wenn man zugleich x statt y einführt:

$$\vartheta_3((p-1)x(p-1)\tau)\vartheta_3(x,\tau)=\vartheta_3(0,p(p-1)\tau)\vartheta_3(px,q\tau)$$
$$+\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{p-1}{2}} e^{\pi i\mu^2\tau}\vartheta_3(\mu(p-1)\tau,p(p-1)\tau(\{e^{2\pi i\mu x}\vartheta_3(px+\mu\tau,p\tau)+e^{-2\pi i\mu x}\times$$
$$\vartheta_3(px-\mu\tau,p\tau)\}$$

Auf ähnliche Weise kann man alle übrigen Formeln des Systems III. umgestalten, so dass man erhält:

IV.

$$\vartheta_3((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_3(x,\tau)=\vartheta_3(0,p(p-1)\tau)\vartheta_3(px,p\tau)$$
$$+\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{p-1}{2}} e^{\pi i\mu^2\tau}\vartheta_3(\mu(p-1)\tau,p(p-1)\tau)\{e^{2\pi i\mu x}\vartheta_3(px+\mu\tau,p\tau)+e^{-2\pi i\mu x}\times$$
$$\vartheta_3(px-\mu\tau,p\tau)\}$$

$$\vartheta_3((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_2(x,\tau)=\vartheta_2(0,p(p-1)\tau)\vartheta_2(px,p\tau)$$
$$+\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{p-3}{2}} e^{\pi i(\mu+\frac{1}{2})^2\tau}\vartheta_3((\mu+\tfrac{1}{2})(p-1)\tau,p(p-1)\tau)\{e^{2\pi i(\mu+\frac{1}{2})x}\vartheta_3(px+(\mu+\tfrac{1}{2})\tau,p\tau)$$
$$+e^{-2\pi i(\mu+\frac{1}{2})x}\vartheta_3(px-(\mu+\tfrac{1}{2})\tau,p\tau)\}$$

$$\vartheta_0((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_0(x,\tau)=\vartheta_0(0,p(p-1)\tau)\vartheta_3(px,p\tau)$$
$$+\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{p-1}{2}} e^{\pi i\mu^2\tau}\vartheta_0(\mu(p-1)\tau,p(p-1)\tau)\{e^{2\pi i\mu(x-\frac{1}{2})}\vartheta_3(px+\mu\tau,p\tau)$$
$$+e^{-2\pi i\mu(x-\frac{1}{2})}\vartheta_3(px-\mu\tau,p\tau)\}$$

$$\vartheta_3(x,\tau+\xi)\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)=\vartheta_3\left(0,p\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px,p(\tau+\xi))$$
$$+\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{p-1}{2}} e^{\pi i\mu^2\frac{\tau+\xi}{p-1}}\vartheta_3\left(\mu\frac{\tau+\xi}{p-1},p\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)\times$$
$$\{e^{2\pi i\mu x}\vartheta_3(px+\mu(\tau+\xi),p(\tau+\xi))+e^{-2\pi i\mu x}\vartheta_3(px-\mu(\tau+\xi),p(\tau+\xi))\}$$

$$\vartheta_0(x,\tau+\xi)\vartheta_2\left(x,\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)=\vartheta_2\left(0,p\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)\vartheta_2(px,p(\tau+\xi))$$
$$+\sum_{\mu=0}^{\mu=\frac{p-3}{2}} e^{\pi i(\mu+\frac{1}{2})^2\frac{\tau+\xi}{p-1}}\vartheta_3\left((\mu+\tfrac{1}{2})\frac{\tau+\xi}{p-1},p\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)\times$$
$$\{e^{2\pi i(\mu+\frac{1}{2})x}\vartheta_3(px+(\mu+\tfrac{1}{2})(\tau+\xi),p(\tau+\xi))$$
$$+e^{-2\pi i(\mu+\frac{1}{2})x}\vartheta_3(px-(\mu+\tfrac{1}{2})(\tau+\xi),p(\tau+\xi))\}$$

$$\vartheta_3(x,\tau+\xi)\vartheta_0\left(x,\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)=\vartheta_0\left(0,p\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px,p(\tau+\xi))$$
$$+\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{p-1}{2}} e^{\pi i\mu^2\frac{\tau+\xi}{p-1}}\vartheta_0\left(\mu\frac{\tau+\xi}{p-1},p\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)\times$$
$$\{e^{2\pi i\mu(x+\frac{1}{2})}\vartheta_3(px+\mu(\tau+\xi),p(\tau+\xi))$$
$$+e^{-2\pi i\mu(x+\frac{1}{2})}\vartheta_3(px-\mu(\tau+\xi),p(\tau+\xi))\}$$

In diesen Gleichungen kommen nicht die Repräsentanten der $p$ten Ordnung selbst, sondern die Teilwerte derselben vor. Wir versuchen demnach, diese Teilwerte in die Form von Repräsentanten zu bringen.

Dazu gehen wir von Betrachtungen aus, die schon von Schroeter in seiner Habilitationsschrift angestellt und teilweise durchgeführt worden sind.

Es ist:

$$\vartheta_3(x,\tau) = \sum_h e^{\pi i[h^2\tau + 2hx]}$$

Wir führen nun ein:

$$h = pn + \mu,$$

wo p eine ungerade Primzahl ist, und n alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, μ dagegen die Werte von 0 bis $(p-1)$ durchläuft.

Dann erhalten wir:

$$\vartheta_3(x,\tau) = \sum_{\mu=0}^{\mu=p-1} \sum_n e^{\pi i[(pn+\mu)^2\tau + 2(pn+\mu)x]}$$

$$= \sum_\mu \sum_n e^{\pi i[p^2n^2\tau + 2pn\mu\tau + \mu^2\tau + 2pnx + 2\mu x]}$$

$$= \sum_\mu e^{\pi i[\mu^2\tau + 2\mu x]}\, \vartheta_3(px + p\mu\tau, p^2\tau)$$

Statt τ setze ich jetzt: $\dfrac{\tau + 2^p\varrho}{p}$, erhalte also:

$$\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right) = \sum_\mu e^{\pi i\left[\mu^2 \frac{\tau+2^p\varrho}{p} + 2\mu x\right]} \vartheta_3(px + \mu\tau + 2^p\varrho\mu, p\tau + 2^p p\varrho)$$

$$= \sum_\mu e^{\pi i\left[\mu^2 \frac{\tau}{p} + \frac{2}{p}\varrho\mu^2 + 2\mu x\right]} \vartheta_3(px + \mu\tau, p\tau)$$

Es ist aber nach dem zahlentheoretischen Satz von Fermat:

$$\beta^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

wo β kleiner als p, und zu p relativ prim ist. In unserem Falle ist also:

$$2^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod p.$$

Wir nehmen jetzt α als eine $p$te Einheitswurzel an.

Es ist demnach:

$$\alpha^p = \alpha^{0 \bmod p} = \alpha^{2^{p-1}-1} = \alpha^{(2^{p-1}-1)\varrho\mu^2} = 1.$$

Wir dürfen also $\alpha^{2^{p-1}\varrho\mu^2}$ durch $\alpha^{(2^{p-1}-1)\varrho\mu^2}$ dividiren, ohne seinen Wert zu ändern.

$$\alpha^{2^{p-1}\varrho\mu^2} = \alpha^{2^{p-1}\varrho\mu^2-(2^{p-1}-1)\varrho\mu^2} = \alpha^{\varrho\mu^2}.$$

Wir haben also:

$$\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right) = \sum_\mu \alpha^{\varrho\mu^2} e^{\pi i\left[\mu^2\frac{\tau}{p}+2\mu x\right]}\vartheta_3(px+\mu\tau, p\tau)$$

Jetzt multipliciren wir beide Seiten der Gleichung mit $\alpha^{-\varrho\mu_1^2}$ und summiren nach ϱ von 0 bis $(p-1)$. Dann ergiebt sich:

$$\sum_0^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu_1^2}\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right) = \sum_0^{p-1}\alpha_\varrho^{(\mu^2-\mu_1^2)}\sum_0^{p-1} e^{\pi i\left[\mu^2\frac{\tau}{p}+2\mu x\right]}\times$$
$$\vartheta_3(px+\mu\tau, p\tau)$$

wo μ_1 der Reihe nach $= 0, 1, 2 \ldots (p-1)$ zu nehmen ist.

Führt man nun die Summation nach ϱ durch, so treten bei concantem μ_1 sämtliche $p$ten Einheitswurzeln auf, und die Summe dieser ist bekanntlich $= 0$. Dabei ist aber die Bedingung zu erfüllen, dass $\varrho(\mu^2-\mu_1^2)$ ein Nichtrest mod$p$ ist. Es werden also diejenigen Glieder, für welche $\varrho(\mu^2-\mu_1^2) \equiv 0 \bmod p$ ist, sich nicht fortheben, sondern mit dem Factor p auftreten.

Da wir p als ungerade Primzahl angenommen haben, so ist ϱ stets ein Nichtrest mod$p$. Wir haben also zu untersuchen, in welchen Fällen $\mu^2-\mu_1^2 \equiv 0 \bmod p$ ist.

Dies ist im allgemeinen 2mal der Fall, denn es ist dann:

$$\mu^2-\mu_1^2 = (\mu-\mu_1)(\mu+\mu_1) \equiv 0 \bmod p.$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn $\mu-\mu_1 = 0$ und wenn $\mu+\mu_1 = p$, also, wenn $\mu = \mu_1$ oder $\mu = p-\mu_1$ ist.

Dabei bildet jedoch der Fall $\mu_1 = 0$ eine Ausnahme. Es kann hier nie $\mu+\mu_1 = p$ sein, da μ nur von 0 bis $p-1$ fortschreitet. Es wird also nur diejenige Summe mit dem Factor p auftreten, in welcher $\mu = \mu_1 = 0$ ist.

Die Formel lautet demnach im allgemeinen:

$$\sum_0^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu_1^2}\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$
$$= p\alpha^{\varrho(\mu_1^2-\mu_1^2)} e^{\pi i\left[\mu_1^2\frac{\tau}{p}+2\mu_1 x\right]}\vartheta_3(px+\mu_1\tau, p\tau)$$
$$+ p\alpha^{\varrho((p-\mu_1)^2-\mu_1^2}e^{\pi i\left[(p-\mu_1)^2\frac{\tau}{p}+2(p-\mu_1)x\right]}\vartheta_3(px-(p-\mu_1)\tau, p\tau)$$

oder, wenn wir μ an Stelle von μ_1 setzen:

$$e^{\pi i\left[\mu^2 \frac{\tau}{p}+2\mu x\right]} \vartheta_3(px+\mu\tau, p\tau)+e^{\pi i\left[(p-\mu)^2 \frac{\tau}{p}+2(p-\mu)x\right]} \times$$
$$\vartheta_3(px+(p-\mu)\tau, p\tau) = \frac{1}{p}\sum_0^{p-1} \alpha^{-\varrho\mu^2}\, \vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

Hieraus folgt unmittelbar die gesuchte Formel:

$$e^{\pi i\mu^2 \frac{\tau}{p}} \{e^{2\pi i\mu x}\vartheta_3(px+\mu\tau,p\tau)+e^{-2\pi i\mu x}\vartheta_3(px-\mu\tau,p\tau)\}$$
$$=\frac{1}{p}\sum_0^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu^2}\, \vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right),$$

wo μ die Werte 1, 2, 3 ... $(p-1)$ annehmen kann.

In der Schroeter'schen Arbeit lautet diese Formel anders, und daran liegt es auch, dass Herr Professor Schroeter die Transformation 5ter Ordnung nicht vollständig durchgeführt hat.

Auf analoge Weise gelangt man zu 2 ähnlichen Formeln.

Ich stelle hier alle 3 zusammen:

A.

$$e^{\pi i\mu^2 \frac{\tau}{p}} \{e^{2\pi i\mu x}\vartheta_3(px+\mu\tau,p\tau)+e^{-2\pi i\mu x}\vartheta_3(px-\mu\tau,p\tau)\}$$
$$=\frac{1}{p}\sum_0^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu^2}\, \vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$e^{\pi i(\mu+\frac{1}{2})^2 \frac{\tau}{p}} \{e^{2\pi i(\mu+\frac{1}{2})x}\vartheta_3(px+(\mu+\tfrac{1}{2})\tau,p\tau)$$
$$+e^{-2\pi i(\mu+\frac{1}{2})x}\vartheta_3(px-(\mu+\tfrac{1}{2})\tau,p\tau)\} = \frac{1}{p}\sum_0^{p-1}\alpha^{-2^{p-3}\varrho(2\mu+1)^2}\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$e^{\pi i\mu^2 \frac{\tau}{p}} \{e^{2\pi i\mu(x-\frac{1}{2})}\vartheta_0(px+\mu\tau,p\tau)+e^{-2\pi i\mu(x-\frac{1}{2})}\vartheta_0(px-\mu\tau,p\tau)\}$$
$$=\frac{1}{p}\sum_0^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu^2}\, \vartheta_0\left(x, \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

Diese 3 Gleichungen können wir nun benutzen, um die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen in dem System IV. in die Form von Repräsentanten zu bringen.

Die erste Formel des Systems A. lautet:

$$e^{\pi i\mu^2\frac{\tau}{p}}\{e^{2\pi i\mu x}\vartheta_3(px+\mu\tau,p\tau)+e^{-2\pi i\mu x}\vartheta_3(px-\mu\tau,p\tau)\}$$
$$=\frac{1}{p}\sum_0^{p-1}{}_\varrho\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right).$$

Führt man $(p-1)\tau$ an Stelle von τ ein und setzt gleichzeitig $x=0$, so erhält man:

$$e^{\frac{\pi i\mu^2(p-1)\tau}{p}}\vartheta_3(\mu(p-1)\tau,p(p-1)\tau)$$
$$=\frac{1}{2p}\sum_0^{p-1}{}_\varrho\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{(p-1)\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

Wenn man diese beiden Gleichungen mit einander multiplicirt, so findet man:

$$e^{\pi i\mu^2\tau}\vartheta_3(\mu(p-1)\tau,p(p-1)\tau)\{e^{2\pi i\mu x}\vartheta_3(px+\mu\tau,p\tau)+e^{-2\pi i\mu x}\vartheta_3(px-\mu\tau,p\tau)$$
$$=\frac{1}{2p^2}\sum_0^{p-1}{}_\varrho\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{(p-1)\tau+2^p\varrho}{p}\right)\sum_0^{p-1}{}_\varrho\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

Der Ausdruck links findet sich ebenfalls in der ersten Gleichung des Systems IV. vor. Benutzen wir also die soeben gefundene Formel, um die genannte Gleichung umzuformen, so ergiebt sich:

$$\vartheta_3((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_3(x,\tau)=\vartheta_3(0,p(p-1)\tau)\vartheta_3(px,p\tau)$$
$$+\frac{1}{2p^2}\sum_1^{\frac{p-1}{2}}{}_\mu\sum_0^{p-1}{}_\varrho\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{(p-1)\tau+2^p\varrho}{p}\right)\sum_0^{p-1}{}_\varrho\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

Aehnlich lassen sich alle Formeln des Systems IV. umgestalten, so dass man erhält:

V.

$$\vartheta_3((p-1)x(p-1)\tau)\vartheta_3(x,\tau)=\vartheta_3(0,p(p-1)\tau)\vartheta_3(px,p\tau)$$
$$+\frac{1}{2p^2}\sum_1^{\frac{p-1}{2}}{}_\mu\sum_0^{p-1}{}_\varrho\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{(p-1)\tau+2^p\varrho}{p}\right)\sum_0^{p-1}{}_\varrho\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_3((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_2(x,\tau)=\vartheta_2(0,p(p-1)\tau)\vartheta_2(px,p\tau)$$
$$+\frac{1}{2p^2}\sum_0^{\frac{p-3}{2}}{}_\mu\sum_0^{p-1}{}_\varrho\,\alpha^{-2^{p-3}\varrho(2\mu+1)^2}\vartheta_2\left(0,\ \frac{(p-1)\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$
$$\sum{}_\varrho\,\alpha^{-2^{p-3}\varrho(2\mu+1)^2}\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

V.

$$\vartheta_0((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_0(x,\tau)=\vartheta_0(0,p(p-1)\tau)\vartheta_3(px,p\tau)$$
$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_\mu\sum_{0}^{p-1}{}_\varrho\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_0\left(0,\ \frac{(p-1)\tau+2^p\varrho}{p}\right)\sum_{0}^{p-1}{}_\varrho\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau+\xi)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+\xi}{p-1}\right)=\vartheta_3\left(0,p\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px,p(\tau+\xi))$$
$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_\mu\sum_{0}^{p-1}{}_\varrho\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+\xi+2^p(p-1)\varrho}{p(p-1)}\right)\sum_{0}^{p-1}{}_\varrho\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+\xi+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau,\tau+\xi)\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+\xi}{p-1}\right)=\vartheta_2\left(0,p\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px,p(\tau+\xi))$$
$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{0}^{\frac{p-3}{2}}{}_\mu\sum_{0}^{p-1}{}_\varrho\alpha^{-2^{p-3}\varrho(2\mu+1)^2}\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau+\xi+2^p(p-1)\varrho}{p(p-1)}\right)$$
$$\sum_{0}^{p-1}{}_\varrho\alpha^{-2^{p-3}\varrho(2\mu+1)^2}\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+\xi+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau+\xi)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+\xi}{p-1}\right)=\vartheta_0\left(0,p\frac{\tau+\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px,p(\tau+\xi))$$
$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_\mu\sum_{0}^{p-1}{}_\varrho\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+\xi+2^p(p-1)\varrho}{p(p-1)}\right)\sum_{0}^{p-1}{}_\varrho\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+\xi+2^p\varrho}{p}\right)$$

In den letzten 3 Gleichungen setzen wir statt ξ:

1) 2ξ und 2) $2\xi+1$.

Dann zerfällt die 4te Formel des Systems V. in folgende beiden Gleichungen:

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)=\vartheta_3\left(0,p\frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px,p\tau)$$
$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_\mu\sum_{0}^{p-1}{}_\varrho\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+2\xi+2^p(p-1)\varrho}{p(p-1)}\right)$$
$$\sum_{0}^{p-1}{}_\varrho\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)=\vartheta_3\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)\vartheta_0(px,p\tau)$$

$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_{\mu}\sum_{0}^{p-1}{}_{\varrho}\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+2\xi+1+2^p(p-1)\varrho}{p(p-1)}\right)$$

$$\sum_{0}^{p-1}{}_{\varrho}\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+1+2^p\varrho}{p}\right)$$

Wir formen beide Gleichungen etwas um:

$$\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+2^p\varrho}{p}\right)=\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho+2^p\xi-2(2^{p-1}-1)\xi}{p}\right)$$

also unter Berücksichtigung des Fermat'schen Satzes:

$$=\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho+2^p\xi}{p}\right)$$

Wenn man in der letzten Summe: $\varrho-\xi$ statt ϱ setzt, so nimmt dieselbe folgende Gestalt an:

$$\sum_{0}^{p-1}{}_{\varrho-\xi}\,\alpha^{-(\varrho-\xi)\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)=\alpha^{\xi\mu^2}\sum_{0}^{p-1}{}_{\varrho}\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

In der vorletzten Summe setzen wir $\varrho+\xi$ statt ϱ und erhalten:

$$\sum_{0}^{p-1}{}_{\varrho+\xi}\,\alpha^{-(\varrho+\xi)\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+2\xi+2^p(p-1)(\varrho+\xi)}{p(p-1)}\right)$$

$$=\alpha^{-\xi\mu^2}\sum_{0}^{p-1}{}_{\varrho}\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+2^p(p-1)\varrho+2p\xi}{p(p-1)}+2\xi\,\frac{2^{p-1}-1}{p}\right)$$

Es ist nun nach dem Lehrsatz von Fermat $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ eine ganze, also $2\xi\cdot\frac{2^{p-1}-1}{p}$ eine gerade Zahl. Man kann aber bei den Functionen $\vartheta_3(x,\tau)$ und $\vartheta_0(x,\tau)$ den Modul um eine gerade Zahl vermehren oder vermindern, ohne die Function zu ändern.

Folglich lautet die Summe:

$$\alpha^{-\xi\mu^2}\sum_{\varrho=0}^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+2^p(p-1)\varrho+2p\xi}{p(p-1)}\right),$$

und es ist dann:

$$\text{a.}\quad \vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)=\vartheta_3\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px,p\tau)$$

$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{\mu=1}^{\frac{p-1}{2}}\sum_{\varrho=0}^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+2^p(p-1)\varrho+2p\xi}{p(p-1)}\right)\sum_{\varrho=0}^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

Ebenso können wir die 2te Gleichung umformen:

$$\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+1+2^p\varrho}{p}\right)=\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+1+p+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$=\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2^p\xi+2^p\left(\frac{p+1}{2}\right)+2^p\varrho}{p}\right)$$

$\varrho-\xi-\frac{p+1}{2}$ statt ϱ gesetzt:

$$\sum_{\varrho-\xi-\frac{p+1}{2}=0}^{p-1}\alpha^{-\left(\varrho-\xi-\frac{p+1}{2}\right)\mu^2}\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$=\alpha^{\left(\xi+\frac{p+1}{2}\right)\mu^2}\sum_{\varrho=0}^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

In der vorletzten Summe der 2ten Gleichung setzen wir:

$\varrho+\xi+\frac{p+1}{2}$ statt ϱ:

$$\sum_{\varrho+\xi+\frac{p+1}{2}=0}^{p-1}\alpha^{-\left(\varrho+\xi+\frac{p+1}{2}\right)\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+2\xi+1+2^p(p-1)\left(\varrho+\xi+\frac{p+1}{2}\right)}{p(p-1}\right)$$

$$=\alpha^{-\left(\xi+\frac{p+1}{2}\right)\mu^2}\sum_{\varrho=0}^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\frac{\tau+2^p(p-1)\varrho+2p\xi+2^{p-1}(p-1)+1}{p(p-1)}\right)$$

also:

b. $$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)=\vartheta_3\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)\vartheta_0(px,p\tau)$$
$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{\mu=1}^{\frac{p-1}{2}}\sum_{\varrho=0}^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+2^p(p-1)\varrho+2p\xi+2^{p-1}(p-1)+1}{p(p-1)}\right)$$
$$\sum_{\varrho=0}^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

Auf diese Weise erhält man das Gleichungssystem:

VI.

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)=\vartheta_3\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px,p\tau)$$
$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{\mu=1}^{\frac{p-1}{2}}\sum_{\varrho=0}^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+2^p(p-1)\varrho+2p\xi}{p(p-1)}\right)\sum_{\varrho=0}^{p-1}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\,\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)=\vartheta_3\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)\vartheta_0(px,p\tau)$$
$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{\mu}\sum_{\varrho}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+2^p(p-1)\varrho+2p\xi+2^{p-1}(p-1)+1}{p(p-1)}\right)$$
$$\sum_{\varrho}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)=e^{\frac{\pi i p\xi}{2}}\vartheta_2\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)\vartheta_2(px,p\tau)$$
$$+\frac{e^{-\pi i\frac{(2^{p-1}-1)\xi}{2p}}}{2p^2}\sum_{\mu=0}^{\frac{p-3}{2}}\sum_{\varrho}\alpha^{-2^{p-3}\varrho(2\mu+1)^2}$$
$$\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau+(2^p(p-1)+2)\xi+2^p(p-1)\varrho}{p(p-1)}\right)\sum_{\varrho}\alpha^{-2^{p-3}\varrho(2\mu+1)^2}\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)=e^{\pi i p\frac{2\xi+1}{4}}\vartheta_2\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)\vartheta_2(px,p\tau)$$
$$+\frac{e^{-\pi i\left[\frac{1}{4}+\frac{2^{p-1}-1}{2p}\left(\xi+\frac{p+1}{2}\right)\right]}}{2p^2}\sum_{\mu=0}^{\frac{p-3}{2}}\sum_{\varrho}\alpha^{-2^{p-3}\varrho(2\mu+1)^2}$$
$$\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau+2^p(p-1)\varrho-(2^p(p-1)+2)\xi+2^{p-1}(p-1)(p+1)+1}{p(p-1)}\right)$$
$$\sum_{\varrho}\alpha^{-2^{p-3}\varrho(2\mu+1)^2}\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)=\vartheta_0\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px,p\tau)$$

$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}}\sum\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+2^p(p-1)\varrho+2p\xi}{p(p-1)}\right).$$

$$\sum_{\varrho}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)=\vartheta_0\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)\vartheta_0(px,p\tau)$$

$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{\mu=1}^{\frac{p-1}{2}}\sum_{\varrho}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+2^p(p-1)\varrho+2p\xi+2^{p-1}(p-1)+1}{p(p-1)}\right)$$

$$\sum_{\varrho}\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

Die Gleichungen der Systeme V. und VI. wollen wir in eine elegantere Form bringen.

Die erste Gleichung des Systems V. ist:

$$\vartheta_3((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_3(x,\tau)=\vartheta_3(0,p(p-1)\tau)\vartheta_3(px,p\tau)$$

$$+\frac{1}{2p^2}\sum_{1}^{\frac{p-1}{2}}{}_{\mu}\sum_{0}^{p-1}{}_{\varrho}\,\alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{(p-1)\tau+2^p\varrho}{p}\right)\sum_{0}^{p-1}{}_{\varrho_0}\,\alpha^{-\varrho_0\mu^2}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho_0}{p}\right)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung führen wir statt $\alpha^{-\mu^2}$ den Ausdruck

$$\alpha^{-\mu^2+mp}=\alpha^{-g},$$

wo g eine positive Zahl und kleiner als p ist.

Dann lautet die Summe rechts, wenn wir von dem constanten Factor $\frac{1}{2p^2}$ absehen und der Einfachheit wegen: $\vartheta_3(0,p(p-1)\tau)$ mit q, $\vartheta_3(px,p\tau)$ mit Q, $\vartheta_3\left(0,\ \frac{(p-1)\tau+2^p\varrho}{p}\right)$ mit q_ϱ und $\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho_0}{p}\right)$ mit Q_{ϱ_0} bezeichnen:

$$\sum_{\mu=1}^{\frac{p-1}{2}}\sum_{\varrho=0}^{p-1}\alpha^{-\varrho g}q_\varrho\sum_{\varrho_0=0}^{p-1}\alpha^{-\varrho_0 g}Q_{\varrho_0}$$

Das bedeutet nun, die Summe soll genommen werden über alle Grössen g, die ein quadratischer Rest mod p sind, also der Gleichung genügen:

$$x^2 \equiv g \bmod p$$

Wir bezeichnen diese Werte von g mit g_1. Den Fall $g = 0$ schliessen wir zunächst aus.

Die Summe nimmt hiernach die Form an:

$$\sum_{g_1} \sum_{\varrho=0}^{p-1} \alpha^{-\varrho g_1} q_\varrho \sum_{\varrho_0=0}^{p-1} \alpha^{-\varrho_0 g} Q_{\varrho_0}$$

und der Coefficient von Q_{ϱ_0} ist also:

$$\sum_{g_1} \sum_{\varrho=0}^{p-1} \alpha^{-(\varrho+\varrho_0)g_1} q_\varrho = c_{\varrho_0}$$

Weiter existiren die schon im § 1. angedeuteten, von Jacobi aufgestellten linearen Relationen zwischen den Repräsentanten vom Grade p.

1) $$\sum_{g_2} \sum_{\varrho=0}^{p-1} \alpha^{-(\varrho+\varrho_0)g_2} q_\varrho = 0$$

wenn g_2 ein quadratischer Nichtrest mod p ist, und:

2) $$\sum_{g_0} \sum_{\varrho=0}^{p-1} \alpha^{-(\varrho+\varrho_0)g_0} q_\varrho - p \,.\, q = 0$$

wo $g_0 = 0$ ist.

In diesen 3 Summen durchlaufen nun die Zahlen g_0, g_1 und g_2 die quadratischen Reste und Nichtreste mod p, d. h. alle Zahlen von 0 bis $(p-1)$.

Die Summe dieser 3 Ausdrücke wird also die Form annehmen:

$$\sum_{g=0}^{p-1} \sum_{\varrho=0}^{p-1} \alpha^{-(\varrho+\varrho_0)g} q_\varrho - p \,.\, q = c_{\varrho_0}$$

Setzen wir nun ϱ constant und lassen g variiren, so lautet der Factor von q_ϱ:

$$\sum_{g=0}^{p-1} \alpha^{-(\varrho+\varrho_0)g}$$

Diese Summe wird nun $= 0$, wenn $\varrho + \varrho_0$ ein Nichtrest mod p, dagegen $= p$, wenn $\varrho + \varrho_0 \equiv 0 \bmod p$ ist.

Der letztere Fall tritt einmal und nur einmal ein, wenn wir ϱ die Werte von 0 bis $p-1$ durchlaufen lassen. Es werden demnach alle Summen verschwinden, mit Ausnahme desjenigen Falles, wo $\varrho = np - \varrho_0$, also auch $q_\varrho = q_{np-\varrho_0}$ ist.

In diesem Falle lautet die Gleichung:

$$\sum_{g=0}^{p-1} \alpha^{-(\varrho+\varrho_0)g} q_\varrho = p \cdot q_{np-\varrho_0}$$

also: $c_{\varrho_0} = p \cdot q_{np-\varrho_0} - p \cdot q$, und da weiter: $q_{np-\varrho_0} = q_{-\varrho_0}$ ist, so erhalten wir als Ausdruck für den Coefficienten:

$$c_{\varrho_0} = p\,(q_{-\varrho_0} - q)$$

Die Ausgangsgleichung war:

$$\vartheta_3((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_3(x,\tau) = qQ + \frac{1}{2p^2} \sum_{\mu=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{\varrho=0}^{p-1} \alpha^{-\varrho\mu^2} q_\varrho \sum_{\varrho_0=0}^{p-1} \alpha^{-\varrho_0\mu^2} Q_{\varrho_0}$$

also nach den eben gemachten Berechnungen:

$$\vartheta_3((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_3(x,\tau) = qQ + \frac{1}{2p^2} \sum_{\varrho_0=0}^{p-1} p(q_{-\varrho_0} - q) Q_{\varrho_0}$$

Nun ist nach dem Jacobi'schen Satz:

$$\sum_{\varrho_0} \alpha_{\varrho_0} = pQ, \text{ also: } \frac{1}{2p} \sum_{\varrho_0} -qQ_{\varrho_0} = -\tfrac{1}{2}qQ$$

und es folgt die Gleichung:

$$\vartheta_3((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \tfrac{1}{2}qQ + \frac{1}{2p} \sum_{\varrho_0} q_{-\varrho_0} Q_{\varrho_0}$$

oder, eingesetzt:

$$\vartheta_3((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,p(p-1)\tau)\vartheta_3(px,p\tau)$$
$$+ \frac{1}{2p} \sum_\varrho \vartheta_3\left(0, \frac{(p-1)\tau-2p\varrho}{p}\right) \vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2p\varrho}{p}\right)$$

Genau so kann man die übrigen Gleichungen der Systeme V. und VI. umformen. Man erhält dann das folgende System:

VII.

$$\vartheta_3((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,p(p-1)\tau)\vartheta_3(px,p\tau)$$
$$+ \frac{1}{2p} \sum \vartheta_3\left(0, \frac{(p-1)\tau-2p\varrho}{p}\right) \vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_3((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0,p(p-1)\tau)\vartheta_2(px,p\tau)$$
$$+ \frac{1}{2p} \sum \vartheta_2\left(0, \frac{(p-1)\tau-2p\varrho}{p}\right) \vartheta_2\left(x, \frac{\tau+2p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_0((p-1)x,(p-1)\tau)\vartheta_0(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0(0,p(p-1)\tau)\vartheta_3(px,p\tau) + \frac{1}{2p}\Sigma\,\vartheta_0\left(0,\ \frac{(p-1)\tau-2^p\varrho}{p}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2\xi}{p-1}\right).\vartheta_3(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px,p\tau) + \frac{1}{2p}\Sigma\,\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau-2^p(p-1)\varrho+2p\xi}{p(p-1)}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)\vartheta_0(px,p\tau) + \frac{1}{2p}\Sigma\,\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau-2^p(p-1)\varrho+2p\xi+2^{p-1}(p-1)+1}{p(p-1)}\right)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+2\xi}{p-1}\right) = \tfrac{1}{2}e^{\frac{\pi i p\xi}{2}}\vartheta_2\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)\vartheta_2(px,p\tau) + \frac{e^{\frac{-\pi i(2^{p-1}-1)\xi}{2p}}}{2p}\Sigma\,\vartheta_2\left(0,\frac{\tau-2^p(p-1)\varrho+(2^p(p-1)+2)\xi}{p(p-1)}\right)\vartheta_2\left(x,\frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right) = \tfrac{1}{2}e^{\pi i p\frac{2\xi+1}{4}}\vartheta_2\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)\vartheta_2(px,p\tau) + \frac{e^{-\pi i\left[\frac{1}{4}+\frac{2^{p-1}}{2p}\left(\xi+\frac{p+1}{2}\right)\right]}}{2p}\Sigma\,\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau-2^p(p-1)\varrho+(2^p(p-1)+2)\xi+2^{p-1}(p-1)(p+1)+1}{p(p-1)}\right)\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2\xi}{p-1}\right) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi}{p-1}\right)\vartheta_3(px,p\tau) + \frac{1}{2p}\Sigma\,\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau-2^p(p-1)\varrho+2p\xi}{p(p-1)}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0,p\,\frac{\tau+2\xi+1}{p-1}\right)\vartheta_0(px,p\tau) + \frac{1}{2p}\Sigma\,\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau-2^p(p-1)\varrho+2p\xi+2^{p-1}(p-1)+1}{p(p-1)}\right)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2^p\varrho}{p}\right)$$

Die übrigen Formeln findet man durch Substitution halber Perioden. Mit Hülfe dieser Formeln kann man nun einen jeden belie-

bigen Transformationsgrad p behandeln, vorausgesetzt, dass p eine Primzahl, und die Transformation $(p-1)$ter Ordnung bekannt ist.

Es soll nun in den folgenden beiden Paragraphen die Transformation 3ter und 5ter Ordnung durchgeführt werden. Dazu wird teilweise das System V. und VI., und teilweise das System VII. benutzt werden. Mit Hülfe dieser Formeln werden wir ausserdem eine grosse Anzahl von Thetarelationen zwischen den verschiedenen Repräsentanten und den ursprünglichen Thetafunctionen finden.

§ 5.

Die Transformation dritter Ordnung:

Wir werden zur Durchführung der Transformation 3ter Ordnung von 3 verschiedenen Methoden Gebrauch machen, also auch 3fache Resultate erhalten.

Setzt man in dem System V. des vorigen Paragraphen $p=3$, so gewinnt man daraus:

$$\vartheta_3(2x,2\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \vartheta_3(0,6\tau)\vartheta_3(3x,3\tau) + \frac{1}{18}\Sigma\alpha^{-\varrho}\vartheta_3\left(0,\ \frac{2\tau+8\varrho}{3}\right)\Sigma\alpha^{-\varrho}\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+8\varrho}{3}\right)\ (\varrho=0,1,2)$$

$$= \vartheta_3(0,6\tau)\vartheta_3(3x,3\tau)+\frac{1}{18}\left(\vartheta_3\left(0,\ \frac{2\tau}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(0,\ \frac{2\tau+8}{3}\right)\right.$$

$$\left.+\alpha\vartheta_3\left(0,\ \frac{2\tau+16}{3}\right)\right)\left(\vartheta_3(x,\tau/_3)+\alpha^2\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+8}{3}\right)+\alpha\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+16}{3}\right)\right)$$

Wir bringen die beiden Summen in den Klammern in eine andere Form, indem wir wieder den Jacobi'schen Satz anwenden.

$$\vartheta_3(x,\tau/_3+\alpha\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+8}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+16}{3}\right)=0$$

$$\vartheta_3(x,\tau/_3+\ \vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+8}{3}\right)+\ \vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+16}{3}\right)-3\vartheta_3(3x,3\tau)=0$$

dazu addirt:

$$\vartheta_3(x,\tau/_3)+\alpha^2\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+8}{3}\right)+\alpha\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+16}{3}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau/_3)+\alpha^2\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+8}{3}\right)+\alpha\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+16}{3}\right)=-3(\vartheta_3(3x,3\tau)-\vartheta_3(x,\tau/_3))$$

$x=0$ und 2τ statt τ gesetzt:

$$\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+8}{3}\right)+\alpha\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+16}{3}\right)$$
$$=-3\left(\vartheta_3(0,6\tau)-\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)$$

Es folgt:

$$\vartheta_3(2x,2\tau)\vartheta_3(x,\tau)=\vartheta_3(0,\ 6\tau)\vartheta_3(3x,3\tau)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_3(0,6\tau)-\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\left(\vartheta_3(3x,3\tau)-\vartheta_3(x,\tau/_3)\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_3(0,6\tau)-\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_3(3x,3\tau)-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_3(0,6\tau)-\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_3(x,\tau/_3)$$

Ebenso findet man alle übrigen Producte, so dass man folgendes System erhält:

I.

$$\vartheta_3(2x,2\tau)\vartheta_3(x,\tau)=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_3(0,6\tau)-\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_3(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_3(0,6\tau)-\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_3(x,\tau/_3)$$

$$\vartheta_3(2x,2\tau)\vartheta_2(x,\tau)=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_2(0,6\tau)-\vartheta_2\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_2(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_2(0,6\tau)-\vartheta_2\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_2(x,\tau/_3)$$

$$\vartheta_0(2x,2\tau)\vartheta_0(x,\tau)=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_0(0,6\tau)-\vartheta_0\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_3(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_0(0,6\tau)-\vartheta_0\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_3(x,\tau/_3)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau/_2)=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_3\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)-\vartheta_3(0,\tau/_6)\right)\vartheta_3(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_3\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)-\vartheta_3(0,\tau/_6)\right)\vartheta_3(x,\tau/_3)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau/_2)=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_2\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)-\vartheta_2(0,\tau/_6)\right)\vartheta_2(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_2\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)-\vartheta_2(0,\tau/_6)\right)\vartheta_2(x,\tau/_3)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau/_2)=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_0\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)-\vartheta_0(0,\tau/_6)\right)\vartheta_3(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_0\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)-\vartheta_0(0,\tau/_6)\right)\vartheta_3(x,\tau/_3)$$

I.

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_3\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right)-\vartheta_3\left(0,\frac{\tau+9}{6}\right)\vartheta_0(3x,3\tau)\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_3\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right)-\vartheta_3\left(0,\frac{\tau+9}{6}\right)\right)\vartheta_0(x,\tau/_3)\right.$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_2\left(x,\frac{\tau+1}{2}\right)=\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{2}\left(3\vartheta_2\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right)-\vartheta_2\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right)\right)\vartheta_2(3x,3\tau)$$
$$-\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}}{2}\left(\vartheta_2\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right)-\vartheta_2\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right)\right)\vartheta_2(x,\tau/_3)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_0\left(x,\frac{\tau+1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_0\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right)-\vartheta_0\left(0,\frac{\tau+9}{6}\right)\right)\vartheta_0(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_0\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right)-\vartheta_0\left(0,\frac{\tau+9}{6}\right)\right)\vartheta_0(x,\tau/_3)$$

Man kann die Coefficienten symmetrischer gestalten, wenn man alle Repräsentanten einführt.

$$\vartheta_3(2x,2\tau)\vartheta_3(x,\tau)=\vartheta_3(0,6\tau)\vartheta_3(3x,3\tau)$$
$$+\frac{1}{18}\left(\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+8}{3}\right)+\alpha\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+16}{3}\right)\right)\times$$
$$\left(\vartheta_3(x,\tau/_3)+\alpha^2\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+8}{3}\right)+\alpha\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+16}{3}\right)\right)$$

$$\vartheta_3(2x,2\tau)\vartheta_3(x,\tau)=c_0\vartheta_3(3x,3\tau)+c_1\vartheta_3(x,\tau/_3)$$
$$+c_2\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+8}{3}\right)+c_3\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+16}{3}\right)$$

$$\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+8}{3}\right)+\alpha\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+16}{3}\right)=18c_1$$

$$\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)+\alpha\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+8}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+16}{3}\right)=0,$$

$$\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)+\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+8}{3}\right)+\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+16}{3}\right)-3\vartheta_3(0,6\tau)=0$$

$$c_1=\frac{1}{6}\left(\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)-\vartheta_3(0,6\tau)\right)$$

$$\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+8}{3}\right)+\alpha\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau+16}{3}\right)=\frac{18c_2}{\alpha^2}$$

$$\alpha\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau+8}{3}\right)+\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau+16}{0}\right)=0$$

$$\alpha^2\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau+8}{3}\right)+\alpha^2\vartheta^3\left(0, \frac{2\tau+16}{3}\right)-3\alpha^2\vartheta_3(0,6\tau)=0$$

Addirt:

$$c_2 = \frac{\alpha}{6}\left(\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau+8}{3}\right)-\vartheta_3(0,6\tau)\right)$$

Ebenso ist:

$$c_3 = \frac{\alpha^2}{6}\left(\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau+16}{3}\right)-\vartheta_3(0, 6\tau)\right)$$

Also:

$$\vartheta_3(2x, 2\tau)\,\vartheta_3(x, \tau)=\vartheta_3(0,6\tau)\vartheta_3(3x,3\tau)$$
$$+\frac{\alpha}{6}\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau+8}{3}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+8}{3}\right)$$
$$+\frac{\alpha^2}{6}\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau+16}{3}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+16}{3}\right)$$
$$+\frac{1}{6}\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau}{3}\right)\vartheta_3(x_3, \tau/_3)-\frac{1}{6}\vartheta_3(0,6\tau)\times$$
$$\left\{\vartheta_3(x, \tau/_3)+\alpha\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+8}{3}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+16}{3}\right)\right\}$$

demnach unter Zuhülfenahme der Relation von Jacobi:

$$\vartheta_3(2x,2\tau)\vartheta_3(x,\tau)=\vartheta_3(0,6\tau)\vartheta_3(3x,3\tau)$$
$$+\frac{1}{6}\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau}{3}\right)\vartheta_3(x,\tau/_3)+\frac{\alpha}{6}\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau+8}{3}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+8}{3}\right)$$
$$+\frac{\alpha^2}{6}\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau+16}{3}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+16}{3}\right)-\vartheta_3(0,6\tau)\vartheta_3(3x,3\tau)$$
$$+\frac{1}{6}\sum_0^2{}_\varrho\,\alpha^\varrho\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau+8\varrho}{3}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+8\varrho}{3}\right).$$

Auf dieselbe Weise findet man die übrigen Beziehungen, und das System lautet:

II.

$$\vartheta_3(2x, 2\tau)\vartheta_3(x,\tau)=\vartheta_3(0,6\tau)\vartheta_3(3x,3\tau)$$
$$+\frac{1}{6}\sum_0^2{}_\varrho\,\alpha^\varrho\vartheta_3\left(0, \frac{2\tau+8\varrho}{3}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$\vartheta_2(2x, 2\tau)\vartheta_2(x,\tau)=\vartheta_2(0,6\tau)\vartheta_2(3x,3\tau)$$
$$+\frac{1}{6}\sum_0^2{}_\varrho\,\alpha^\varrho\vartheta_2\left(0, \frac{2\tau+8\varrho}{3}\right)\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

II.

$$\vartheta_0(2x,2\tau)\vartheta_0(x,\tau) = \vartheta_0(0,6\tau)\vartheta_3(3x,3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2{}_\varrho\alpha^\varrho\vartheta_0\left(0,\frac{2\tau+8\varrho}{3}\right)\vartheta_0\left(x,\frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau/_2) = \vartheta_3\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)\vartheta_3(3x,3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2{}_\varrho\alpha^\varrho\vartheta_3\left(0,\frac{\tau+16\varrho}{6}\right)\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau/_2) = \vartheta_2\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)\vartheta_2(3x,3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2{}_\varrho\alpha^\varrho\vartheta_2\left(0,\frac{\tau+16\varrho}{6}\right)\vartheta_2\left(x,\frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau/_2) = \vartheta_0\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)\vartheta_0(3x,3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2{}_\varrho\alpha^\varrho\vartheta_0\left(0,\frac{\tau+16\varrho}{6}\right)\vartheta_0\left(x,\frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+1}{2}\right) = \vartheta_3\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_0(3x,3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2{}_\varrho\alpha^\varrho\vartheta_3\left(0,\frac{\tau+16\varrho+33}{6}\right)\vartheta_0\left(x,\frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$e^{\frac{5\pi i}{4}}\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_2\left(x,\frac{\tau+1}{2}\right) = \vartheta_2\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_2(3x,3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2{}_\varrho\alpha^\varrho\vartheta_2\left(0,\frac{\tau+16\varrho+33}{6}\right)\vartheta_2\left(x,\frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_0\left(x,\frac{\tau+1}{2}\right) = \vartheta_0\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_0(3x,3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2{}_\varrho\alpha^\varrho\vartheta_0\left(0,\frac{\tau+16\varrho+33}{6}\right)\vartheta_0\left(x,\frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

Auf eine dritte Art stellt man endlich das System dar, indem man das System VII. in § 4. zu Hülfe nimmt. Man braucht in diesem nur $p = 3$ zu setzen und erhält:

III.

$$\vartheta_3(2x,2\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,6\tau)\vartheta_3(3x,3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2{}_\varrho\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau-8\varrho}{3}\right)\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

III.

$$\vartheta_3(2x, 2\tau)\vartheta_2(x, \tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, 6\tau)\vartheta_2(3x, 3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2 \varrho\, \vartheta_2\left(0, \frac{2\tau-8\varrho}{3}\right)\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$\vartheta_0(2x, 2\tau)\vartheta_0(x, \tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0(0, 6\tau)\vartheta_3(3x, 3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2 \varrho\, \vartheta_0\left(0, \frac{2\tau-8\varrho}{3}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$\vartheta_3(x, \tau)\vartheta_3(x, \tau/_2) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0, \frac{3\tau}{2}\right)\vartheta_3(3x, 3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2 \varrho\, \vartheta_3\left(0, \frac{\tau-16\varrho}{6}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$\vartheta_3(x, \tau)\vartheta_2(x, \tau/_2) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2\left(0, \frac{3\tau}{2}\right)\vartheta_2(3x, 3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2 \varrho\, \vartheta_2\left(0, \frac{\tau-16\varrho}{6}\right)\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$\vartheta_3(x, \tau)\vartheta_0(x, \tau/_2) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0, \frac{3\tau}{2}\right)\vartheta_3(3x, 3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2 \varrho\, \vartheta_0\left(0, \frac{\tau-16\varrho}{6}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$\vartheta_0(x, \tau)\,\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0, 3\,\frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_0(3x, 3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2 \varrho\, \vartheta_3\left(0, \frac{\tau-16\varrho+33}{6}\right)\vartheta_0\left(x, \frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$e^{\frac{5\pi i}{4}}\vartheta_0(x, \tau)\,\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2\left(0, 3\,\frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_2(3x, 3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2 \varrho\, \vartheta_2\left(0, \frac{\tau-16\varrho+33}{6}\right)\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

$$\vartheta_0(x, \tau)\,\vartheta_0\left(x, \frac{\tau+1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0, 3\,\frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_0(3x, 3\tau) + \frac{1}{6}\sum_0^2 \varrho\, \vartheta_0\left(0, \frac{\tau-16\varrho+33}{6}\right)\vartheta_0\left(x, \frac{\tau+8\varrho}{3}\right)$$

Mit Hülfe der Substitution um halbe Perioden erhält man alle übrigen Formeln.

Zur vollständigen Durchführung der Transformation dritter Ordnung bedürfen wir die der 2ten Ordnung. Die Formeln derselben sind:

$$\vartheta_3^2(x,\tau) = \vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_3(2x,2\tau)+\vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_2(2x,2\tau)$$
$$\vartheta_0^2(x,\tau) = \vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_2(2x,2\tau)+\vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_3(2x,2\tau)$$
$$\vartheta_2^2(x,\tau) = \vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_3(2x,2\tau)-\vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_2(2x,2\tau)$$
$$-\vartheta_1^2(x,\tau) = \vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_2(2x,2\tau)-\vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_3(2x,2\tau)$$

$$\vartheta_3^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,\tau/_2)\vartheta_3(x,\tau/_2)+\tfrac{1}{2}\vartheta_0(0,\tau/_2(\vartheta_0(x,\tau/_2)$$
$$\vartheta_0^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,\tau/_2)\vartheta_0(x,\tau/_2)+\tfrac{1}{2}\vartheta_0(0,\tau/_2)\vartheta_3(x,\tau/_2)$$
$$\vartheta_2^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,\tau/_2)\vartheta_3(x,\tau/_2)-\tfrac{1}{2}\vartheta_0(0,\tau/_2)\,\vartheta_0(x,\tau/_2)$$
$$\vartheta_1^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,\tau/_2)\vartheta_0(x,\tau/_2)-\tfrac{1}{2}\vartheta_0(0,\tau/_2)\vartheta_3(x,\tau/_2)$$

$$\vartheta_3^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+1}{2}\right)+\tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+1}{2}\right)$$

$$\vartheta_0^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+1}{2}\right)+\tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+1}{2}\right)$$

$$i\vartheta_2^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+1}{2}\right)$$

$$i\vartheta_1^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+1}{2}\right)-\tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+1}{2}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0,\tau/_2)\vartheta_2(x,\tau/_2)$$
$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0,\tau/_2)\vartheta_1(x,\tau/_2)$$
$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = \vartheta_0(0,2\tau)\vartheta_0(2x,2\tau)$$
$$\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = \vartheta_0(0,2\tau)\vartheta_1(2x,2\tau)$$

$$2e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = \vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+1}{2}\right)$$

$$2e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_1\left(0,\ \frac{\tau+1}{2}\right)$$

Mit Hülfe dieser Relationen kann man die Potenzen und Producte der dritten Ordnung berechnen.

Es ist:

$$= \vartheta_3(0,2\tau)\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3(2x,2\tau)-\vartheta_2(0,2\tau)\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_2(2x,2\tau)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3(2x,2\tau)=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_3(0,6\tau)-\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_0(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_3(0,6\tau)-\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_0(x,\tau/_3)$$

$$-\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_2(2x,2\tau)=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_2(0,6\tau)-\vartheta_2\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_0(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_2(0,6\tau)-\vartheta_2\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_0(x,\tau/_3)$$

$$\vartheta_0^3(x,\tau)=\tfrac{1}{4}\left\{\vartheta_3(0,2\tau)\left(3\vartheta_3(0,6\tau)-\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\right.$$
$$\left.+\vartheta_2(0,2\tau)\left(3\vartheta_2(0,6\tau)-\vartheta_2\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\right\}\vartheta_0(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{4}\left\{\vartheta_3(0,2\tau)\left(\vartheta_3(0,6\tau)-\vartheta_3\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\right.$$
$$\left.+\vartheta_2(0,2\tau)\left(\vartheta_2(0,6\tau)-\vartheta_2\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\right\}\vartheta_0(x,\tau/_3)$$

Man kann $\vartheta_0^3(x,\tau)$ noch auf 2 andere Arten berechnen:

$$\vartheta_0^3(x,\tau)=\tfrac{1}{2}\vartheta_0(0,\tau/_2)\vartheta_3(x,\tau/_2)\vartheta_0(x,\tau)+\tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,\tau/_2)\vartheta_0(x,\tau/_2)\vartheta_0(x,\tau)$$

$$\vartheta_3(x,\tau/_2)\vartheta_0(x,\tau)=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_0\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)-\vartheta_0(0,\tau/_6)\right)\vartheta_0(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_0\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)-\vartheta_0(0,\tau/_6)\right)\vartheta_0(x,\tau/_3)$$

$$\vartheta_0(x,\tau/_2)\vartheta_0(x,\tau)=\tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_3\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)-\vartheta_3(0,\tau/_6)\right)\vartheta_0(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\vartheta_3\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)-\vartheta_3(0,\tau/_6)\right)\vartheta_0(x,\tau/_3)$$

$$\vartheta_0^3(x,\tau)=\tfrac{1}{4}\left\{\vartheta_3(0,\tau/_2)\left(3\vartheta_3\left(0,\frac{3\tau}{2}\right)-\vartheta_3(0,\tau/_6)\right)\right.$$
$$\left.+\vartheta_0(0,\tau/_2)(3\vartheta_0(0,\frac{3\tau}{2})-\vartheta_0(0,\tau/_6))\right\}\vartheta_0(3x,3\tau)$$
$$-\tfrac{1}{4}\left\{\vartheta_3(0,\tau/_2)\left(\vartheta_3\left(0.\frac{3\tau}{2}\right)-\vartheta_3(0,\tau/_6)\right)\right.$$
$$\left.+\vartheta_0(0,\tau/_2)(\vartheta_0(0,\frac{3\tau}{2})-\vartheta_0(0,\tau/_6))\right\}\vartheta_0(x,\tau/_3)$$

Endlich ist:

$$\vartheta_0^3(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+1}{2}\right) + \tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right)\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_0\left(x,\frac{\tau+1}{2}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3\left(x,\frac{\tau+1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_3\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right) - \vartheta_3\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right)\right)\vartheta_0(3x,3\tau) - \tfrac{1}{2}\left(\vartheta_3\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right) - \vartheta_3\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right)\right)\vartheta_0(x,\tau/3)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_0\left(x,\frac{\tau+1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_0\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right) - \vartheta_0\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right)\right)\vartheta_0(3x,3\tau) - \tfrac{1}{2}\left(\vartheta_0\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right) - \vartheta_0\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right)\right)\vartheta_0(x,\tau/3)$$

$$\vartheta_0^3(x,\tau) = \tfrac{1}{4}\left\{\vartheta_3\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right)\left(3\vartheta_3\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right) - \vartheta_3\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right)\right) + \vartheta_0\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right)\left(3\vartheta_0\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right) - \vartheta_0\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right)\right)\right\}\vartheta_0(3x,3\tau)$$

$$-\tfrac{1}{4}\left\{\vartheta_3\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right)\left(\vartheta_3\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right) - \vartheta_3\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right)\right) + \vartheta_0\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right)\left(\vartheta_0\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right) - \vartheta_0\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right)\right)\right\}\vartheta_0(x,\tau/3)$$

Ebenso werden die Producte von der Form: $\vartheta_\alpha^2(x,\tau)\vartheta_\beta(x,\tau)$ gefunden

$$\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \vartheta_0(0,2\tau)\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_0(2x,2\tau)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_0(2x,2\tau) = \tfrac{1}{2}\left(3\vartheta_0(0,6\tau) - \vartheta_0\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_3(3x,3\tau) - \tfrac{1}{2}\left(\vartheta_0(0,6\tau) - \vartheta_0\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_3(x,\tau/3)$$

$$\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0(0,2\tau)\left(3\vartheta_0(0,6\tau) - \vartheta_0\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_3(3x,3\tau) - \tfrac{1}{2}\vartheta_0(0,2\tau)\left(\vartheta_0(0,6\tau) - \vartheta_0\left(0,\frac{2\tau}{3}\right)\right)\vartheta_3(x,\tau/3)$$

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0,\tau/2)\left(3\vartheta_2\left(0,\frac{3\tau}{2}\right) - \vartheta_2(0,\tau/6)\right)\vartheta_3(3x,3\tau) - \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0,\tau/2)\left(\vartheta_2\left(0,\frac{3\tau}{2}\right) - \vartheta_2(0,\tau/6)\right)\vartheta_3(x,\tau/3)$$

$$\vartheta_0^2(x,\tau)\,\vartheta_2(x,\tau) = \frac{e^{\frac{\pi i}{2}}}{4}\vartheta_2\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right)\left(3\vartheta_2\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\vartheta_2\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right)\right)\vartheta_2(3x,3\tau) - \frac{e^{\frac{\pi i}{2}}}{4}\vartheta_2\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right)\left(\vartheta_2\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\vartheta_2\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right)\right)\vartheta_2(x,\tau/_3)$$

Um nun die Coefficienten so umzuformen, dass in ihnen nur Ausdrücke von der Form:

$$\vartheta_\alpha(0,\tau),\quad \vartheta_\alpha(0,3\tau) \text{ und } \vartheta_\alpha(0,\tau/_3)$$

vorkommen, gebrauchen wir eine Anzahl von Relationen, die alle aus der Transformation zweiter Ordnung hervorgehen.

Dieselben lauten:

$$\vartheta_3^2(0,\tau/_2) = \vartheta_3^2 + \vartheta_2^2$$

$$\vartheta_0^2(0,\tau/_2) = \vartheta_3^2 - \vartheta_2^2$$

$$\vartheta_2^2(0,\tau/_2) = 2\vartheta_2\,\vartheta_3$$

$$2\vartheta_3^2(0,2\tau) = \vartheta_3^2 + \vartheta_0^2$$

$$2\vartheta_2^2(0,2\tau) = \vartheta_3^2 - \vartheta_0^2$$

$$\vartheta_0^2(0,2\tau) = \vartheta_0\,\vartheta_3$$

$$\vartheta_3^2\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right) = \vartheta_0^2 + i\vartheta_2^2$$

$$\vartheta_0^2\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right) = \vartheta_0^2 - i\vartheta_2^2$$

$$\vartheta_2^2\left(0,\frac{\tau+1}{2}\right) = 2e^{\frac{\pi i}{4}}\vartheta_0\,\vartheta_2$$

Hieraus folgt, wenn man die Bezeichnungen einführt:

$$\vartheta_\alpha(0,3\tau) = O_\alpha, \qquad \vartheta_\alpha(0,\tau/_3) = O_\alpha':$$

$$\vartheta_3^2\left(0,\frac{3\tau}{2}\right) = O_3^2+O_2^2 \qquad \vartheta_3^2(0,\tau/_6) = O_3'^2+O_2'^2$$

$$\vartheta_0^2\left(0,\frac{3\tau}{2}\right) = O_3^2-O_2^2 \qquad \vartheta_0^2(0,\tau/_6) = O_3'^2-O_2'^2$$

$$\vartheta_2^2\left(0,\frac{3\tau}{2}\right) = 2O_2O_3 \qquad \vartheta_2^2(0,\tau/_6) = 2O_2'O_3'$$

$$2\vartheta_3^3(0,6\tau) = O_3^2+O_0^2 \qquad 2\vartheta_3^2\left(0,\frac{2\tau}{3}\right) = O_3'^2+O_0'^2$$

$$2\vartheta_2^2(0,6\tau) = O_3^2-O_0^2 \qquad 2\vartheta_2^2\left(0,\frac{2\tau}{3}\right) = O_3'^2-O_0'^2$$

$$\vartheta_0^2(0,6\tau) = O_0O_3 \qquad \vartheta_0^2\left(0,\frac{2\tau}{3}\right) = O_0'O_3'$$

$$\vartheta_3^2\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right) = O_0^2-iO_2^2 \qquad \vartheta_3^2\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right) = O_0'^2-iO_2'^2$$

$$\vartheta_0^2\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right) = O_0^2+iO_2^2 \qquad \vartheta_0^2\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right) = O_0'^2+iO_2'^2$$

$$\vartheta_2^2\left(0,3\frac{\tau+1}{2}\right) = 2e^{\frac{3\pi i}{4}}O_0O_2 \qquad \vartheta_2^2\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right) = 2e^{\frac{3\pi i}{4}}O_0'O_2'$$

Wenn man nun in diesen Formeln die Quadratwurzeln zieht, so treten sämtliche Grössen rechts mit dem positiven Zeichen auf. Eine Ausnahme bildet nur die letzte Gleichung.

Dieselbe lautet dann:

$$\vartheta_2\left(0,\frac{\tau+33}{6}\right) = e^{\frac{11\pi i}{8}}\sqrt{2O_0'O_2'}$$

Setzt man diese Werte ein, so lauten die Gleichungen für die Potenzen und Producte der dritten Ordnung:

$$\vartheta_0^3(x,\tau) = c_0\vartheta_0(3x,3\tau)+c_1\vartheta_0(x,\tau/_3)$$
$$\vartheta_3^3(x,\tau) = c_0\vartheta_3(3x,3\tau)+c_1\vartheta_3(x,\tau/_3)$$
$$-\vartheta_1^3(x,\tau) = c_0\vartheta_1(3x,3\tau)-c_1\vartheta_1(x,\tau/_3)$$
$$\vartheta_2^3(x,\tau) = c_0\vartheta_2(3x,3\tau)+c_1\vartheta_2(x,\tau/_3)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}\{\sqrt{\vartheta_3^2+\vartheta_0^2}(3\sqrt{O_3^2+O_0^2}-\sqrt{O_3'^2+O_0'^2})$$
$$+\sqrt{\vartheta_3^2-\vartheta_0^2}(3\sqrt{O_3^2-O_0^2}-\sqrt{O_3'^2-O_0'^2})\}$$

$$c_1 = -\tfrac{1}{4}\{\sqrt{\vartheta_3^2+\vartheta_0^2}(\sqrt{O_3^2+O_0^2}-\sqrt{O_3'^2+O_0'^2})$$
$$+\sqrt{\vartheta_3^2-\vartheta_0^2}(\sqrt{O_3^2-O_0^2}-\sqrt{O_3'^2-O_0'^2})\}$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}\{\sqrt{\vartheta_3^2+\vartheta_2^2}(3\sqrt{O_3^2+O_2^2}-\sqrt{O_3'^2+O_2'^2}$$
$$+\sqrt{\vartheta_3^2-\vartheta_2^2}(3\sqrt{O_3^2-O_2^2}-\sqrt{O_3'^2-O_2'^2})\}$$

$$c_1 = -\tfrac{1}{4}\{\sqrt{\vartheta_3^2+\vartheta_2^2}(\sqrt{O_3^2+O_2^2}-\sqrt{O_3'^2+O_2'^2})$$
$$+\sqrt{\vartheta_3^2-\vartheta_2^2}(\sqrt{O_3^2-O_2^2}-\sqrt{O_3'^2-O_2'^2})\}$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}\{\sqrt{\vartheta_0^2+i\vartheta_2^2}(3\sqrt{O_0^2-iO_2^2}-\sqrt{O_0'^2-iO_2'^2})$$
$$+\sqrt{\vartheta_0^2-i\vartheta_2^2}(3\sqrt{O_0^2+iO_2^2}-\sqrt{O_0'^2+iO_2'^2})\}$$

$$c_1 = -\tfrac{1}{4}\{\sqrt{\vartheta_0^2+i\vartheta_2^2}(\sqrt{O_0^2-iO_2^2}-\sqrt{O_0'^2-iO_2'^2})$$
$$+\sqrt{\vartheta_0^2-i\vartheta_2^2}(\sqrt{O_0^2+iO_2^2}-\sqrt{O_0'^2+iO_2'^2})\}$$

$$\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_3(3x,3\tau)+c_1\vartheta_3(x,\tau/_3)$$
$$\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_0(3x,3\tau)+c_1\vartheta_0(x,\tau/_3)$$
$$-\vartheta_1^2(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(3x,3\tau)+c_1\vartheta_2(x,\tau/_3)$$
$$\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(3x,3\tau)-c_1\vartheta_1(x,\tau/_3)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3}(3\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'})$$
$$c_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3}(\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'})$$

$$\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_3(3x,3\tau)+c_1\vartheta_3(x,\tau/_3)$$
$$\vartheta_1^2(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_0(3x,3\tau)+c_1\vartheta_0(x,\tau/_3)$$
$$\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(3x,3\tau)+c_1\vartheta_2(x,\tau/_3)$$
$$-\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(3x,3\tau)-c_1\vartheta_1(x,\tau/_3)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3}(3\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'})$$
$$c_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3}(\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'})$$

$$-\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(3x,3\tau)+c_1\vartheta_2(x,\tau/_3)$$
$$\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(3x,3\tau)-c_1\vartheta_1(x,\tau/_3)$$
$$\vartheta_1^2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_3(3x,3\tau)+c_1\vartheta_3(x,\tau/_3)$$
$$\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_0(3x,3\tau)+c_1\vartheta_0(x,\tau/_3)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2}(3\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})$$
$$c_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2}(\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})$$

Wie aus dem vorhergehenden ersichtlich, besteht hier eine Lücke.



Es ist nämlich nicht möglich, die Producte von der Form:

$$\vartheta_\alpha(x,\tau)\,\vartheta_\beta(x,\tau)\,\vartheta_\gamma(x,\tau)$$

durch die Repräsentanten auszudrücken. Statt derselben treten Functionen auf, die durch Differenzen von Teilwerten der Thetafunctionen gebildet werden, während die Repräsentanten, wie in § 4. ausgeführt ist, sich durch die Summe dieser Teilwerte ausdrücken lassen. Diese Classe von Functionen ist von Herrn Professor Klein genauer behandelt worden. (Siehe dessen Arbeit: Zur Theorie der elliptischen Functionen $n$ter Stufe. Ferner:

Klein, Mathematische Annalen, 17, pag. 568.

Kiepert, Crelle's Journal 87, pag. 213).

Aus den soeben aufgestellten Gleichungen fliessen nun äusserst mannigfaltige Beziehungen für die Nullwerte der Argumente. Dieselben sind schon zum grossen Teil von Göring (siehe dessen Abhandlung im 7ten Bande der mathematischen Annalen) angegeben worden. Ich werde im folgenden die mit den Göring'schen identischen Relationen mit römischen Ziffern bezeichnen.

Man erhält direct, indem man in den Transformationsgleichungen $x=0$ setzt:

$$(\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'})(O_3-O_3') = 2\sqrt{\vartheta_0{}^3\vartheta_3}-2\sqrt{O_3{}^3O_0}$$

$$1.\quad (\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'}))(O_2-O_2') = 2\sqrt{\vartheta_3{}^3\vartheta_2}-2\sqrt{O_2{}^3O_3}$$

$$(\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})(O_0-O_0') = 2\sqrt{\vartheta_2{}^3\vartheta_0}-2\sqrt{O_0{}^3O_2}$$

$$(\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'})(O_0-O_0') = 2\sqrt{\vartheta_3{}^3\vartheta_0}-2\sqrt{O_0{}^3O_3}$$

$$2.\quad (\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'})(O_3-O_3') = 2\sqrt{\vartheta_2{}^3\vartheta_3}-2\sqrt{O_3{}^3O_2}$$

$$(\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})(O_2-O_2') = -2\sqrt{\vartheta_0{}^3\vartheta_2}-2\sqrt{O_2{}^3O_0}$$

$$\frac{3\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'}}{\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'}} = \frac{O_2'}{O_2}$$

$$3.\quad \frac{3\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'}}{\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'}} = \frac{O_0'}{O_0}$$

$$\frac{3\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'}}{\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'}} = \frac{O_3'}{O_3}$$

$$(3O_0O_2O_3+O_0'O_2'O_3')(\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'})$$
$$= -2(\vartheta_2^3\sqrt{\vartheta_3\vartheta_0}+3O_0O_2O_3\sqrt{O_0O_3})$$

4. $$(3O_0O_2O_3+O_0'O_2'O_3')(\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'})$$
$$= -2(\vartheta_0^3\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3}+3O_0O_2O_3\sqrt{O_2O_3})$$

$$(3O_0O_2O_3+O_0'O_2'O_3')(\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})$$
$$= -2(\vartheta_3^3\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2}+3O_0O_2O_3\sqrt{O_0O_2})$$

Man kann dem Gleichungssysem 3. auch folgende Form geben:

$$\frac{\sqrt{O_0\,O_2}}{\sqrt{O_0'O_2'}} = -\frac{O_3-O_3'}{3O_3-O_3'}$$

5. $$\frac{\sqrt{O_0\,O_3}}{\sqrt{O_0'O_3'}} = \frac{O_2-O_2'}{3O_2-O_2'}$$

$$\frac{\sqrt{O_2\,O_3}}{\sqrt{O_2'O_3'}} = \frac{O_0-O_0'}{3O_0-O_0'}$$

Durch andere Zusammenfassung dieser Systeme ergeben sich folgende Relationen:

$$(3\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'})(O_3-O_3') = 2\vartheta_0\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3}-2O_3'\sqrt{O_0O_3}$$

6. $$(3\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'})(O_2-O_2') = 2\vartheta_3\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3}-2O_2'\sqrt{O_2O_3}$$

$$(3\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})(O_0-O_0') = 2\vartheta_2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2}-2O_0'\sqrt{O_0O_2}$$

$$(3\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'})(O_0-O_0') = 2\vartheta_3\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3}-2O_0'\sqrt{O_0O_3}$$

7. $$(3\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'})(O_3-O_3') = 2\vartheta_2\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3}-2O_3'\sqrt{O_2O_3}$$

$$(3\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})(O_2-O_2') = -2\vartheta_0\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2}-2O_2'\sqrt{O_0O_2}$$

$$(3O_0O_2O_3+O_0'O_2'O_3')(3\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'})$$
$$= -2(\vartheta_2^3\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3}+O_0'O_2'O_3'\sqrt{O_0O_3})$$

8. $$(3O_0O_2O_3+O_0'O_2'O_3')(3\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'})$$
$$= -2(\vartheta_0^3\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3}+O_0'O_2'O_3'\sqrt{O_2O_3})$$

$$(3O_0O_2O_3-O_0'O_2'O_3')(3\sqrt{O_0O_2}-\sqrt{O_0'O_2'})$$
$$= -2(\vartheta_3^3\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2}+O_0'O_2'O_3'\sqrt{O_0O_2})$$

$$(\sqrt{O_0 O_3}-\sqrt{O_0' O_3'})(O_2-O_2') = -2O_2\sqrt{O_0 O_3}$$

$$9. \quad (\sqrt{O_2 O_3}-\sqrt{O_2' O_3'})(O_0-O_0') = -2O_0\sqrt{O_2 O_3}$$

$$(\sqrt{O_0 O_2}+\sqrt{O_0' O_2'})(O_3-O_3') = -2O_3\sqrt{O_0 O_2}$$

$$(3\sqrt{O_0 O_3}-\sqrt{O_0' O_3'})(O_2-O_2') = -2O_2'\sqrt{O_0 O_3}$$

$$10. \quad (3\sqrt{O_2 O_3}-\sqrt{O_2' O_3'})(O_0-O_0') = -2O_0'\sqrt{O_2 O_3}$$

$$(3\sqrt{O_0 O_2}+\sqrt{O_0' O_2'})(O_3-O_3') = -2O_3'\sqrt{O_0 O_2}$$

Man findet durch Division 2er entsprechenden Formeln in 1. und 2:

$$\frac{O_3 O_0'-O^0 O_3'}{\vartheta_2(O_2-O_2')} = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_3}{O_0 O_3}}$$

$$11. \quad \frac{O_3 O_2'-O_2 O_3'}{\vartheta_0(O_0-O_0')} = \sqrt{\frac{\vartheta_2\vartheta_3}{O_2 O_3}}$$

$$\frac{O_2 O_0'-O_0 O_2'}{\vartheta_3(O_3-O_3')} = \sqrt{\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{O_0 O_2}}$$

Durch Division dieser Formeln erhält man mit Hülfe von IV in § 2.:

$$\frac{O_0-O_0'}{O_2-O_2'} = -\sqrt{\frac{\vartheta_0 O_2}{\vartheta_2 O_0}}$$

$$12. \quad \frac{O_3-O_3'}{O_2-O_2'} = \sqrt{\frac{\vartheta_3 O^2}{\vartheta_2 O_3}}$$

$$\frac{O_0-O_0'}{O_3-O_3'} = -\sqrt{\frac{\vartheta_0 O_3}{\vartheta_3 O_0}}$$

und durch Combination dieser Formeln mit 5.:

$$\frac{3O_3-O_3'}{3O_2-O_2'} = -\sqrt{\frac{\vartheta_3 O_2'}{\vartheta_2 O_3'}}$$

$$13. \quad \frac{3O_3-O_3'}{3O_0-O^{0'}} = \sqrt{\frac{\vartheta_3 O_0'}{\vartheta_0 O_3'}}$$

$$\frac{3O_0-O_0'}{3O_2-O_2'} = -\sqrt{\frac{\vartheta_0 O_2'}{\vartheta_2 O_0'}}$$

Ebenso gelangt man durch Division der Formeln in 9. und 10. mit Zuhülfenahme von 12. und 13. zu folgenden Beziehungen:

$$\frac{\sqrt{O_0 O_3}-\sqrt{O_0' O_3'}}{\sqrt{O_2 O_3}-\sqrt{O_2' O_3'}} = -\frac{O_2\sqrt{\vartheta_0}}{O_0\sqrt{\vartheta_2}}$$

$$14. \quad \frac{\sqrt{O_2 O_3}-\sqrt{O_2' O_3'}}{\sqrt{O_0 O_2}+\sqrt{O_0' O_2'}} = -\frac{O_0\sqrt{\vartheta_3}}{O_3\sqrt{\vartheta_0}}$$

$$\frac{\sqrt{O_0 O_2}+\sqrt{O_0' O_2'}}{\sqrt{O_0 O_3}-\sqrt{O_0' O_3'}} = \frac{O_3\sqrt{\vartheta_2}}{O_2\sqrt{\vartheta_3}}$$

und:

$$\frac{3\sqrt{O_0 O_3}-\sqrt{O_0' O_3'}}{3\sqrt{O_2 O_3}-\sqrt{O_2' O_3'}} = -\frac{O_2'\sqrt{\vartheta_0}}{O_0'\sqrt{\vartheta_2}}$$

$$15. \quad \frac{3\sqrt{O_2 O_3}-\sqrt{O_2' O_3'}}{3\sqrt{O_0 O_2}+\sqrt{O_0' O_2'}} = -\frac{O_0'\sqrt{\vartheta_3}}{O_3'\sqrt{\vartheta_0}}$$

$$\frac{3\sqrt{O_0 O_2}+\sqrt{O_0' O_2'}}{3\sqrt{O_0 O_3}-\sqrt{O_0' O_3'}} = \frac{O_3'\sqrt{\vartheta_2}}{O_2'\sqrt{\vartheta_3}}$$

Wir setzen nun:

$$O_2 O_0' - O_0 O_2' = O_0(3O_2 - O_2') - O_2(3O_0 - O_0')$$

$$\frac{\sqrt{O_3}}{\sqrt{O_3'}}(O_2 O_0' - O_0 O_2') = \frac{\sqrt{O_0\, O_3}}{\sqrt{O_0' O_3'}}\sqrt{O_0 O_0'}(3O_2 - O_2')$$

$$-\frac{\sqrt{O_2\, O_3}}{\sqrt{O_2'\, O_3'}}\sqrt{O_2 O_2'}(3O_0 - O_0')$$

Wenden wir jetzt 5. an, so ergiebt sich:

$$\frac{\sqrt{O_3}}{\sqrt{O_3'}}(O_2 O_0' - O_0 O_2') = (O_2 - O_2')\sqrt{O_0 O_0'} - (O_0 - O_0')\sqrt{O_2 O_2'}$$

$$= O_2\sqrt{O_0 O_0'} + O_0'\sqrt{O_2 O_2'} - O_0\sqrt{O_2 O_2'} - O_2'\sqrt{O_0 O_0'}$$

$$\frac{\sqrt{O_3}}{\sqrt{O_3'}}(\sqrt{O_2 O_0'}+\sqrt{O_0 O_2'})(\sqrt{O_2 O_0'}-\sqrt{O_0 O_2'})$$

$$= (\sqrt{O_0 O_2}+\sqrt{O_0' O_2'})(\sqrt{O_2 O_0'}-\sqrt{O_0 O_2'})$$

$$\sqrt{O_3}(\sqrt{O_2 O_0'}+\sqrt{O_0 O_2'}) = \sqrt{O_3'}(\sqrt{O_0 O_2}+\sqrt{O_0' O_2'})$$

Durch Umformung erhält man noch 2 ähnliche Gleichungen, also:

$$\sqrt{O_3}(\sqrt{O_2 O_0'}+\sqrt{O_0 O_2'}) = \sqrt{O_3'}(\sqrt{O_0 O_2}+\sqrt{O_0' O_2'})$$

$$16. \quad \sqrt{O_2}(\sqrt{O_0 O_3'}-\sqrt{O_3 O_0'}) = \sqrt{O_2'}(\sqrt{O_0 O_3}-\sqrt{O_0' O_3'})$$

$$\sqrt{O_0}(\sqrt{O_2 O_3'}-\sqrt{O_3 O_2'}) = \sqrt{O_0'}(\sqrt{O_2 O_3}-\sqrt{O_2' O_3'})$$

Die erste dieser Formeln findet sich bei Göring angegeben.

Man kann sie auch umformen:

$$\frac{\sqrt{\vartheta_3}}{\sqrt{\vartheta_3'}}\left(\frac{\sqrt{\vartheta_2}}{\sqrt{\vartheta_2'}}+\frac{\sqrt{\vartheta_0}}{\sqrt{\vartheta_0'}}\right)=\frac{\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2}+\sqrt{\vartheta_0'\vartheta_2'}}{\sqrt{\vartheta_0'\vartheta_2'}}$$

XII.

$$\frac{\sqrt{\vartheta_2\,\vartheta_3}}{\sqrt{\vartheta_2'\,\vartheta_3'}}+\frac{\sqrt{\vartheta_0\,\vartheta_3}}{\sqrt{\vartheta_0'\vartheta_3'}}-\frac{\sqrt{\vartheta_0\,\vartheta_2}}{\sqrt{\vartheta_0'\vartheta_2'}}=1.$$

Ebenso findet man:

$$\frac{\sqrt{\vartheta_2'\vartheta_3'}}{\sqrt{\vartheta_2\,\vartheta_3}}+\frac{\sqrt{\vartheta_0'\vartheta_3'}}{\sqrt{\vartheta_0\,\vartheta_3}}-\frac{\sqrt{\vartheta_0'\vartheta_2'}}{\sqrt{\vartheta_0\,\vartheta_2}}=3,$$

oder:

$$17.\quad \begin{aligned}&\sqrt{\frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}}-\sqrt{\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}}=\sqrt{\frac{\vartheta_0'\vartheta_2'\vartheta_3'}{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}}\\ &\sqrt{\frac{\vartheta_0}{\vartheta_0'}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2'}}-\sqrt{\frac{\vartheta_3}{\vartheta_3'}}=3\sqrt{\frac{\vartheta_0\,\vartheta_2\,\vartheta_3}{\vartheta_0'\vartheta_2'\vartheta_3'}}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$18.\quad \left(\sqrt{\frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}}-\sqrt{\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}}\right)\left(\sqrt{\frac{\vartheta_0}{\vartheta_0'}}+\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2'}}-\sqrt{\frac{\vartheta_3}{\vartheta_3'}}\right)=3.$$

Bei Anwendung von 5. ergiebt sich:

$$19.\quad \begin{aligned}&\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2'}}+\sqrt{\frac{\vartheta_0}{\vartheta_0'}}=\frac{2\sqrt{\vartheta_3\vartheta_3'}}{3\vartheta_3-\vartheta_3'}\\ &\sqrt{\frac{\vartheta_3}{\vartheta_3'}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0}{\vartheta_0'}}=\frac{2\sqrt{\vartheta_2\vartheta_2'}}{3\vartheta_2-\vartheta_2'}\\ &\sqrt{\frac{\vartheta_3}{\vartheta_3'}}-\sqrt{\frac{\vartheta_2}{\vartheta_2'}}=\frac{2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_0'}}{3\vartheta_0-\vartheta_0'}\end{aligned}$$

$$20.\quad \begin{aligned}&\sqrt{\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}}+\sqrt{\frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}}=-\frac{2\sqrt{\vartheta_3\vartheta_3'}}{\vartheta_3-\vartheta_3'}\\ &\sqrt{\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_0'}{\vartheta_0}}=-\frac{2\sqrt{\vartheta_2\vartheta_2'}}{\vartheta_2-\vartheta_2'}\\ &\sqrt{\frac{\vartheta_3'}{\vartheta_3}}-\sqrt{\frac{\vartheta_2'}{\vartheta_2}}=-\frac{2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_0'}}{\vartheta_0-\vartheta_0'}\end{aligned}$$

$$\frac{O_3}{O_3-O_3'}+\frac{O_2}{O_2-O_2'}+\frac{O_0}{O_0-O_0'}=0$$

$$\frac{O_3'}{O_3-O_3'}+\frac{O_2'}{O_2-O_2'}+\frac{O_0'}{O_0-O_0'}=-3$$

21.

$$\frac{O_3}{3O_3-O_3'}+\frac{O_2}{3O_2-O_2'}+\frac{O_0}{3O_0-O_0'}=1$$

$$\frac{O_3'}{3O_3-O_3'}+\frac{O_2'}{3O_2-O_2'}+\frac{O_0'}{3O_0-O_0'}=0$$

Nach 17. ist:

$$-\left(\sqrt{\frac{O_0'}{O_0}}+\sqrt{\frac{O_2'}{O_2}}-\sqrt{\frac{O_3'}{O_3}}\right)\sqrt{\frac{O_0'O_2'O_3'}{O_0O_2O_3}}+\frac{O_0'O_2'O_3'}{O_0O_2O_3}=0$$

$$1-\sqrt{\frac{O_0'O_3'}{O_0O_3}}-\sqrt{\frac{O_2'O_3'}{O_2O_3}}+\sqrt{\frac{O_0'O_2'}{O_0O_2}}=-2.$$

Addirt:

$$1-\sqrt{\frac{O_0'O_3'}{O_0O_3}}-\sqrt{\frac{O_2'O_3'}{O_2O_3}}+\sqrt{\frac{O_0'O_2'}{O_0O_2}}-\frac{O_2'}{O_2}\sqrt{\frac{O_0'O_3'}{O_0O_3}}$$
$$+\frac{O_3'}{O_3}\sqrt{\frac{O_0'O_2'}{O_0O_2}}-\frac{O_0'}{O_0}\sqrt{\frac{O_2'O_3'}{O_2O_3}}+\frac{O_0'O_2'O_3'}{O_0O_2O_3}=-2.$$

$$\left(1+\sqrt{\frac{O_0'O_2'}{O_0O_2}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{O_2'O_3'}{O_2O_3}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{O_0'O_3'}{O_0O_3}}\right)=-2.$$

$$(\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})(\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'})(\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'})=-2O_0O_2O_3.$$

Ebenso:

22.

$$(3\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})(3\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'})(3\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'})$$
$$=-2O_0'O_2'O_3'.$$

Wenn man die erste Gleichung mit Hülfe vo 14. umformt, so entsteht:

$$-\frac{O_0\sqrt{\vartheta_3}}{O_3\sqrt{\vartheta_0}}\cdot\frac{O_2\sqrt{\vartheta_3}}{O_3\sqrt{\vartheta_2}}(\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})^3=-2O_0O_2O_3$$

$$\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'}=2^{\frac{1}{3}}O_3\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2}{\vartheta_3^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{6}}=\frac{2^{\frac{1}{3}}O_3\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2}}{(\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3)^{\frac{1}{3}}}$$

$$O_3\sqrt{\vartheta_0\vartheta_0}=\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})$$

Durch Anwendung von 3. und 14. ergeben sich alle übrigen Gleichungen des Systems:

XIII.

23.

$$O_3\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})$$

$$O_3'\sqrt{\vartheta_0\vartheta_2} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(3\sqrt{O_0O_2}+\sqrt{O_0'O_2'})$$

$$-O_0\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'})$$

$$-O_0'\sqrt{\vartheta_2\vartheta_3} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(3\sqrt{O_2O_3}-\sqrt{O_2'O_3'})$$

$$O_2\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'})$$

$$O_2'\sqrt{\vartheta_0\vartheta_3} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(3\sqrt{O_0O_3}-\sqrt{O_0'O_3'})$$

Erhebt man die erste Gleichuug in's Quadrat, multiplicirt mit 3 und zieht davon das Quadrat der 2ten Gleichung ab, so bekommt man:

XIV.

24.

$$\frac{3O_3^2-O_3'^2}{2} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{O_0'O_2'-3O_0O_2}{\vartheta_0\vartheta_2}$$

$$\frac{3O_0^2-O_0'^2}{2} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{O_2'O_3'-3O_2O_3}{\vartheta_2\vartheta_3}$$

$$\frac{3O_2^2-O_2'^2}{2} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{O_0'O_3'-3O_0O_3}{\vartheta_0\vartheta_3}$$

Aus 23. gewinnt man noch weitere Relationen, indem man die erste Gleichung mit 3 multiplicirt und die zweite davon abzieht:

XV.

$$3O_3-O_3' = 2\sqrt{\frac{O_0'O_2'}{\vartheta_0\vartheta_2}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$3O_0-O_0' = 2\sqrt{\frac{O_2'O_3'}{\vartheta_2\vartheta_3}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$-(3O_2-O_2') = 2\sqrt{\frac{O_0'O_3'}{\vartheta_0\vartheta_3}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

25.

25.

$$-(O_3-O_3') = 2\sqrt{\frac{O_0\,O_2}{\vartheta_0\,\vartheta_2}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$O_0-O_0' = 2\sqrt{\frac{O_2\,O_3}{\vartheta_2\,\vartheta_3}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$-(O_2-O_2') = 2\sqrt{\frac{O_0\,O_3}{\vartheta_0\,\vartheta_3}}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Durch Combination von 25. mit 11. folgen die eleganten Relationen:

$$O_0O_2'-O_2O_0' = 2\vartheta_3\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

26. $$O_3O_2'-O_2O_3' = 2\vartheta_0\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$O_0O_3'-O_3O_0' = 2\vartheta_2\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

und durch Multiplication aller 3 erhält man:

27. $$(O_0O_2'-O_2O_0')(O_3O_2'-O_2O_3')(O_0O_3'-O_3O_0') = 4\vartheta_0^2\vartheta_2^2\vartheta_3^2$$

Combinirt man das System 26. mit dem System V. in § 2, so gelangt man zu den Gleichungen:

$$3O_0O_2+O_0'O_2' = 2\frac{\vartheta_3^3}{O_3O_3'}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

28. $$3O_2O_3+O_2'O_3' = 2\frac{\vartheta_0^3}{O_0O_0'}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$3O_0O_3+O_0'O_3' = 2\frac{\vartheta_2^3}{O_2O_2'}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Aus 23. fliessen mit Hülfe von 16. folgende Beziehungen:

XVII.

$$\sqrt{O_3O_3'}\sqrt{\vartheta_0\,\vartheta_2} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_0O_2'}+\sqrt{O_2O_0'})$$

29. $$\sqrt{O_0O_0'}\;\sqrt{\vartheta_2\,\vartheta_3} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_3O_2'}-\sqrt{O_2\,O_3'})$$

$$\sqrt{O_2O_2'}\;\sqrt{\vartheta_0\,\vartheta_3} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_0O_3'}-\sqrt{O_3O_0'})$$

Durch Addition und Subtraction erhält man aus 23. und 29.:

XVIII.

30.

$$\sqrt{O_3\vartheta_0\vartheta_2}(\sqrt{O_3}+\sqrt{O_3'}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_0}+\sqrt{O_0'})(\sqrt{O_2}+\sqrt{O_2'})$$

$$\sqrt{O_3\vartheta_0\vartheta_2}(\sqrt{O_3}-\sqrt{O_3'}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_0}-\sqrt{O_0'})(\sqrt{O_2}-\sqrt{O_2'})$$

$$\sqrt{O_3'\vartheta_0\vartheta_2}(\sqrt{3O_3}+\sqrt{O_3'} = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{3O_0}+\sqrt{O_0'})(\sqrt{3O_2}+\sqrt{O_2'})$$

$$-\sqrt{O_3'\vartheta_0\vartheta_2}(\sqrt{3O_3}-\sqrt{O_3'}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{3O_0}-\sqrt{O_0'})(\sqrt{3O_2}-\sqrt{O_2'})$$

$$-\sqrt{O_0\vartheta_2\vartheta_3}(\sqrt{O_0}+\sqrt{O_0'}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_3}+\sqrt{O_3'})(\sqrt{O_2}-\sqrt{O_2'})$$

$$-\sqrt{O_0\vartheta_2\vartheta_3}(\sqrt{O_0}-\sqrt{O_0'}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_3}-\sqrt{O_3'})(\sqrt{O_2}+\sqrt{O_2'})$$

$$-\sqrt{O_0'\vartheta_2\vartheta_3}(\sqrt{3O_0}+\sqrt{O_0'}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{3O_3}+\sqrt{O_3'})(\sqrt{3O_2}-\sqrt{O_2'})$$

$$\sqrt{O_0'\vartheta_2\vartheta_3}(\sqrt{3O_0}-\sqrt{O_0'}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{3O_3}-\sqrt{O_3'})(\sqrt{3O_2}+\sqrt{O_2'})$$

$$\sqrt{O_2\vartheta_0\vartheta_3}(\sqrt{O_2}+\sqrt{O_2'}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_3}+\sqrt{O_3'})(\sqrt{O_0}-\sqrt{O_0'})$$

$$-\sqrt{O_2\vartheta_0\vartheta_3}(\sqrt{O_2}-\sqrt{O_2'}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{O_3}-\sqrt{O_3'})(\sqrt{O_0}+\sqrt{O_0'})$$

$$\sqrt{O_2'\vartheta_0\vartheta_3}(\sqrt{3O_2}+\sqrt{O_2'}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{3O_3}+\sqrt{O_3'})(\sqrt{3O_0}+\sqrt{O_0'})$$

$$-\sqrt{O_2'\vartheta_0\vartheta_3}(\sqrt{3O_2}-\sqrt{O_2'}) = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}(\sqrt{3O_3}-\sqrt{O_3'})(\sqrt{3O_0}-\sqrt{O_0'})$$

Durch Multiplication ergiebt sich:

XIX.

31.

$$-2\sqrt{O_0O_2O_3} = (\sqrt{O_3}+\sqrt{O_3'})(\sqrt{O_0}-\sqrt{O_0'})(\sqrt{O_2}-\sqrt{O_2'})$$

$$-2\sqrt{O_0O_2O_3} = (\sqrt{O_3}-\sqrt{O_3'})(\sqrt{O_0}+\sqrt{O_0'})(\sqrt{O_2}+\sqrt{O_2'})$$

$$-2\sqrt{O_0'O_2'O_3'} = (\sqrt{3O_3}+\sqrt{O_3'})(\sqrt{3O_0}-\sqrt{O_0'})(\sqrt{3O_2}-\sqrt{O_2'})$$

$$2\sqrt{O_0'O_2'O_3'} = (\sqrt{3O_3}-\sqrt{O_3'})(\sqrt{3O_0}+\sqrt{3O_0'})(\sqrt{3O_2}+\sqrt{O_2'})$$

und durch Multiplication hieraus:

XVI.

$$32.\quad \begin{aligned} &(3O_3-O_3')(3O_2-O_2')(3O_0-O_0') = -4O_0'O_2'O_3' \\ &(O_3-O_3')(O_2-O_2')(O_0-O_0') = 4O_0O_2O_3 \end{aligned}$$

Es ist nach 23.:

$$\vartheta_2^2\vartheta_0^2O_3O_3'-\vartheta_2^2\vartheta_3^2O_0O_0' = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\Big\{(3O_0O_2+4\sqrt{O_0O_0'O_2O_2'}$$

$$+O_0'O_2')\vartheta_0-(3O_2O_3-4\sqrt{O_2O_2'O_3O_3'}+\sqrt{O_2'O_3'})\vartheta_3\Big\}\vartheta_2$$

$$2\vartheta_2^2\vartheta_0^2O_3O_3'-2\vartheta_2^2\vartheta_3^2O_0O_0' = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\Big\{(2O_0O_2'+2O_2O_0'$$

$$+4\sqrt{O_0O_0'O_2O_2'})\vartheta_0-(2O_3O_2'+2O_2O_3'-4\sqrt{O_2O_2'O_3O_3'})\vartheta_3\Big\}\vartheta_2$$

Subtrahirt:

$$\vartheta_2^2\vartheta_0^2O_3O_3'-\vartheta_2^2\vartheta_3^2O_0O_0' = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\Big\{(2O_0O_2'+2O_2O_0'-3O_0O_2$$

$$-O_0'O_2')\vartheta_0-(2O_3O_2'+2O_2O_3'-3O_2O_3-O_2'O_3')\vartheta_3\Big\}\vartheta_2$$

Da nun nach IV. in § 2.:

$$\vartheta_3(O_3-O_3') = \vartheta_2(O_2-O_2')+\vartheta_0(O_0-O_0')$$

so ist:

$$\vartheta_2^2\vartheta_0^2O_3O_3'-\vartheta_2^2\vartheta_3^2O_0O_0' = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\Big\{-2\vartheta_2O_2O_2'-2\vartheta_2O_2O_2'$$

$$+3\vartheta_2O_2^2+\vartheta_2O_2'^2\Big\}\vartheta_2$$

$$\vartheta_0^2O_3O_3'-\vartheta_3^2O_0O_0' = \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\Big\{3O_2^2-4O_2O_2'+O_2'^2\Big\}$$

Es ist aber nach 25.:

$$3O_2^2-4O_2O_2'+O_2'^2 = (3O_2-O_2')(O_2-O_2')$$

$$= \frac{1}{\vartheta_0\vartheta_3}\sqrt{O_0O_0'O_3O_3'}\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

und demnach:

$$\vartheta_0^2O_3O_3'-\vartheta_3^2O_0O_0' = 2\vartheta_2\left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\sqrt{O_0O_0'O_3O_3'}$$

Dann erhält man das System:

XXIII.

$$\vartheta_0^2 O_3 O_3' - \vartheta_3^2 O_0 O_0' = 2\vartheta_2 \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{O_0 O_0' O_3 O_3'}$$

$$33. \quad \vartheta_2^2 O_3 O_3' - \vartheta_3^2 O_2 O_2' = 2\vartheta_0 \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{O_2 O_2' O_3 O_3'}$$

$$\vartheta_2^2 O_0 O_0' + \vartheta_0^2 O_2 O_2' = 2\vartheta_3 \left(\frac{\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \sqrt{O_0 O_0' O_2 O_2'}$$

und durch Anwendung von 26.:

$$\vartheta_0^2 \sqrt{\frac{O_3 O_3'}{O_0 O_0'}} - \vartheta_3^2 \sqrt{\frac{O_0 O_0'}{O_3 O_3'}} = O_3 O_0' - O_0 O_3'$$

$$34. \quad \vartheta_2^2 \sqrt{\frac{O_3 O_3'}{O_2 O_2'}} - \vartheta_3^2 \sqrt{\frac{O_2 O_2'}{O_3 O_3'}} = O_2 O_3' - O_3 O_2'$$

$$\vartheta_2^2 \sqrt{\frac{O_0 O_0'}{O_2 O_2'}} + \vartheta_0^2 \sqrt{\frac{O_2 O_2'}{O_0 O_0'}} = O_2 O_0' - O_0 O_2'$$

Die Zahl der auf diese Methode zu gewinnenden Relationen ist hiermit selbstverständlich noch nicht erschöpft. Ich sehe indes von weiteren Beziehungen ab, unterlasse es auch, die Transformation 3ter Ordnung für die Systeme II. und III. dieses Paragraphen vollständig durchzuführen, indem ich glaube gezeigt zu haben, wie fruchtbar unsere Methode nach dieser Richtung hin ist.

§ 6.

Die Transformation fünfter Ordnung.

Man erhält sämtliche Producte der Transformation 5ter Ordnung wenn man in dem System VII., § 4. $p = 5$ setzt.

I.

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3(4x,4\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,20\tau)\vartheta_3(5x,5\tau) + \frac{1}{10}\Sigma\vartheta_3\left(0, \frac{4\tau-32\varrho}{5}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2(4x,4\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0,20\tau)\vartheta_3(5x,5\tau) + \frac{1}{10}\Sigma\vartheta_2\left(0, \frac{4\tau-32\varrho}{5}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_0(4x,4\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0(0,20\tau)\vartheta_3(5x,5\tau) + \frac{1}{10}\Sigma\vartheta_0\left(0, \frac{4\tau-32\varrho}{5}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

I.

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau/_4) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{5\tau}{4}\right)\vartheta_3(5x,5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}\Sigma\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau-128\varrho}{20}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau/_4) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0,\ \frac{5\tau}{4}\right)\vartheta_3(5x,5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}\left(\Sigma\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau-128\varrho}{20}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right.$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau/_4) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2\left(0,\ \frac{5\tau}{4}\right)\vartheta_2(5x,5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}\Sigma\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau-128\varrho}{20}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+2}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0,5\frac{\tau+2}{4}\right)\vartheta_3(5x,5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}\Sigma\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau-128\varrho+130}{20}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+2}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0,5\frac{\tau+2}{4}\right)\vartheta_3(5x,5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}\Sigma\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau-128\varrho+130}{20}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2\left(x,\ \frac{x+2}{4}\right) = \frac{i}{2}\vartheta_2\left(0,5\frac{\tau+2}{4}\right)\vartheta_2(5x,5\tau)$$
$$+\frac{i}{10}\Sigma\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau-128\varrho+130}{20}\right)\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+1}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0,5\frac{\tau+1}{4}\right)\vartheta_0(5x,5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}\Sigma\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau-128\varrho-255}{20}\right)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+1}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0,5\frac{\tau+1}{4}\right)\vartheta_0(5x,5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}\Sigma\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau-128\varrho-255}{20}\right)\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+1}{4}\right) = \tfrac{1}{2}e^{\frac{5\pi i}{4}}\vartheta_2\left(0,5\frac{\tau+1}{4}\right)\vartheta_2(5x,5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}e^{\frac{5\pi i}{4}}\Sigma\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau-128\varrho-255}{20}\right)\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

I.

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+3}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0, 5\,\frac{\tau+3}{4}\right)\vartheta_0(5x, 5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}\Sigma\vartheta_3\left(0, \frac{\tau-128\varrho-125}{20}\right)\vartheta_0\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_0\left(x, \frac{\tau+3}{4}\right) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0, 5\,\frac{\tau+3}{4}\right)\vartheta_0(5x, 5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}\Sigma\vartheta_0\left(0, \frac{\tau-128\varrho-125}{20}\right)\vartheta_0\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+3}{4}\right) = \tfrac{1}{2}e^{\frac{7\pi i}{4}}\vartheta_2\left(0, 5\,\frac{\tau+3}{4}\right)\vartheta_2(5x, 5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}e^{\frac{7\pi i}{4}}\Sigma\vartheta_2\left(0, \frac{\tau-128\varrho-125}{20}\right)\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

(ϱ von 0 bis 4)

Es kommen in der Transformation 4ter Ordnung ferner Repräsentanten von der Form: $\vartheta_\alpha(2x,\tau)$ vor. Um nun die Producte dieser Repräsentanten mit den fundamentalen Thetafunctionen zu erhalten, geht man von folgenden Gleichungen aus:

$$\vartheta_3(2x, 4\tau) + \vartheta_2(2x, 4\tau) = \vartheta_3(x,\tau)$$
$$\vartheta_3(2x, 4\tau) - \vartheta_2(2x, 4\tau) = \vartheta_0(x,\tau).$$

a. $$\vartheta_3(4x, 4\tau) + \vartheta_2(4x. 4\tau) = \vartheta_3(2x,\tau)$$

b. $$\vartheta_3(4x, 4\tau) - \vartheta_2(4x, 4\tau) = \vartheta_0(2x,\tau)$$

Aus den vorigen Gleichungen folgt noch:

$$\vartheta_2(2x, 4\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(x,\tau) - \tfrac{1}{2}\vartheta_0(x,\tau)$$

$\tau/_4$ statt τ gesetzt.

c. $$\vartheta_2(2x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(x,\tau/_4) - \tfrac{1}{2}\vartheta_0(x,\tau/_4)$$

Diese 3 Rnlationen wenden wir an:

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3(4x, 4\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(0, 20\tau)\vartheta_3(5x, 5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}\sum_0^4{}_\varrho\vartheta_3\left(0, \frac{4\tau-32\varrho}{5}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2(4x, 4\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0, 20\tau)\vartheta_3(5x, 5\tau)$$
$$+\frac{1}{10}\sum_0^4{}_\varrho\vartheta_2\left(0, \frac{4\tau-32\varrho}{5}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right).$$

Addirt und subtrahirt:

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3(2x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,5\tau)\vartheta_3(5x,5\tau) + \frac{1}{10}\sum_0^4{}_\varrho\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_0(2x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0(0,5\tau)\vartheta_3(5x,5\tau) + \frac{1}{10}\sum_0^4{}_\varrho\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

Weiter ist:

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau/_4) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\left(0,\ \frac{5\tau}{4}\right)\vartheta_3(5x,5\tau) + \frac{1}{10}\Sigma\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau-128\varrho}{20}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau/_4) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0\left(0,\ \frac{5\tau}{4}\right)\vartheta_3(5x,5\tau) + \frac{1}{10}\Sigma\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau-128\varrho}{20}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

Subtrahirt:

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2(2x,\tau) = \vartheta_2(0,5\tau)\vartheta_3(5x,5\tau) + \frac{1}{10}\Sigma\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

Durch Substitution halber Perioden erhält man:

A.

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3(2x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3(2x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_3(2x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_3(2x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_1\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{2}\vartheta_3(0,5\tau)$$

$$c_1 = \frac{1}{10}\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

B.

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_0(2x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_0(2x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

B.

$$-\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_0(2x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau)+\Sigma c_1\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$-\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_0(2x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau)+\Sigma c_1\vartheta_1\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{2}\vartheta_0(0,5\tau)$$

$$c_1 = \frac{1}{10}\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

C.

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2(2x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau)+\Sigma c_1\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$-\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_2(2x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau)+\Sigma c_1\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_2(2x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau)+\Sigma c_1\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$-\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_2(2x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau)+\Sigma c_1\vartheta_1\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{2}\vartheta_2(0,5\tau)$$

$$c_1 = \frac{1}{10}\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

Um nun die Potenzen und Producte fünfter Ordnung zu bilden, muss man zunächst diejenigen der 4ten Ordnung berechnen.

Es ist:

$$\vartheta_3^4(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3^3\vartheta_3(2x,\tau)+\tfrac{1}{2}\vartheta_0^3\vartheta_0(2x,\tau)+\tfrac{1}{2}\vartheta_2^3\vartheta_2(2x,\tau)$$
$$\vartheta_0^4(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3^3\vartheta_3(2x,\tau)+\tfrac{1}{2}\vartheta_0^3\vartheta_0(2x,\tau)-\tfrac{1}{2}\vartheta_2^3\vartheta_2(2x,\tau)$$
$$\vartheta_2^4(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3^3\vartheta_3(2x,\tau)-\tfrac{1}{2}\vartheta_0^3\vartheta_0(2x,\tau)+\tfrac{1}{2}\vartheta_2^3\vartheta_2(2x,\tau)$$
$$\vartheta_1^4(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3^3\vartheta_3(2x,\tau)-\tfrac{1}{2}\vartheta_0^3\vartheta_0(2x,\tau)-\tfrac{1}{2}\vartheta_2^3\vartheta_2(2x,\tau)$$

$$\vartheta_3^3(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(x,\tau/_4)+c_1\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+2}{4}\right)$$

$$\vartheta_0^3(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(x,\tau/_4)+c_1\vartheta_1\left(x,\ \frac{\tau+2}{4}\right)$$

$$\vartheta_2^3(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_2(x,\tau/_4)-c_1\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+2}{4}\right)$$

$$\vartheta_1^3(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_1(x,\tau/_4)-c_1\vartheta_1\left(x,\ \frac{\tau+2}{4}\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{16}\vartheta_2^3(0, \tau/_4)$$

$$c_1 = \frac{1}{16i}\vartheta_2^3\left(0, \frac{\tau+2}{4}\right)$$

$$\vartheta_0^3(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_0(4x, 4\tau) + c_1\vartheta_2\left(2x, \frac{2\tau+1}{2}\right)$$

$$\vartheta_3^3(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_0(4x, 4\tau) - c_1\vartheta_2\left(2x, \frac{2\tau+1}{2}\right)$$

$$-\vartheta_1^3(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_1(4x, 4\tau) + c_1\vartheta_1\left(2x, \frac{2\tau+1}{2}\right)$$

$$\vartheta_2^3(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(4x, 4\tau) - c_1\vartheta_1\left(2x, \frac{2\tau+1}{2}\right)$$

$$c_0 = \vartheta_0^3(0, 4\tau)$$

$$c_1 = \frac{i}{4}\vartheta_2^3\left(0, \frac{2\tau+1}{2}\right)$$

$$\vartheta_0^3(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+1}{4}\right) + c_1\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+3}{4}\right)$$

$$\vartheta_3^3(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+1}{4}\right) + c_1\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+3}{4}\right)$$

$$i\vartheta_1^3(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+1}{4}\right) - c_1\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+3}{4}\right)$$

$$i\vartheta_2^3(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+1}{4}\right) - c_1\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+3}{4}\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{16e^{\frac{\pi i}{4}}}\vartheta_2^3\left(0, \frac{\tau+1}{4}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{16e^{\frac{3\pi i}{4}}}\vartheta_2^3\left(0, \frac{\tau+3}{4}\right)$$

$$\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(x, \tau/_4) + c_1\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+2}{4}\right)$$

$$\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(x, \tau/_4) + c_1\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+2}{4}\right)$$

$$-\vartheta_1^2(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_2(x, \tau/_4) - c_1\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+2}{4}\right)$$

$$-\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_1(x, \tau/_4) - c_1\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+2}{4}\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{16e^{\frac{\pi i}{4}}} \vartheta_2(0, \tau/_4) \vartheta_2^2\left(0, \frac{\tau+2}{4}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{16e^{\frac{\pi i}{4}}} \vartheta_2^2(0, \tau/_4) \vartheta_2\left(0, \frac{\tau+2}{4}\right)$$

$$\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_0(4x, 4\tau) + c_1\vartheta_2\left(2x, \frac{2\tau+1}{2}\right)$$

$$\vartheta_1^2(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_0(4x, 4\tau) - c_1\vartheta_2\left(2x, \frac{2\tau+1}{2}\right)$$

$$\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(4x, 4\tau) + c_1\vartheta_1\left(2x, \frac{2\tau+1}{2}\right)$$

$$\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_1(4x, 4\tau) - c_1\vartheta_1\left(2x, \frac{2\tau+1}{2}\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{2e^{\frac{\pi i}{4}}} \vartheta_0(0, 4\tau) \vartheta_2^2\left(0, \frac{2\tau+1}{2}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{2e^{\frac{\pi i}{4}}} \vartheta_0^2(0, 4\tau) \vartheta_2\left(0, \frac{2\tau+1}{2}\right)$$

$$\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+1}{4}\right) + c_1\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+3}{4}\right)$$

$$\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+1}{4}\right) + c_1\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+3}{4}\right)$$

$$-i\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+1}{4}\right) - c_1\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+3}{4}\right)$$

$$-i\vartheta_1^2(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+1}{4}\right) - c_1\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+3}{4}\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{8i}\vartheta_2\left(0, \frac{\tau+1}{4}\right)\vartheta_2^2\left(0, \frac{\tau+3}{4}\right)$$

$$c_1 = \frac{1}{8i}\vartheta_2^2\left(0, \frac{\tau+1}{4}\right)\vartheta_2\left(0, \frac{\tau+3}{4}\right)$$

$$\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_2^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\vartheta_2^2\vartheta_3(2x,\tau) + \tfrac{1}{2}\vartheta_3^2\vartheta_2\vartheta_2(2x,\tau)$$
$$\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_1^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3\vartheta_2^2\vartheta_3(2x,\tau) - \tfrac{1}{2}\vartheta_3^2\vartheta_2\vartheta_2(2x,\tau)$$

$$\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_0^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0\vartheta_3^2\vartheta_0(2x,\tau) + \tfrac{1}{2}\vartheta_0^2\vartheta_3\vartheta_3(2x,\tau)$$
$$\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_1^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0\vartheta_3^2\vartheta_0(2x,\tau) - \tfrac{1}{2}\vartheta_0^2\vartheta_3\vartheta_3(2x,\tau)$$

$$\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_2^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_0^2\vartheta_2(2x,\tau) + \tfrac{1}{2}\vartheta_2^2\vartheta_0\vartheta_0(2x,\tau)$$
$$\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_1^2(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_0^2\vartheta_2(2x,\tau) - \tfrac{1}{2}\vartheta_2^2\vartheta_0\vartheta_0(2x,\tau)$$

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_0\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(2x,\tau)$$

Mit Hülfe dieser Beziehungen können wir die Transformation 5ter Ordnung durchführen. Wir erhalten:

$$\vartheta_3^5(x,\tau) = \tfrac{1}{2}\vartheta_3^3\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3(2x,\tau) + \tfrac{1}{2}\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_0^3\vartheta_0(2x,\tau) + \tfrac{1}{2}\vartheta_2^3\vartheta_3(x,\tau)(\vartheta_2(2x,\tau)$$
$$= \tfrac{1}{4}\vartheta_3^3(\vartheta_3(0,5\tau)\vartheta_3(5x,5\tau) + \tfrac{1}{5}\sum_0^4{}_\varrho\vartheta_3\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$
$$+\tfrac{1}{4}\vartheta_0^3(\vartheta_0(0,5\tau)\vartheta_3(5x,5\tau) + \tfrac{1}{5}\sum_0^4{}_\varrho\vartheta_0\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$
$$+\tfrac{1}{4}\vartheta_2^3(\vartheta_2(0,5\tau)\vartheta_3(5x,5\tau) + \tfrac{1}{5}\sum_0^4{}_\varrho\vartheta_2\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}(\vartheta_3^3\vartheta_3(0,5\tau) + \vartheta_0^3\vartheta_0(0,5\tau) + \vartheta_2^3\vartheta_2(0,5\tau))\vartheta_3(5x,5\tau)$$
$$+ \frac{1}{20}\sum_0^4{}_\varrho\left(\vartheta_3^3\vartheta_3\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) + \vartheta_0^3\vartheta_0\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right.$$
$$\left.+ \vartheta_2^3\vartheta_2\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3^5(x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0^5(x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_0\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_2^5(x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_1^5(x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}(\vartheta_3^3\vartheta_3(0,5\tau) + \vartheta_0^3\vartheta_0(0,5\tau) + \vartheta_2^3\vartheta_2(0,5\tau))$$

$$c_1 = \frac{1}{20}\left(\vartheta_3^3\vartheta_3\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) + \vartheta_0^3\vartheta_0\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right.$$
$$\left.+ \vartheta_2^3\vartheta_2\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$

$$\vartheta_3^4(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0^4(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_1\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_2^4(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_1^4(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}(\vartheta_3^3\vartheta_3(0,5\tau) - \vartheta_0^3\vartheta_0(0,5\tau) + \vartheta_2^3\vartheta_2(0,5\tau))$$

$$c_1 = \frac{1}{20}\left(\vartheta_3^3\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) - \vartheta_0^3\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) + \vartheta_2^3\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$

$$\vartheta_3^4(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0^4(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_2^4(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_1\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_1^4(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}(\vartheta_3^3\vartheta_3(0,5\tau) + \vartheta_0^3\vartheta_0(0,5\tau) - \vartheta_2^3\vartheta_2(0,5\tau))$$

$$c_1 = \frac{1}{20}\left(\vartheta_3^3\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) + \vartheta_0^3\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) - \vartheta_2^3\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$

$$\vartheta_3^4(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_1\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0^4(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_2^4(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_1^4(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}(\vartheta_3^3\vartheta_3(0,5\tau) - \vartheta_0^3\vartheta_0(0,5\tau) - \vartheta_2^3\vartheta_2(0,5\tau))$$

$$c_1 = \frac{1}{20}\left(\vartheta_3^3\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) - \vartheta_0^3\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) - \vartheta_2^3\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$

$$\vartheta_3^3(x,\tau)\vartheta_2^2(x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0^3(x,\tau)\vartheta_1^2(x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_2^3(x,\tau)\vartheta_3^2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_1^3(x,\tau)\vartheta_0^2(x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_1\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2\vartheta_3(0,5\tau) + \vartheta_3\vartheta_2(0,5\tau))$$

$$c_1 = \frac{1}{20}\vartheta_2\vartheta_3\left(\vartheta_2\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) + \vartheta_3\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$

$$\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_1^2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_1\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_1^2(x,\tau)\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}\vartheta_2\vartheta_3(\vartheta_2\vartheta_3(0,5\tau) - \vartheta_3\vartheta_2(0,5\tau))$$

$$c_1 = \frac{1}{20}\vartheta_2\vartheta_3\left(\vartheta_2\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) - \vartheta_3\vartheta_2\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$

$$\vartheta_3^3(x,\tau)\vartheta_0^2(x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_3\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0^3(x,\tau)\vartheta_3^2(x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_0\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$-\vartheta_2^3(x,\tau)\vartheta_1^2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_2\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$-\vartheta_1^3(x,\tau)\vartheta_2^2(x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_1\left(x,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}\vartheta_0\vartheta_3(\vartheta_0\vartheta_3(0,5\tau) + \vartheta_3\vartheta_0(0,5\tau))$$

$$c_1 = \frac{1}{20}\vartheta_0\vartheta_3\left(\vartheta_0\vartheta_3\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) + \vartheta_3\vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$

$$\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$-\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_1^2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$-\vartheta_1^2(x,\tau)\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_0\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}\vartheta_0\vartheta_3(\vartheta_0\vartheta_3(0,5\tau) - \vartheta_3\vartheta_0(0,5\tau))$$

$$c_1 = \frac{1}{20}\vartheta_0\vartheta_3\left(\vartheta_0\vartheta_3\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) - \vartheta_3\vartheta_0\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$

$$\vartheta_0^3(x,\tau)\vartheta_2^2(x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_0\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3^3(x,\tau)\vartheta_1^2(x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$-\vartheta_1^3(x,\tau)\vartheta_3^2(x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$-\vartheta_2^3(x,\tau)\vartheta_0^2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}\vartheta_0\vartheta_2(\vartheta_2\vartheta_0(0,5\tau) - \vartheta_0\vartheta_2(0,5\tau))$$

$$c_1 = \frac{1}{20}\vartheta_0\vartheta_2\left(\vartheta_2\vartheta_0\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) - \vartheta_0\vartheta_2\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$

$$\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_3(x,\tau) = c_0\vartheta_3(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_1^2(x,\tau)\vartheta_0(x,\tau) = c_0\vartheta_0(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_0\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$-\vartheta_1^2(x,\tau)\vartheta_3^2(x,\tau)\vartheta_2(x,\tau) = c_0\vartheta_2(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_2\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$-\vartheta_2^2(x,\tau)\vartheta_0^2(x,\tau)\vartheta_1(x,\tau) = c_0\vartheta_1(5x,5\tau) + \Sigma c_1\vartheta_1\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

$$c_0 = \tfrac{1}{4}\vartheta_0\vartheta_2(\vartheta_2\vartheta_0(0,5\tau) + \vartheta_0\vartheta_2(0,5\tau))$$

$$c_1 = \frac{1}{20}\vartheta_0\vartheta_2\left(\vartheta_2\vartheta_0\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right) + \vartheta_0\vartheta_2\left(0, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)\right)$$

Wie beim Fall $p = 3$, so besteht auch hier eine Lücke. Es können nämlich die Producte von der Form: $\vartheta_\alpha(x,\tau)\vartheta_\beta(x,\tau)\vartheta_\gamma(x,\tau)\vartheta_\delta^2(x,\tau)$ wo δ beliebig ist, α, β und γ aber verschieden von einander sind, nicht durch die Repräsentanten ausgedrückt werden, sondern man muss wieder die Klein'schen Functionen einführen.

Ich versuche jetzt die Transformation 5ter Ordnung für 3 Repräsentanten durchzuführen. Dazu bediene ich mich einer Formel, die leicht aus V. in § 4. folgt. Dieselbe lautet:

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3(2x,\tau) = \vartheta_3(0,5\tau)\vartheta_3(5x,5\tau)$$
$$+\frac{1}{50}\sum_{\mu=1,2}\sum_\varrho \alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(0, \frac{\tau-32\varrho}{5}\right)\sum_\varrho \alpha^{-\varrho\mu^2}\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)$$

Nun kann man mit Hülfe der Jacobi'schen Relationen:

$$\vartheta_3(x,\tau/_5)+\alpha^2\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32}{5}\right)+\alpha^4\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2.32}{5}\right)$$
$$+\alpha\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+3.32}{5}\right)+\alpha^3\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+4.32}{5}\right) = 0$$

$$\vartheta_3(x,\tau/_5)+\alpha^3\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32}{5}\right)+\alpha\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2.32}{5}\right)$$
$$+\alpha^4\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+3.32}{5}\right)+\alpha^2\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+4.32}{5}\right) = 0$$

$$\vartheta_3(x,\tau/_5)+\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32}{5}\right)+\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2.32}{5}\right)$$
$$+\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+3.32}{5}\right)+\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+4.32}{5}\right)-5\vartheta_3(5x,5\tau) = 0$$

und der entsprechenden Relationen für die Nullwerte der Argumente aus der obigen Gleichung 3 Repräsentanten climiniren. Wenn wir z. B. $\vartheta_3(x,\tau/_5)$, $\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+2.32}{5}\right)$ und $\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+3.32}{5}\right)$ samt den entsprechenden Repräsentanten für die Nullwerte eliminiren, so erhalten wir:

$$\vartheta_3(x,\tau)\vartheta_3(2x,\tau)=\vartheta_3(0,5\tau)\vartheta_3(5x,5\tau)-\frac{1}{2\alpha(1-\alpha)^2}$$
$$\left(\vartheta_3\left(0, \frac{\tau+32}{5}\right)-\alpha^2\vartheta_3\left(0, \frac{\tau+4.32}{5}\right)-(1-\alpha^2)\vartheta_3(0,5\tau)\right)$$
$$\left(\alpha^2\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+32}{5}\right)-\vartheta_3\left(x, \frac{\tau+4.32}{5}\right)+(1-\alpha^2)\vartheta_3(5x, 5\tau)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2\alpha(1-\alpha)^2}\Big(\alpha^2\vartheta_3\Big(0,\ \frac{\tau+32}{5}\Big)-\vartheta_3\Big(0,\ \frac{\tau+4.32}{5}\Big)\\
&+(1-\alpha^2)\vartheta_3(0,5\tau)\Big)\Big(\vartheta_3\Big(x,\ \frac{\tau+32}{5}\Big)-\alpha^2\vartheta_3\Big(x,\ \frac{\tau+4.32}{5}\Big)\\
&-(1-\alpha^2)\vartheta_3(5x,5\tau)\Big)\\
&=\Big((1+3\alpha+\alpha^2)\vartheta_3(0,5\tau)-\frac{(1+\alpha)^2}{2\alpha}\Big(\vartheta_3\Big(0,\ \frac{\tau+32}{5}\Big)\\
&+\vartheta_3\Big(0,\ \frac{\tau+4.32}{5}\Big)\Big)\Big)\vartheta_3(5x,5\tau)\\
&-\Big(\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\vartheta_3(0,5\tau)+\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\vartheta_3\Big(0,\ \frac{\tau+32}{5}\Big)\\
&-\frac{1+\alpha^4}{2\alpha(1-\alpha)^2}\vartheta_3\Big(0,\ \frac{\tau+4.32}{5}\Big)\Big)\vartheta_3\Big(x,\ \frac{\tau+32}{5}\Big)\\
&-\Big(\frac{1+\alpha^2}{2\alpha}\vartheta_3(0,5\tau)-\frac{1+\alpha^4}{2\alpha(1-\alpha)^2}\vartheta_3\Big(0,\ \frac{\tau+32}{5}\Big)\\
&+\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\vartheta_3\Big(0,\ \frac{\tau+4.32}{5}\Big)\Big)\vartheta_3\Big(x,\ \frac{\tau+4.32}{5}\Big)
\end{aligned}
$$

Ebenso kann man alle analogen Formeln aufstellen und daraus die Potenzen und Producte der 5ten Ordnung gewinnen, wobei die Coefficienten der Repräsentanten rationale Functionen für die Nullwerte der Argumente sind.

Durch Vergleichung dieser Coefficienten mit den in § 3. berechneten findet man eine Anzahl von Beziehungen zwischen den ursprünglichen Functionen und 3 Repräsentanten der 5ten Ordnung.

Ich unterlasse es jedoch, dieselben aufzustellen, da einerseits die Relationen sehr complicirte Gestalten annehmen, und andererseits das Princip klar ist, nach dem sie gefunden werden können.

Aus den in diesem Paragraphen aufgestellten Transformationsgleichungen fliessen für die Nullwerte der Argumente eine grosse Anzahl meistens unbekannter Formeln.

Wir führen dazu die schon teilweise von Göring angewandten Bezeichnungen ein, da dieselben für diesen besonderen Fall den bisher angewandten vorzuziehen sind.

Wir setzen:

$$
\vartheta_3(0,\tau)=p \qquad \vartheta_3(0,5\tau)=P \qquad \vartheta_3\Big(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\Big)=P_\varrho
$$

$$
\vartheta_2(0,\tau)=r \qquad \vartheta_2(0,5\tau)=R \qquad \vartheta_2\Big(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\Big)=R_\varrho
$$

$$\vartheta_0(0,\tau)=q \qquad \vartheta_0(0,5\tau)=Q \qquad \vartheta_0\left(0,\ \frac{\tau+32\varrho}{5}\right)=Q_\varrho$$

Dann erhält man folgende Systeme:

$$\text{1.}\quad \begin{aligned} &5(p^3P+q^3Q+r^3R)P+\Sigma(p^3P_\varrho+q^3Q_\varrho+r^3R_\varrho)P_\varrho=20p^5\\ &5(p^3P+q^3Q+r^3R)Q+\Sigma(p^3P_\varrho+q^3Q_\varrho+r^3R_\varrho)Q_\varrho=20q^5\\ &5(p^3P+q^3Q+r^3R)h+\Sigma(p^3P_\varrho+q^3Q_\varrho+r^3R_\varrho)R_\varrho=20r^5 \end{aligned}$$

$$\text{2.}\quad \begin{aligned} &5(p^3P-q^3Q+r^3R)R+\Sigma(p^3P_\varrho-q^3Q_\varrho+r^3R_\varrho)R_\varrho=20p^4r\\ &5(p^3P-q^3Q-r^3R)R+\Sigma(p^3P_\varrho-q^3Q_\varrho-r^3R_\varrho)R_\varrho=20q^4r\\ &5(p^3P+q^3Q-r^3R)Q+\Sigma(p^3P_\varrho+q^3Q_\varrho-r^3R_\varrho)Q_\varrho=20p^4q\\ &5(p^3P-q^3Q-r^3R)Q+\Sigma((p^3P_\varrho-q^3Q_\varrho-r^3R_\varrho)Q_\varrho=20r^4q\\ &5(p^3P+q^3Q-r^3R)P+\Sigma(p^3P_\varrho+q^3Q_\varrho-r^3R_\varrho)P_\varrho=20q^4p\\ &5(p^3P-q^3Q+r^3R)P+\Sigma(p^3P_\varrho-q^3Q_\varrho+r^3R_\varrho)P_\varrho=20r^4p \end{aligned}$$

$$\text{3.}\quad \begin{aligned} &5(p^3P-q^3Q-r^3R)P+\Sigma(p^3P_\varrho-q^3Q_\varrho-r^3R_\varrho)P_\varrho=0\\ &5(p^3P-q^3Q+r^3R)Q+\Sigma(p^3P_\varrho-q^3Q_\varrho+r^3R_\varrho)Q_\varrho=0\\ &5(p^3P+q^3Q-r^3R)R+\Sigma(p^3P_\varrho+q^3Q_\varrho-r^3R_\varrho)R_\varrho=0 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} &25(p^3P-q^3Q+r^3R)PQR+\Sigma(p^3P_\varrho-q^3Q_\varrho+r^3R_\varrho)P_\varrho Q_\varrho R_\varrho=20q^5pr\\ &25(p^3P+q^3Q-r^3R)PQR+\Sigma(p^3P_\varrho+q^3Q_\varrho-r^3R_\varrho)P_\varrho Q_\varrho E_\varrho=20r^5pq\\ &25(p^3P-q^3Q-r^3R)PQR+\Sigma(p^3P_\varrho-q^3Q_\varrho-r^3R_\varrho)P_\varrho Q_\varrho R_\varrho=20p^5qr \end{aligned}$$

$$\text{5.}\quad 25(p^3P+q^3Q+r^3R)PQR+\Sigma(p^3P_\varrho+q^3Q_\varrho+r^3R_\varrho)P_\varrho Q_\varrho R_\varrho=0$$

$$\text{6.}\quad \begin{aligned} &5(rP+pR)P+\Sigma(rP_\varrho+pR_\varrho)P_\varrho=20p^2r\\ &5(qP+pQ)P+\Sigma(qP_\varrho+pQ_\varrho)P_\varrho=20p^2q\\ &5(qP+pQ)Q+\Sigma(qP_\varrho+pQ_\varrho)Q_\varrho=20q^2p\\ &5(rQ-qR)Q+\Sigma(rQ_\varrho-qR_\varrho)Q_\varrho=20q^2r\\ &5(rP+pR)R+\Sigma(rP_\varrho+pR_\varrho)R_\varrho=20r^2p\\ &5(rQ-qR)R+\Sigma(rQ_\varrho-qR_\varrho)R_\varrho=-20r^2q \end{aligned}$$

$$\text{7.}\quad \begin{aligned} &5(rQ-qR)P+\Sigma(rQ_\varrho-qR_\varrho)P_\varrho=0\\ &5(rP-pR)P+\Sigma(rP_\varrho-pR_\varrho)P_\varrho=0\\ &5(qP-pQ)P+\Sigma(qP_\varrho-pQ_\varrho)P_\varrho=0\\ &5(rP+pR)Q+\Sigma(rP_\varrho+pR_\varrho)Q_\varrho=0\\ &5(qP-pQ)Q+\Sigma(qP_\varrho-pQ_\varrho)Q_\varrho=0\\ &5(rQ+qR)Q+\Sigma(rQ_\varrho+qR_\varrho)Q_\varrho=0\\ &5(qP+pQ)R+\Sigma(qP_\varrho+pQ_\varrho)R_\varrho=0\\ &5(rP-pR)R+\Sigma(rP_\varrho-pR_\varrho)R_\varrho=0\\ &5(rQ+qR)R+\Sigma(rQ_\varrho+qR_\varrho)R_\varrho=0 \end{aligned}$$

$$25(rP+pR)PQR+\Sigma(rP_\varrho+pR_\varrho)P_\varrho Q_\varrho R_\varrho = 0$$
$$8. \quad 25(qP+pQ)PQR+\Sigma(qP_\varrho+pQ_\varrho)P_\varrho Q_\varrho R_\varrho = 0$$
$$25(rQ-qR)PQR+\Sigma(rQ_\varrho-qR_\varrho)P_\varrho Q_\varrho R_\varrho = 0$$

$$5(rP-pR)Q+\Sigma(rP_\varrho-pR_\varrho)Q_\varrho = 20pqr$$
$$9. \quad 5(qP-pQ)R+\Sigma(qP_\varrho-pQ_\varrho)R_\varrho = 20pqr$$
$$5(rQ+qR)P+\Sigma(rQ_\varrho+qR_\varrho)P_\varrho = 20pqr$$

$$25(rP-pR)PQR+\Sigma(rP_\varrho-pR_\varrho)P_\varrho Q_\varrho R_\varrho = 20p^2qr^2$$
$$10. \quad 25(qP-pQ)PQR+\Sigma(qP_\varrho-pQ_\varrho)P_\varrho Q_\varrho R_\varrho = 20p^2q^2r$$
$$25(rQ+qR)PQR+\Sigma(rQ_\varrho+qR_\varrho)P_\varrho Q_\varrho R_\varrho = -20pq^2r^2$$

Eine Anzahl äusserst eleganter und einfacher Beziehungen **finden** wir noch, wenn wir in den Formeln für die Producte von **der Form:**

$$\vartheta_\alpha(x,\tau)\vartheta_\beta(2x,\tau)$$

$x = 0$ setzen. Wir gelangen dann zu folgenden Relationen:

$$5P^2+\sum_{\varrho=0}^{p-1} P_\varrho^2 = 10p^2$$
$$11. \quad 5Q^2+\Sigma\, Q_\varrho^2 = 10q^2$$
$$5R^2+\Sigma\, R_\varrho^2 = 10r^2$$

Die erste Gleichung dieses Systems ist schon in einer von **Jacobi** aufgestellten Formel enthalten. Diese letztere lautet:

$$M^6+\tfrac{1}{5}(256c^2(1-c^2)-26)M^5+11M^4-12M^3+7M^2-2M+\tfrac{1}{5} = 0.$$

Weitere Gleichungssysteme sind:

$$5PQ+\Sigma P_\varrho Q_\varrho = 10pq$$
$$12. \quad 5PR+\Sigma P_\varrho R_\varrho = 10pr$$
$$5QR+\Sigma Q_\varrho R_\varrho = -10qr$$

und:

$$25P^2QR+\Sigma P_\varrho^2 Q_\varrho R_\varrho = 10p^2qr$$
$$13. \quad 25PQ^2R+\Sigma P_\varrho Q_\varrho^2 R_\varrho = -10pq^2r$$
$$25PQR^2+\Sigma P_\varrho Q_\varrho R_\varrho^2 = -10pqr^2$$

Aus dem System 11. ergeben sich noch folgende Beziehungen:

$$14. \quad 5(p^2P^2-q^2Q^2-r^2R^2)+\Sigma(p^2P_\varrho^2-q^2Q_\varrho^2-r^2R_\varrho^2) = 0.$$

$$5(p^2P^2+q^2Q^2+r^2R^2)+\Sigma(p^2P_\varrho^2+q^2Q_\varrho^2+r^2R_\varrho^2) = 20p^4$$
$$15. \quad 5(p^2P^2+q^2Q^2-r^2R^2)+\Sigma(p^2P_\varrho^2+q^2Q_\varrho^2-r^2R_\varrho^2) = 20q^4$$
$$5(p^2P^2-q^2Q^2+r^2R^2)+\Sigma(p^2P_\varrho^2-q^2Q_\varrho^2+r^2R_\varrho^2) = 20r^4$$

$$5(q^2P^2-p^2Q^2)+\Sigma(q^2P_\varrho^2-p^2Q_\varrho^2)=0$$

16. $$5(r^2P^2-p^2R^2)+\Sigma(r^2P_\varrho^2-p^2R_\varrho^2)=0$$

$$5(q^2R^2-r^2Q^2)+\Sigma(q^2R_\varrho^2-r^2Q_\varrho^2)=0.$$

Endlich gewinnt man aus 12. die Relationen:

17. $$5(p^5QR+q^5PR+r^5PQ)+\Sigma(p^5Q_\varrho R_\varrho+q^5P_\varrho R_\varrho+r^5P_\varrho Q_\varrho)=0$$

und zuletzt:

18. $$5(r^5PQ+q^5PR-p^5QR)+\Sigma(r^5P_\varrho Q_\varrho+q^5P_\varrho R_\varrho-p^5Q_\varrho R_\varrho)=20p^5qr$$

$$5(r^5PQ-q^5PR+p^5QR)+\Sigma(r^5P_\varrho Q_\varrho-q^5P_\varrho R_\varrho+p^5Q_\varrho R_\varrho)=-20q^5pr$$

$$5(r^5PQ-q^5PR-p^5QR)+\Sigma(r^5P_\varrho Q_\varrho-q^5P_\varrho R_\varrho-p^5Q_\varrho R_\varrho)=20r^5pq.$$

Sämtliche auf diese Weise gefundenen Relationen zeichnen sich durch Uebersichtlichkeit und Symmetrie, einzelne auch durch Einfachheit aus. Ich will jetzt abbrechen, da ja die Methode gegeben ist, für eine jede ungerade Primzahl Beziehungen zwischen den Repräsentanten aufzustellen.

XI.

Miscellen.

1.

Ueber complementäre Punkte.

Sind in Bezug auf das Axendreieck ABC

$$p_a \quad p_b \quad p_c$$

die trimetrischen Punktcoordinaten (proportional den Seitenabständen) des Punktes P; so wollen wir den Punkt mit den Coordinaten:

$$p_b + p_c \quad p_c + p_a \quad p_a + p_b$$

den zu P complementären Punkt nennen.

Die Construction des Punktes $p_b + p_c$ ist folgende:

$P \equiv p_a$ sei ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, J das Inkreiscentrum desselben. Die Harmonikale (gerade Polare) von J treffe AP in $\mathfrak{A}$. AJ schneide BC in J_a. Die $\mathfrak{A}J_a$ begegnen sich im Punkte $P_1 \equiv p_b + p_c$.

Es ist nämlich $J \equiv 1, 1, 1$. Dieselbe Form hat die Harmonikale von J. Ferner ist:

$$\begin{array}{llll} AP \equiv 0 & p_c & -p_b \\ \mathfrak{A} \equiv p_b + p_c & -p_b & -p_c \\ J_a \equiv 0 & 1 & 1 \\ \mathfrak{A}J_a \equiv p_b - p_c & p_b + p_c & -(p_b + p_c). \end{array}$$

Die $\mathfrak{A}J_a$ treffen sich im Punkte $P_1 \equiv p_b + p_c$.

Construiren wir zu P_1 den complementären Punkt P_2, so ist

$$P_2 \equiv 2p_a + p_b + p_c$$

P_3 sei complementär zu P_2, P_4 zu P_3, ... P_{n+1} zu P_n. Sei nun

$$P_n \equiv \varphi_n p_a + p_b + p_c,$$

dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} P_{n+1} &\equiv \varphi_n p_b + p_c + p_a + \varphi_n p_c + p_a + p_b \\ &\equiv 2p_a + (1+\varphi_n)(p_b + p_c) \\ &\equiv \left(\frac{2}{1+\varphi_n}\right) p_a + p_b + p_c \end{aligned}$$

Also ist:

$$\varphi_{n+1} = \frac{2}{1+\varphi_n}$$

Demzufolge ist $\varphi_0 = \infty$, $\varphi_1 = 0$ und für die folgenden Werte von φ erhalten wir die Reihe:

$$\frac{2}{1},\ \frac{2}{3},\ \frac{6}{5},\ \frac{10}{11},\ \frac{22}{21},\ \frac{42}{43},\ \frac{86}{85},\ \frac{170}{171},\ \cdots$$

Die Reihe der Nenner n_r der Brüche φ_r ist definirt durch die Gleichung

$$n_r = 2n_{r-1} + (-1)^{r-1}$$

Aus derselben folgt:

$$\begin{aligned} n_r &= 2^{r-2}n_2 + 2^{r-3} - 2^{r-4} + \ldots + (-1)^{r-1} \\ &= 2^{r-2} + 2^{r-3} - 2^{r-4} + \ldots + (-1)^{r-1} \\ &= 2^{r-1} - 2^{r-2} + 2^{r-3} - \ldots + (-1)^{r-1} \\ &= \frac{2^r - (-1)^r}{3} \end{aligned}$$

Allgemein ist:

$$\varphi_n = \frac{2[2^{n-1} - (-1)^{n-1}]}{2^n - (-1)^n}$$

φ_n nähert sich bei wachsenden n der Einheit. Der Punkt $P\infty$ wird also der Punkt $p_a + p_b + p_c \equiv 1$. Je öfter also die angegebene Construction wiederholt wird, desto näher gelangt man zum Inkreiscentrum. Da die angegebene Construction durch Projection sich nur insofern verändert als der Punkt J ein beliebiger Punkt Q des Dreiecks ABC wird, können wir folgenden Satz aussprechen:

Es seien P, Q zwei beliebige Punkte in der Ebene des Dreiecks ABC. Trifft AQ die BC in Q_a, die Harmonikale von Q die AP in $\mathfrak{A}$; so schneiden sich die $\mathfrak{A}Q_a$ in einem Punkte P_1. Wird dieselbe Construction statt mit P nun mit P_1 wiederholt, so erhält

man einen Punkt P_2. Wird ebenso mit P_2 wie mit P_1 construirt und dieses Verfahren fortgesetzt, so nähert sich immer mehr der Punkt P_r dem Punkte Q.

Die Verbindungsgerade eines beliebigen Punktes $P \equiv p_a$ mit seinem complementären Punkte $P_1 \equiv p_b + p_c$ ist die Gerade $p_b - p_c$. Diese geht aber auch durch das Inkreiscentrum J; also:

Ein beliebiger Punkt, der complementäre desselben und das Inkreiscentrum liegen in einer Geraden.

Jeder Punkt der Geraden PJ hat die Form

$$\varphi\, p_a + p_b + p_c$$

und ihm entspricht complementär der Punkt

$$\left(\frac{2}{1+\varphi}\right) p_a + p_b + p_c$$

Die Parameter der Doppelpunkte der beiden Punktreihen:

$$\varphi, \quad \frac{2}{1+\varphi}$$

ergeben sich aus:

$$\varphi = \frac{2}{1+\varphi}$$

und sind: $+1$, -2. Die Doppelpunkte haben also die Formen:

$$p_a + p_b + p_c \qquad -2p_a + p_b + p_c$$

Da ausserdem

$$\Sigma(-2p_a + p_b + p_c) = 0,$$

haben wir den Satz:

Auf jeder durch das Inkreiscentrum eines Dreiecks gehenden Geraden gibt es ausser dem Inkreiscentrum noch einen Punkt, der mit seinem complementären zusammenfällt; derselbe liegt zugleich auf der Harmonikalen des Inkreiscentrums.

Die Punkte $P \equiv p_a$, $Q \equiv p_b p_c$ heissen reciproke Punkte. Der complementäre Punkt Q_1 von $Q \equiv p_b p_c$ hat die Form:

$$p_c p_a + p_a p_b = p_a(p_b + p_c)$$

Derselbe kann direct durch folgende Construction erhalten werden:

$P \equiv p_a$ sei ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, J das Inkreiscentrum desselben. AJ treffe BC in J_a, AP die $J_b J_c$ in A'. Die $A'J_a$ schneiden sich im Punkte

$$Q_2 \equiv p_a(p_b + p_c).$$

Es ist nämlich:

$$\begin{array}{llll}
AP \equiv & 0 & p_c & -p_b \\
J_a \equiv & 0 & 1 & 1 \\
J_b J_c \equiv & -1 & 1 & 1 \\
A' \equiv & p_b + p_c & p_b & p_c \\
A' J_a \equiv & p_b - p_c & -(p_b + p_c) & p_b + p_c
\end{array}$$

Die $A'J_a$ treffen sich im Punkte $Q_1 \equiv p_a(p_b + p_c)$.

Schliesslich sei noch auf einen Zusammenhang der complementären und reciproken Punkte hingewiesen. Trifft $AP(P \equiv p_a)$ die BC in P_a und sind P_a' die complementären Punkte der P_a, so schneiden sich die AP_a' in $Q \equiv p_b p_c$.

Es ist nämlich:

$$\begin{array}{llll}
P_a \equiv & 0 & p_b & p_c \\
P_a' \equiv & p_b + p_c & p_c & p_b \\
AP_a' \equiv & 0 & p_b & -p_c
\end{array}$$

Die AP_a' treffen sich in $Q \equiv p_b p_c$.

Es kann also der zu einem gegebenen Punkte reciproke Punkt auf folgende Weise construirt werden:

$P \equiv p_a$ sei ein beliebiger Punkt in der Ebene des Dreiecks ABC, J dessen Inkreiscentrum. AJ treffe BC in J_a, die Harmonikale von J die AP in $\mathfrak{A}$. Die Verbindungsgeraden der Schnittpunkte $(\mathfrak{A}J_a,\ J_b J_c)$ mit den Gegenecken gehen durch den Punkt $Q \equiv p_b p_c$.

Wien, October 1885.

Emil Hain.

2.

Einige Sätze, die sich auf reguläre Polygone beziehen, und daraus sich ergebende trigonometrische Relationen.

I.

Bevor wir auf unser Thema näher eingehen, sei es uns gestattet, einige Bemerkungen über die Symmetrieaxen einer algebraischen Curve zu machen.

Zu irgend einer algebraischen Curve werden im allgemeinen nicht notwendig eine oder me[illegible]nde Linien gehören, welche

die Curve in zwei gleiche Hälften teilen. Sind jedoch solche Linien — Symmetrieaxen der Curve — vorhanden, so werden dieselben gewissen Bedingungen unterworfen sein. Zunächst müssen sie sich, einem bekannten Theorem der alg. Curven zufolge, in einem und demselben Punkte schneiden.

Was ferner x die Anzahl derselben anbelangt, so ergiebt sich, dass zu irgend einem Element (Punkt oder Tangente) der Curve aus Gründen der Symmetrie mindestens die doppelte Anzahl, als die Curve Symmetrieaxen hat, solcher Curvenelemente einem Kreis um den Schnittpunkt der Symmetrieaxen angehören.

Daraus folgt sofort, den Kreis und die gerade Linie ausgenommen, dass keine Curve mehr Symmetrieaxen besitzen kann, als ihr Grad oder ihre Classe beträgt. Ist dies dennoch der Fall, so zerfällt die Curve notwendig in concentrische Kreise. Dies ermöglicht es uns folgenden Satz auszusprechen:

„Jede Curve, die mehr Symmetrieaxen zulässt, als ihre Ordnung „oder Classe beträgt, besteht notwendig aus einem oder mehreren „concentrischen Kreisen".

II.

Der oben entwickelte Satz ermöglicht es uns bei ganzen Gruppen geometrischer Oerter, die sich auf reguläre Polygone beziehen, im voraus schon zu behaupten, dass dieselben aus Kreisen bestehen. Alle diese Oerter, welche sich auf alle Seiten des Polygons gleichartig beziehen, besitzen nämlich notwendiger Weise so viele Symmetrieaxen als das Polygon Ecken oder Seiten hat.

Sind so z. B.: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ die Entfernungen eines Punktes P von den Seiten und $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_n$ die Entfernungen des Punktes von den Ecken des Polygons, so zerfällt jede der Curven:

$$\varphi(\alpha) = \alpha_1^p \alpha_2^q \alpha_3^r + \ldots \alpha_n^t + \alpha_2^p \alpha_3^q \ldots \alpha_1^t + \ldots + \alpha_n^p \alpha_1^q \ldots \alpha_{n-1}^t = \text{const}\,(p+q+\ldots t < n)$$

und

$$\psi(\beta^2) = \beta_1^{2p} \beta_2^{2q} \ldots \beta_n^{2t} + \beta_2^{2p} \beta_3^{2q} \ldots \beta_1^{2t} + \ldots + \beta_n^{2p} \beta_1^{2q} \ldots \beta_{n-1}^{2t} = \text{const}\left(p+q+\ldots t < \frac{n}{2}\right)$$

in concentrische Kreise.

Hiebei haben wir stillschweigend vorausgesetzt, dass der Mittelpunkt des Polygons von sämtlichen Seiten gleichartige Entfernung hat.

Fassen wir dieses Resultat zusammen, so finden wir folgenden Doppelsatz:

„Beschreiben wir um den Mittelpunkt eines reg. Polygons irgend „einen Kreis, so hat jede Function, die durch cyklische Vertauschung „der Entfernungen eines Punktes des Kreises von den Seiten oder „die durch die Quadrate der Entfernungen des Punktes von den „Ecken des Polygons gebildet wird einen festen Wert, der Punkt „möge auf dem Kreise liegen, wo er wolle; wenn nur der Grad der- „selben kleiner als die Seitenzahl des Polypons ist"; oder:

„Jede auf die obige Art entstandene Function eines Punktes in „Bezug auf ein reg. Polygon ändert sich nicht, wenn das Polygon „um seinen Mittelpunkt gedreht wird".

Von den vielen Folgerungen, die sich als specielle Fälle aus dem allgemeinen Satz ergeben, sei nur erwähnt, dass z. B. aus

$$\varphi(\alpha) = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \dots \alpha_n \alpha_1 = \text{const}$$

folgt, wenn wir sämtliche Glieder mit $\sin \frac{2\pi}{n}$ multipliciren.

Fällen wir von irgend einem Punkt eines Kreises, der um den Mittelpunkt eines reg. Polygons beschrieben ist, Lote auf die Seiten des Polygons und verbinden deren Fusspunkte, so entsteht ein Polygon von constantem Inhalt. (Es ist dies ein spec. Fall eines Steiner'schen Satzes, in dessen Abhandlung über Fusspunktscurven).

Multipliciren wir ferner $\varphi(\alpha)$ mit einer entsprechenden Potenz der Seitenlänge des Polygons, so finden wir überdies, dass an Stelle der Entfernungen eines Punktes von den Seiten des Polygons die Dreiecke treten können, welche der Punkt mit den Seiten des Polygons bildet.

Wird ferner der Wert von $\varphi(\alpha)$ oder $\psi(\beta^2)$ zu Null, so können wir die Gleichung $\varphi(\alpha)$ oder $\psi(\beta^2)$ durch irgend eine Potenz von $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n$ resp. $\beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \dots \beta_n^2$ dividiren und erhalten alsdann ebenfalls als Oerter bestimmte Kreise. So stellt z. B.:

$$\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots \frac{1}{\alpha_n} = 0,$$

die Kreise dar, welche um den Mittelpunkt des Polygons beschrieben sind und die durch die Schnittpunkte je 2er Seiten eines Polygons gehen.

Ist z. B.: P ein Punkt des Umkreises des reg. Dreiecks ABC, so wäre, wenn PA_1, PB_1 und PC_1 die Entfernungen des Punktes von dessen Seiten sind:

$$\frac{1}{PA_1}+\frac{1}{PB_1}+\frac{1}{PC_1}=0$$

oder:

$$\frac{1}{\triangle ABP}+\frac{1}{\triangle ACP}+\frac{1}{BCP}=0.$$

Ebenso ist der Hauptsatz noch giltig, wenn an Stelle der Function $\varphi(\alpha)$ oder $\psi(\beta^2)$ tritt, jedoch ist hiebei stets zu achten, dass alsdann keine der n Symmetrien verloren geht.

III.

So mannigfaltig auch diese Sätze in Bezug auf reguläre Polygone sind, um so interessanter sind dennoch die Folgerungen in goniometrischer Beziehung, indem dieselben uns gestatten ohne weiteres eine Fülle von Relationen aufzustellen.

Berücksichtigen wir nämlich, dass $\varphi(\alpha)$ unter den gegebenen Beschränkungen einen Kreis darstellen muss, die Constante möge irgend welchen Wert haben, so ergiebt sich sofort, dass $\varphi(\alpha)$ eine Function der Entfernung des Punktes vom Mittelpunkt des Polygons sein muss, oder mit andern Worten, dass, wenn die Gleichungen der Seiten des Polygons

$$x\sin\alpha+y\cos\alpha-p=0$$

$$x\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)+y\cos\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)-p=0$$

$$x\sin\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)+y\cos\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)-p=0$$

u. s. w.

sind, die Gleichung $\varphi(\alpha)$ eine ganze rationale Function von x^2+y^2 sein muss. Daraus folgt sofort, dass sämtliche Glieder der Function $\varphi(\alpha)$, welche nicht sowohl x als y in gerader Potenz enthalten, verschwinden müssen, oder mit andern Worten, wir erhalten aus jeder der Gleichungen $\varphi(\alpha)$ eine Reihe trig. Relationen.

So geben z. B.

1) $$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\dots\alpha_n=\psi(\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)+\dots\sin\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\alpha\right)=0$$

$$\cos\alpha+\cos\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)+\dots\cos\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\alpha\right)=0$$

2) $$\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots\alpha_n\alpha_1=\varphi(\alpha)$$

$$\sin\alpha\cos\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)$$
$$+\sin\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{6\pi}{n}+\alpha\right)+\ldots\sin\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\alpha\right)\cos\alpha=0$$

3) $$\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4+\alpha_3\alpha_5+\ldots=\varphi(\alpha)$$

$$\sin\alpha\cos\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{6\pi}{n}+\alpha\right)+\ldots$$
$$+\ldots\sin\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)=0$$

4) $$\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_5+\ldots=\varphi(\alpha)$$

$$\sin\alpha\cos\left(\frac{6\pi}{n}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{8\pi}{n}+\alpha\right)+\ldots$$
$$+\ldots\sin\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\alpha\right)\cos\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)=0$$

u. s. w.

5) $$\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3+\ldots+\alpha_n^3=\varphi(\alpha)$$

$$\sin^3\alpha+\sin^3\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)+\sin^3\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)+\ldots+\sin^3\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\alpha\right)=0$$

$$\cos^3\alpha+\cos^3\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)+\cos^3\left(\frac{3\pi}{n}+\alpha\right)+\ldots+\cos^3\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\alpha\right)=0$$

$$\sin^2\alpha\cos\alpha+\sin^2\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)+\ldots$$
$$+\ldots\sin^2\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\alpha\right)\cos\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\alpha\right)=0$$

u. s. w.

Allgemein ist stets

$$\sum_{a=0}^{a=n}\sin^p\left(\frac{2a\pi}{n}+\alpha\right)\cos^q\left(\frac{2(a+b)}{n}\pi+\alpha\right)=0,$$

wenn a von 0 bis n sich ändert, $p+q<n$ ist, und p und q nicht beide gleichzeitig gerade sind, α möge alsdann einen Wert haben, welchen es wolle, und b irgend eine ganze Zahl sein.

IV.

Wird ferner der Halbmesser des Polygons unendlich klein, so sind dennoch alle die angewandten Schlüsse giltig, und wir können an Stelle der α in $\varphi(\alpha)$, die mit einer Constanten multiplicirten Si-

nusse und Cosinusse der α, $\frac{2\pi}{n}+\alpha$, $\frac{4\pi}{n}+\alpha$ u. s. w. setzen und erhalten hieraus unter Berücksichtigung der in III. entwickelten Resultate, z. B.:

$$\left.\begin{aligned}&\sin^{2p}\alpha+\sin^{2p}\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)+\sin^{2p}\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)+\ldots\\&\qquad+\ldots\sin^{2p}\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\alpha\right)=\text{const}\\&\cos^{2p}\alpha+\cos^{2p}\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)+\cos^{2p}\left(\frac{4\pi}{n}+\alpha\right)+\ldots\\&\qquad+\ldots\cos^{2p}\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\alpha\right)=\text{const}\end{aligned}\right\}2p<n$$

$$\sin^{2p}\alpha\cos^{2q}\alpha+\sin^{2p}\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)\cos^{2q}\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)+\ldots$$
$$+\ldots\sin^{2p}\left(\frac{2n-2}{n}\pi+\alpha\right)\cos^{2q}\left(\frac{2n-2}{2}\pi+\alpha\right)=\text{const}\,(2p+2q<n)$$

u. s. w.

Allgemein ist stets:

$$\sum_{a=0}^{a=n}{}_a\sin^{2p}\left(\frac{2a\pi}{n}+\alpha\right)\cos^{2q}\left(\frac{2(a+b)}{n}\pi+\alpha\right)=\text{const}\left(p+q<\frac{n}{2}\right)$$

Wir glauben kaum noch hinzufügen zu müssen, dass mittelst dieser entwickelten Relationen sich eine ganze Reihe transcendenter Gleichungen lösen lassen.

So liefert z. B. die Gleichung

$$1+\cos^3x+\cos^3 2x+\cos^3 3x+\cos^3 4x=0$$

für x den Wert $\frac{2\pi}{5}$; die Gleichungen

$$\cos 2x-\sin x=\tfrac{1}{2}$$

und

$$\cos^3 2x-\sin^3 x=\tfrac{1}{2}$$

für x den Wert $\frac{\pi}{10}$ u. s. w.

Weingarten, im Okt. 1885.

B. Sporer.

3.

Zur Theorie der Kegelschnitte.

I. Die Gleichung $y^2 - 2mx + nx^2 = 0$ gehört einer Kegelschnittslinie K an, welche die Achse OY in O berührt, den Mittelpunkt $M \ldots \left(0, \frac{m}{n}\right)$ und den Durchmesser $ON = \frac{2m}{n}$ in der Achse OX liegen hat. K ist für $n = 0$ eine Parabel, für $n > 0$ eine Ellipse, für $n < 0$ eine Hyperbel. Ist P ein Punkt der Linie K und $OQ = x_0$, $QP = y_0$, dann trifft die Gerade NP die Ordinatenachse OY in einem Punkte R, der so liegt, dass sich $OR : ON = PQ : QN$ oder $OR : \frac{2m}{n} = y_0 : \left(\frac{2m}{n} - x_0\right)$ verhält, also $OR = \frac{2my_0}{2m - nx_0}$ ist. Da P auf K liegt, so muss $y_0^2 - x_0(2m - nx_0) = 0$ und $OR = \frac{2mx_0}{y_0}$ sein.

Die Tangente T an K im Punkte P hat die Gleichung $(x - x_0)(-m + nx_0) + (y - y_0)y_0 = 0$, woraus für den Schnittpunkt S von T mit OY die Ordinate $OS = \frac{y_0^2 - mx_0 + nx_0^2}{y_0}$ folgt. Berücksichtigt man, dass x_0, y_0 der Gleichung von K genügen, so ergibt sich $OS = \frac{mx_0}{y_0}$ und somit: $OS = \frac{OR}{2}$. Die durchgeführte Rechnung gilt sowohl für rechtwinklige, wie für schiefwinklige Coordinaten, und wir können deshalb sagen:

Die Tangente im Punkte P einer Kegelschnittslinie halbirt jene Strecke OR auf der Tangente im Endpunkte O eines Durchmessers ON, welche zwischen O und der Geraden NP liegt.

Dieser Satz lehrt uns die Construction der Tangente im Punkte P eines Kegelschnittes, von dem noch ein Durchmesser ON und die Richtung des conjugirten Durchmessers bekannt sind; sowie auch die Construction des Berührungspunktes der Tangente eines Kegelschnittes, von welchem noch ein Durchmesser ON und die Richtung des conjugirten Durchmessers gegeben sind.

Nebenbei sei bemerkt, dass dann weitere Punkte und Tangenten der Linie K nach dem Verfahren gefunden werden können, welches früher (Neue Construction etc. Arch. S. 108—110) besprochen wurde. Die Methode modificirt sich nur so, dass O, N, P an die Stelle von A, B, C treten, und anstatt der durch C zu AB gezogenen Parallelen die Tangente in P zu benutzen ist. Näheres hierüber wollen wir an anderem Orte veröffentlichen.

II. Die Polargleichung der Kegelschnittslinien hat die Form $r(1+q\cos u) = p$, wenn der Pol O ein Brennpunkt ist, und die Hauptachse des Kegelschnitts in der Polarachse OX liegt. p ist die Hälfte des Parameters VW, und man hat eine Ellipse, wenn $q<1$; eine Parabel, wenn $q=1$; eine Hyperbel, wenn $q>1$ ist.

Die Tangente T im Punkte $P\ldots(r_1, m_1)$ hat die Gleichung

$$r[(q+\cos u_1)\,r_1 \cos u + r_1 \sin u_1 \sin u] = pr_1$$

und schneidet die Gerade VW in einem Punkte S, für welchen $u=\frac{\pi}{2}$ und $r = OS = \frac{p}{\sin u_1}$ ist.

Es besteht deshalb die einfache Relation: $p = OS\sin u_1$, und die Parallele zu OX durch den Endpunkt V des Parameters VW muss auf dem Radiusvector OP des Berührungspunktes P dasselbe Stück abschneiden wie die Tangente T auf der Geraden OV; u. zw. ist es, weil q in der Formel nicht vorkommt, ganz gleichgiltig, welche Kegelschnittslinie vorliegt. Diese Tatsache lässt sich bei vielen Constructionsaufgaben mit Vorteil verwenden.

Obige Formel begründet aber auch, da $\sin u_1$ und $\sin(\pi - u_1)$ gleich sind, folgenden Satz und dessen Umkehrung.

Wenn Kegelschnittslinien denselben Parameter $VW = 2p$ haben, dann berühren die von einem Punkte S der Geraden VW an alle Kegelschnittslinien gezogenen Tangenten in Punkten zweier Geraden, die durch den gemeinsamen Brennpunkt O gehen und mit der Hauptachse Winkel bilden, deren sinus gleich $\frac{p}{OS}$ ist.

Zu den Kegelschnittslinien ist selbstverständlich auch der Kreis mit dem Durchmesser VW zu zählen.

Pola, im November 1885.

Fr. Schiffner.

XII.

Zur Kubatur der Malus'schen Wellenflächen.

Von

Wilhelm Ruchhöft

aus Rostock.

Die von einem leuchtenden Punkte, dem Pole, ausgehenden Lichtstrahlen besitzen nach der Reflexion und Brechung in beliebig vielen, einfach brechenden Medien die Eigenschaft, Normalen einer Schar von Parallelflächen zu sein, denen nach Helmholtz[1]) der Name Wellenflächen zukommt. Da nun Malus[2]) ihre Existenz zuerst nachgewiesen hat, so dürfte die Bezeichnung Malus'sche Wellenflächen im Unterschied von der Fresnel'schen Wellenfläche eine passende sein[3]).

Unter Wellenfläche möge in der Folge diejenige zu einem einmal reflectirten, vorher homocentrischen Strahlensysteme gehörende Malus'sche Wellenfläche verstanden werden, welche durch den leuchtenden Punkt hindurch geht. Sie muss der Huyghens'schen Undulationstheorie gemäss angesehen werden als die Einhüllende einer Schar von Kugeln, deren Mittelpunkte die reflectirende Oberfläche, die Basis, stetig erfüllen, deren Flächen sämtlich den Pol in sich enthalten[4]).

Zwischen der Wellenfläche und der zu derselben Basis gehörenden Fusspunktfläche besteht ein inniger Zusammenhang. Der geo-

---

1) cf. Helmholtz, phys. Optik; vergl. auch: Röthig „Ueber die durch den Malus'schen Satz definirten Flächen". Crelle. Bd. 84.

2) Malus, Geom. Optik, Journal de l'école polyt. Bd. 7. 1808.

3) Der Verf. wurde mit der im angegebenen Sinne gebrauchten Benennung „Malus'sche Wellenfläche" zuerst in den Vorlesungen des Herrn Prof. Mathiessen bekannt.

cf. Matthiessen „Untersuchung über die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels gegen einander und gegen einen Hauptstrahl" Acta Math. 4. 1884. pag. 178.

4) Gergonne, Annales T. XVI.

metrische Ort des Endpunktes R des um sich selbst verlängerten Lotes PQ, welches von dem Pole P auf eine beliebige Tangentialebene der Basis gefällt wird, ist mit der Wellenfläche identisch. Letztere kann daher auch angesehen werden als der Ort des virtuellen Bildes, welches die spiegelnde Oberfläche der Basis von dem leuchtenden Punkte entwirft[5]).

Ihre Gestalt ist eine sehr mannigfache. Sie kann in mehrere sich stets im Pole schneidende Oberflächenschalen zerfallen, welche rings geschlossen sind, so lange die Basis eine endliche, rings geschlossene ist, oder wenigstens im Endlichen gelegene Asymptotenkegel besitzt.

Auch ist es bekannt, dass den abwickelbaren Flächen nicht eine Wellenfläche, sondern eine Wellencurve, secundäre Brennlinie, entspricht.

Zur Untersuchung der Malus'schen Wellenfläche führte mich die Theorie der Brennflächen für gebrochene und reflectirte Strahlensysteme, welche im Wintersemester 1883/84 den Hauptgegenstand der Uebungen des mathematischen Seminars der Universität Rostock unter der Leitung des Herrn Professor Krause bildete. Sie schlossen sich an die Kummer'sche Theorie der geradlinigen Strahlensysteme[6]) an, gemäss welcher die Coordinaten der Wellenflächenpunkte sich als Functionen zweier unabhängig veränderlichen Grössen u und v darstellen lassen.

Gegen Ende des nächsten Semesters veranlasste Herr Prof. Krause mich, diese Darstellungsform der Kubatur der Wellenflächen zu Grunde zu legen; so zwar dass der leitende Gesichtspunkt der Untersuchung der war, auf anderen als den bisher gebräuchlichen Wegen zur Kubatur der Fusspunktflächen zu gelangen, die nur für wenige Basisflächen durchgeführt ist.

Professor Tortolini[7]) bestimmte 1844 die Oberfläche und das Volumen der Fusspunktflächen des Ellipsoides und der beiden Hyperboloide unter der beschränkenden Annahme, dass der Pol im Mittelpunkte dieser Flächen gelegen ist.

---

5) Bösser, Theorie der caustischen Linien und Flächen in ihrer geschichtlichen Entwickelung. Schlömilch's Zeitschr. Bd. 15. 1870.

6) Kummer, Theorie der geradlinigen Strahlensysteme. Crelle. Bd. 57.

7) „Nuove applicazioni del Calcolo Integrale relative alla quadratura delle Superficie curve, e cubatura de Solidi." Crelle. Bd. 31. 1846.

1859 definirte Herr Dr. Fischer[8]) in seiner Dissertation das Volumen der Fusspunktfläche als den Inhalt des Kegels, dessen Spitze der Pol, dessen Basis ein vorgelegtes Oberflächenstück der Fusspunktfläche ist und wies nach, dass bei willkürlicher Wahl der Basis der geometrische Ort der Pole, zu denen ein constantes Volumen der Fusspunktfläche gehört, eine Oberfläche dritter Ordnung ist; dass er aber ein Ellipsoid ist, so bald die Basis die Eigenschaft, in sich geschlossen zu sein, besitzt. Ferner: dass es im ersten Fall höchstens acht Lagen des Poles geben kann, denen ein Maximal- oder Minimalwert des Volumens der Eusspunktfläche entspricht, während im zweiten Fall nur ein solcher Punkt existirt.

Im folgenden Jahre veröffentlichte Herr Dr. Magener[9]) im Archiv einen Aufsatz über die Fusspunktfläche des Ellipsoides, die von ihm gefundenen zahlreichen und interessanten Lehrsätze gedenke ich seiner Zeit anzugeben.

Gleich darauf liess der englische Mathematiker Hirst[10]), F. R. S., eine Abhandlung über die Volumina der Fusspunktflächen erscheinen, die er schon im November 1862 der Royal Society of London vorgelegt hatte. Es werden darin die von Fischer und Magener gefundenen Resultate bestätigt.

Dies ist die ganze Litteratur über die Kubatur der Fusspunktflächen, so dass also, wenn wir uns auf Oberflächen zweiter Ordnung beschränken, die Volumina der Fusspunktflächen der beiden Hyperboloide für allgemeine Lagen des Poles und die Volumina der Fusspunktflächen der beiden Paraboloide überhaupt noch nicht bestimmt sind.

In den beiden letzten Fällen tritt noch die Schwierigkeit hinzu, die Basisflächen und dementsprechend die Fusspunktflächen in passender Weise zu begrenzen.

Die Aufgabe der folgenden Untersuchungen ist es, die Kubatur der Wellenflächen und damit die der Fusspunktflächen nach der von Gauss[11]) entwickelten Methode durchzuführen, wenn die Oberflächen zweiter Ordnung mit Ausnahme der abwickelbaren Flächen als Basis

---

8) „De superficierum pedalium theorematibus quibusdam." D. Berlin.

9) „Cubatur des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoides." Arch. f. Math. u. Phys. Bd. 34. 1860.

10) Hirst „On the volumes of pedal surfaces". Phil. Transact. Vol. 153, 1863. Vergl. Crelle Bd. 62, 1863. „Sur les volumes des surfaces podaires". Extr. du mémoire etc.

11) Gauss, Theoria attract. corporum ellips. Sämtl. Werke. Bd. 5.

angenommen werden. Zerfällt die Wellenfläche in rings geschlossene Oberflächenschalen, so bedarf ihr Volumen keiner weiteren Definition. Ist dies nicht der Fall, so sei ihr Volumen mit dem Inhalte des Kegels identisch, dessen Basis ihre Oberfläche, dessen Spitze ihr Pol ist[12]).

§ 1. Darstellung der Coordinaten der Wellenflächenpunkte als Functionen der Veränderlichen u und v[13]).

Es sei eine beliebige Oberfläche vorgelegt und angenommen, dass ihre rechtwinkligen Coordinaten x, y, z sich darstellen lassen als Functionen der beiden Veränderlichen u und v. Ein vom Pol einfallender Strahl, dessen Richtungscosinus λ, μ, ν sind, trifft die Oberfläche in einem Punkte x, y, z und wird reflectirt, so dass er nach der Reflexion mit den Axen Winkel bildet, deren Cosinus ξ, η, ζ sind. Dem Snellius'schen Gesetze gemäss müssen die beiden Strahlen λ, μ, ν; ξ, η, ζ mit der Normalen des Einfallspunktes, dem Einfallslote, α, β, γ in einer Ebene gelegen sein, d. h. sie müssen auf derselben Geraden a, b, c senkrecht stehen. Dieser Bedingung entsprechen die drei Gleichungen

$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0$$
$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$$
$$\xi a + \eta b + \zeta c = 0$$

oder das Verschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda, & \mu, & \nu \\ \alpha, & \beta, & \gamma \\ \xi, & \eta, & \zeta \end{vmatrix}$$

Setze ich daher

$$h = \mu\gamma - \nu\beta$$
$$i = \alpha\nu - \lambda\gamma$$
$$k = \lambda\beta - \alpha\mu$$

so lautet die Bedingung

$$1) \qquad h\xi + i\eta + k\zeta = 0.$$

Ferner muss der Einfallswinkel absolut genommen dem Reflexionswinkel gleich sein, die Cosinus beider aber tragen das entgegengesetzte Vorzeichen, es besteht daher die Relation

---

12) Fischer a. a. O. pag. 12.

13) Röthig, Crelle Bd. 84. u. 88. stellt die Coordinaten der Malus'schen Wellenfläche eines Strahlensystemes, das beliebig viele Brechungen erlitt, dar als Function der drei Parameter α_1, β_1, γ_1, zwischen denen die Relation $\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1$ besteht.

2) $$\xi\alpha+\eta\beta+\zeta\gamma=-(\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma)=-D.$$

Das Symbol D stellt den Cosinus des Einfallswinkels dar, nun ist aber die Summe $(h^2+i^2+k^2)$ dem Quadrate des Sinus desselben Winkels gleich, die Symbole sind also durch die Gleichung

$$h^2+i^2+k^2+D^2=1$$

verbunden.

Aus 1) und 2) lassen sich leicht die folgenden Gleichungen herleiten:

3) $$\begin{aligned}\xi M-\eta.L&=D.k,\\ \eta N-\zeta M&=D.h,\\ \zeta L-\xi N&=D.i,\end{aligned}$$

in welchen die Grössen L, M, N, die Unterdeterminanten bedeutend, auf die folgende Gestalt zurückgeführt werden können

$$\begin{aligned}L&=k\beta-i\gamma=\lambda-\alpha.D,\\ M&=h\gamma-k.\alpha=\mu-\beta.D,\\ N&=i\alpha-h\beta=\nu-\gamma.D,\end{aligned}$$

Es gelten ferner die Relationen

$$L^2+M^2+N^2=L\lambda+M\mu+N\nu=h^2+i^2+k^2=1-D^2,$$
$$L\alpha+M\beta+N\gamma=0,$$

Aus 3) aber folgen die Werte

$$\zeta=\frac{\xi N-iD}{L},\qquad \eta=\frac{\xi.M-D.k}{L},$$

welche in die Gleichung $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ eingesetzt für ξ eine quadratische Gleichung ergeben, deren Gestalt vermöge der genannten Relationen auf die folgende reducirt werden kann:

$$\xi^2+2\alpha.D.\xi=\lambda^2-2\alpha\lambda D,$$

aus welcher

4) $$\xi=-\alpha.D\pm(\alpha.D-\lambda)$$

sich ergiebt. Für den Richtungscosinus des reflectirten Strahles kommt nur das untere Vorzeichen in Betracht, da die Wahl des positiven die Wurzel $\xi=-\lambda$ ergiebt, dies aber ist der Richtungscosinus des einfallenden Strahles gegen die X-Axe in der Richtung von der Oberfläche fort gerechnet, wie es sein muss. Das Analoge gilt von den Grössen η und ζ, die Richtungscosinus des reflectirten Strahles sind demnach

$$5)\qquad \begin{aligned} \xi &= \lambda - 2\alpha . D, \\ \eta &= \mu - 2\beta D, \\ \zeta &= \nu - 2\gamma . D, \end{aligned}$$

wie auch immer die reflectirende Oberfläche beschaffen sein möge.

Der Kummer'schen Theorie gemäss sind dann die Coordinaten der Wellenfläche gegeben durch

$$6)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x + r . \xi, \\ y_1 &= y + r . \eta, \\ z_1 &= z + r . \zeta, \end{aligned}$$

wo r die Entfernung des Einfallspunktes von dem auf demselben Strahle gelegenen Wellenflächenpunkte bedeutet und für sein Differential die Relation besteht:

$$7)\qquad -dr = \xi dx + \eta dy + \zeta . dz.$$

Die Coordinaten x, y, z sind auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogen, für dessen Lage eine beschränkende Arnahme nicht existirt. Ich will nun den Coordinatenanfang in den leuchtenden Punkt hineinverlegen, dann repräsentiren die Quotienten

$$8)\qquad \lambda = \frac{x}{R}, \quad \mu = \frac{y}{R}, \quad \nu = \frac{z}{R}$$

die Richtungscosinus des einfallenden Strahles, so bald

$$9)\qquad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

gesetzt wird, sind also Functionen von u und v.

Die Gleichungen 5) und 8) gestatten dem Differentiale 7) die Form zu geben:

$$\begin{aligned} -dr &= \lambda dx + \mu dy + \nu dz - 2D . (\alpha dx + \beta dy + \gamma . dz), \\ &= \frac{x . dx + y dy + z dz}{R} - \frac{2D}{S}(A dx + B dy + C dz), \end{aligned}$$

wenn die Grössen A, B, C die Functionaldeterminanten bedeuten

$$10)\qquad \begin{aligned} A &= \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}, \\ B &= \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u}, \\ C &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \end{aligned}$$

und

$$S^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

ist. Setzt man aber für die Differentiale der Coordinaten ihre Werte

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv,$$

so folgt

$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$

und man erhält

11)
$$-dr = dR.$$

Es ist unmittelbar einzusehen, dass die Integrationsconstante der Null gleich gesetzt werden muss, da nach der gegebenen Definition der Wellenfläche die Entfernung r eines ihrer Punkte von dem Einfallspunkte xyz ebenso gross ist wie die Entfernung R des Poles von diesem Punkte, beide Strecken gemessen auf dem reflectirten resp. einfallenden Strahle vom Treffpunkte x, y, z aus. Etwas anderes aber behauptet die Gleichung $r = -R$ nicht.

Die Coordinaten der Wellenfläche nehmen vermöge der Substitution $r = -R$ die Gestalt an

12)
$$x_1 = 2.\alpha.D.R = \frac{2A(Ax + By + Cz)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$y_1 = 2.\beta.D.R = \frac{2B(Ax + By + Cz)}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$z_1 = 2.\gamma.D.R = \frac{2C(Ax + By + Cz)}{A^2 + B^2 + C^2};$$

sie sind demnach unmittelbar Functionen von u und v, so bald für die Coordinaten xyz der Basis diese Darstellungsart gefunden ist.

Wird berücksichtigt, dass α, β, γ die Richtungscosinus der Normalen, die im Einfallspunkte auf der Basis errichtet wird, bedeuten, dass ferner D den Cosinus des Einfallswinkels repräsentirt, so können die Ausdrücke

$$x' = \alpha.D.R,$$
$$y' = \beta.D.R,$$
$$z' = \gamma.D.R$$

unmittelbar geometrisch interpretirt werden, es zeigt sich, dass sie die rechtwinkligen Coordinaten der zu derselben vorgelegt-

gehörenden Fusspunktfläche sind, deren Darstellung als Functionen zweier Parameter hierdurch für eine ganz beliebige Basis gegeben wird.

Ausserdem wird durch das vorletzte Gleichungssystem der Zusammenhang zwischen Wellenflächen und Fusspunktflächen von neuem bestätigt.

§ 2.

Ueber die Integrale $\int x.ds.\cos(Nx)$, $\int r.ds.\cos(Nr)$.

Vermöge der Darstellung der Coordinaten der Wellenflächenpunkte als Functionen der beiden Veränderlichen u und v wird die Kubatur auf die Auswertung von Doppelintegralen zurückgeführt.

Ist nun die vorgelegte Oberfläche, deren Volumen bestimmt werden soll, eine rings geschlossene, so stellt nach Gauss[14]) das Integral $\int x.ds.\cos(N,x)$, wenn es über die ganze Oberfläche ausgedehnt wird, das gesuchte Volumen dar; dabei bedeutet (N,x) den Winkel, welchen die nach aussen gerichtete Normale eines Oberflächenpunktes mit der X-Axe bildet. Denken wir innerhalb der Projection der Oberfläche auf die ausserhalb der letzteren gelegene Ebene $x = c$ ein Element $d\Sigma$ herausgegriffen, zu ihm senkrecht einen Cylinder errichtet, der die Fläche in $2k$ Elementen ds schneidet, und ist ferner ganz allgemein der Inhalt des Cylinders zwischen der Ebene $x = c$ und dem Flächenstück $ds_l = I_l$, so ist

$$V = \int x.ds.\cos(N,x) = \Sigma(I_{2k} - I_{2k-1} + \ldots I_2 - I_1)$$

das analytische Aequivalent des Volumens.

Dasselbe wird ferner repräsentirt durch das Integral

$$V = -\tfrac{1}{3}\int r.ds.\cos(N,r),$$

wenn (N,r) den Winkel bedeutet, den die nach aussen gerichtete Normale der Fläche mit dem von ihrem Fusspunkte nach dem Pole gezogenen radius vector r bildet.

Ist die Fläche nicht rings geschlossen, so kann zunächst von einem Aussen und Innen nicht die Rede sein. Da nun aber die Fläche $f(x,y,z) = 0$ im Allgemeinen alle die Punkte des Raumes, für welche $f(x,y,z) > 0$ ist, von denen scheidet, die $f(x,y,z)$ kleiner als Null machen, so sind wir berechtigt die Normale, welche sich von der Fläche aus in das erste Gebiet erstreckt, als die nach aussen gerichtete zu bezeichnen. Nehmen wir ferner an, dass das vorgelegte

---

14) Gauss, Theoria attractionis corporum ellipticorum etc. im V. Bd. a. a. W.

Oberflächenstück ein continuirliches ist, so ist unschwer einzusehen, dass ein vom Pol nach der Fläche gezogener radius vector mit den in seinen Treffpunkten construirten und nach aussen gerichteten Normalen der Fläche a wechselnd spitze und stumpfe Winkel bildet. Die Anzahl der Schnittpunkte kann eine gerade, kann eine ungerade sein. Die Richtung des Radius vom Treffpunkte nach dem Pole hin sei die positive. Um den radius vector werde ein Kegel mit der unendlich kleinen Oeffnung $d\Sigma$ construirt, der vom Pole aus betrachtet in den Entfernungen $r_1, r_2, \ldots r_k$ aus der Fläche die Elemente $ds_1, ds_2, \ldots ds_k$ ausschneidet. Um den Pol mögen mit den Radien $r_1, r_2 \ldots r_k$ concentrische Kugeln construirt werden, auf deren Oberflächen der Kegel mit der Oeffnung $d\Sigma$ die Stücke $d\sigma_1, d\sigma_2, \ldots d\sigma_k$ kennzeichnet.

Der Inhalt des Kegels bis zum ersten Schnittpunkte ist

$$I_1 = \tfrac{1}{3} r_1 d\sigma_1 = \pm \tfrac{1}{3} r_1 ds_1 \cos(N_1, r),$$

das Volumen des zweiten wird durch

$$I_2 = \tfrac{1}{3} r_2 d\sigma = \pm \tfrac{1}{3} r_2 ds_2 \cos(N_2, r)$$

gegeben u. s. f. Demgemäss stellt $I_k - I_{k-1} + I_{k-2} - + \ldots I_1$ das Stück des Volumens dar, welches zwischen der Oberfläche und dem unendlich kleinen Kegel gelegen ist. Stellen wir dieselben Operationen für alle Punkte der ungeschlossenen Oberfläche an, so ergiebt sich, dass

$$\tfrac{1}{3} \int r \,.\, ds \,.\cos(N, r),$$

erstreckt über die ganze Oberfläche, vom Zeichen abgesehen das Volumen desjenigen Körpers darstellt, der zwischen der Oberfläche und dem Kegel gelegen ist, dessen Basis mit der Oberfläche zusammenfällt, dessen Spitze im Pole liegt.

Das letzte Integral setzt uns in den Stand, mit wenigen Schlüssen den Zusammenhang festzustellen, der zwischen dem Volumen der Fusspunktfläche und der Wellenfläche derselben Basis besteht. In der Tat, die radii vectores beider Oberflächen stehen im Verhältniss 1:2, die Oberflächenelemente, welche demselben Kegel mit der Oeffnung $d\Sigma$ entsprechen, verhalten sich wie die Quadrate der Radien. Legen wir der Kubatur beider Flächen die letzte Formel zu Grunde, so folgt, d a s s d a s V o l u m e n d e r W e l l e n f l ä c h e a c h t m a l s o g r o s s i s t a l s d a s V o l u m e n d e r F u s s p u n k t f l ä c h e d e r s e l b e n B a s i s.

Zum Schlusse dieser allgemeineren Betrachtungen möge hervorgehoben werden, dass der Hauptnachdruck in den folgenden Unter-

suchungen darauf gelegt ist, die ungemeine Einfachheit und Uebersichtlichkeit der von Gauss und Kummer entwickelten Methoden klarzulegen; aus diesem Grunde sind sie zum Teil auf die Rotationsflächen beschränkt worden. Fällt diese Beschränkung fort, so tritt eine Aenderung im Princip der Untersuchung nicht ein, wir gelangen bei der Auswertung der Integrale zu transcendenten Functionen, während im ersten Fall die Darstellung durch algebraische Functionen, durch den Logarithmus und die Arcus-Tangente möglich ist.

§ 3.

Das Ellipsoid.

Die Gleichung des dreiaxigen Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

wird identisch erfüllt durch die Functionen[15])

$$1)\qquad \begin{aligned} x &= a.\cos u, \\ y &= b.\sin u.\cos v, \\ z &= c.\sin u.\sin v. \end{aligned}$$

Die Elimination von v aus den beiden letzten Gleichungen führt zu dem Resultat

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\sin^2 u,$$

$$x = a.\cos u.$$

Beide Gleichungen repräsentiren eine zur X-Axe senkrechte Ellipse, so bald dem Parameter u ein fester Wert beigelegt wird.

Eliminiren wir u so folgt

$$bz = c.y.\operatorname{cotg} v,$$

wir erhalten die Gleichung einer sich bei veränderlichen Werten von v um die X-Axe drehenden Ebene, so dass also die Oberflächenpunkte des dreiaxigen Ellipsoides vermöge der Curven U und V dargestellt sind als Schnittpunkte einer veränderlichen, der X-Ebene parallelen, Ellipse und einer um die X-Axe sich drehenden Ebene. Sollen alle Punkte der Oberfläche erschöpft werden, so müssen die Veränderlichen u und v zwischen den Grenzen variiren

15) cf. Joachimsthal, Anwendung der Diff.- u. Int.-Rechg. auf die Theorie der Flächen und der Linien dopp. Krümmung.

$$0 \leqq v \leqq 2\pi,$$

2)

$$0 \leqq u \leqq \pi.$$

Ich verlege den Coordinatenanfang in den Pol, dessen Coordinaten $-l, -m, -n$ sein mögen, und erhalte für die Coordinaten der Oberflächenpunkte des Ellipsoides

3) $x = l + a\cos u, \quad y = m + b . \sin u \cos v, \quad z = n + c \sin u \sin v.$

Aus diesen Gleichungen finden wir durch partielle Differentiation und mit Berücksichtigung von § 1, 10

4)
$$A = b.c.\sin u \cos u, \quad B = ac \sin^2 u \cos v, \quad C = ab \sin^2 u \sin v,$$
$$S^2 = N \sin^2 u,$$

wo

5) $N = a^2 b^2 . \sin^2 u \sin^2 v + a^2 c^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 c^2 \cos^2 u$

gesetzt wurde. Vermöge der Gleichung 12. des § 1. setzen sich aus 3) und 4) die Gleichungen der Wellenfläche wie folgt zusammen:

6)
$$x_1 = \frac{2.b.c.\cos u . M}{N},$$
$$y_1 = \frac{2 ac \sin u \cos v M}{N},$$
$$z_1 = \frac{2 ab \sin u \sin v M}{N},$$

dabei ist

7) $M = l.bc \cos u + m.ac \sin u \cos v + n ab \sin u \sin v + abc,$

die Grenzen sind 0 und π für u, 0 und 2π für v.

Die Wellenfläche ist, wie aus 6) hervorgeht, rings geschlossen, ihr Volumen demnach repräsentirt durch

$$V = -\tfrac{1}{3} \int r . ds . \cos(N, r).$$

Bedeuten A_1, B_1, C_1 die analogen Determinanten wie A, B, C nämlich

8)
$$A_1 = \frac{\partial y_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial v} - \frac{\partial y_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial z_1}{\partial u},$$
$$B_1 = \frac{\partial z_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial z_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u},$$
$$C_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial u},$$

so ist

$$ds = du \,.\, dv \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2},$$

$$\cos(N, r) = -\frac{A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1}{r \,.\, \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

daher

9) $$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1)\, du\, dv.$$

Durch partielle Differentiation erhalten wir aus 6)

10)
$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{2bc}{N^2} \left\{ N\left(-M \sin u + \cos u \frac{\partial M}{\partial u} \right) - \cos u\, M \frac{\partial N}{\partial u} \right\},$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = \frac{2ac \cos v}{N^2} \left\{ N\left(M \cos u + \sin u \frac{\partial M}{\partial u} \right) - \sin u\, M \frac{\partial N}{\partial u} \right\},$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{2ab \sin v}{N^2} \left\{ N\left(M \cos u + \sin u \frac{\partial M}{\partial u} \right) - \sin u\, M \frac{\partial N}{\partial u} \right\},$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{2 \,.\, bc \,.\, \cos u}{N^2} \left\{ N \,.\, \frac{\partial M}{\partial v} - M \frac{\partial N}{\partial v} \right\},$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{2\, ac \sin u}{N^2} \left\{ N\left(-M \sin v + \cos v \;\frac{\partial M}{\partial v} \right) - \cos v \,.\, M \frac{\partial N}{\partial v} \right\},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2\, ab \,.\, \sin u}{N^2} \left\{ N\left(M \cos v + \sin v \frac{\partial M}{\partial v} \right) - \sin v\, M \frac{\partial N}{\partial v} \right\},$$

Diese Grössen gestatten die Berechnung der Determinanten

$$A_1 = M \cdot \frac{4 \,.\, a^2 b \,.\, c \,.\, \sin u}{N^3} \left\{ \cos u \,.\, M \,.\, N + \sin u \,.\, N \frac{\partial M}{\partial u} - \sin u \,.\, M \,.\, \frac{\partial N}{\partial u} \right\},$$

$$B_1 = M \cdot \frac{4\, ab^2\, c}{N^3} \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 u \,.\, \cos v M \,.\, N + \sin v\, N \dfrac{\partial M}{\partial v} - \sin u \cos u \cos v N \dfrac{\partial M}{du} \\ \qquad + \sin u \,.\, \cos u \,.\, \cos v \,.\, M \dfrac{\partial N}{\partial u} - \sin v \,.\, M \dfrac{\partial N}{\partial v} \end{array} \right\}$$

$$C_1 = M \cdot \frac{4\, abc^2}{N^3} \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 u \,.\, \sin v \,.\, MN - \cos v \,.\, N \dfrac{\partial M}{\partial v} - \sin u \,.\, \cos u \,.\, \sin v N \dfrac{\partial M}{\partial u} \\ \qquad + \sin u \,.\, \cos u \,.\, \sin v \,.\, M \dfrac{\partial N}{\partial u} + \cos v \,.\, M \dfrac{\partial N}{\partial v} \end{array} \right\}$$

Die einfachsten Operationen ergeben

$$A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 = \frac{8 \,.\, a^2 \,.\, b^2 \,.\, c^2 \,.\, M^3 \,.\, \sin u}{N^3},$$

so dass für das Volumen der Wellenfläche die Relation besteht

$$11)\qquad V = \frac{8}{3}a^2b^2c^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{M^3 . \sin u}{N^3}\,du\,dv.$$

Die Uebereinstimmung dieses Ausdruckes mit dem von Hrn. Magener[16]) aufgestellten Doppelintegrale ergiebt sich sofort, wenn beachtet wird, dass $-l$, $-m$, $-n$ die Coordinaten des Poles bezogen auf das mit seinem Nullpunkt im Centrum des Ellipsoides gelegene rechtwinklige System bedeuten, während Magener sie durch α, β, γ bezeichnet. Der Vergleich lehrt auch, dass das Volumen V der Wellenfläche dem achtfachen Volumen der Fusspunktfläche des Ellipsoides gleich ist.

Entwickelt man den Ausdruck (cf. 7))

$$M^3 = \{\, abc + l . bc \cos u + mac \sin u \cos v + nab \sin u \sin v \,\}^3$$

so wird die rechte Seite der Gleichung 11) gleich einer Summe von zwanzig Integralen, deren Argumente u und v zwischen den resp. Grenzen 0 und 2π, 0 und π variiren. Sämtlichen Integralen ist der Nenner N^3 gemeinsam, in welchem die trigonometrischen Functionen nur quadratisch auftreten. Zerfälle ich nun das Integrationsgebiet 0 bis 2π in die vier Intervalle 0 bis $\pi/_2$, $\frac{\pi}{2}$ bis π, π bis $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ bis 2π,

so folgt, dass das $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^{2m+1} v \cos^n v\, dv}{N^3}$ als auch das $\int_0^{2\pi}\frac{\cos^{2m+1} v \sin^n v\, dv}{N^3}$

verschwindet. In der Tat, ich kann vom Nenner absehen, die Elemente $\sin^{2m+1} v . \cos^n v$ des ersten Quadranten werden von denen des vierten, die des zweiten von denen des dritten aufgehoben, da sie ihnen stets gleich und entgegengesetzt sind. Genau so werden die Elemente $\cos^{2m+1} v \sin^n v$ des ersten und vierten Quadranten von denen des zweiten und dritten aufgehoben. Auf analoge Weise ergiebt sich noch, dass

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos^{2m+1} u . \sin^n u\, du}{N^3} = 0$$

ist. Wird dann aber die Integration in passender Weise zuerst nach u und dann nach v oder umgekehrt ausgeführt, so folgt, dass alle zwanzig Doppelintegrale bis auf vier verschwinden, deren Gestalt die folgende ist:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin u\, du\, dv}{N^3},\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2 u \sin u\, du\, dv}{N^3},$$

16) Magener, Kubatur des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoides. Archiv 34. pag. 452.

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 u\cos^2 v\,du\,dv}{N^3},\qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 u\sin^2 v\,du\,dv}{N^3},$$

so bald in ihnen die Grenzen für beide Veränderlichen gleich 0 und $\frac{\pi}{2}$ gesetzt werden, tritt der Factor 8 vor das Summenzeichen.

Schreibe ich ferner das Volumen der Wellenfläche

$$V_{l,m,n} = V_0 + l^2 V_l + m^2 V_m + n^2 V_n, \tag{12}$$

und

$$Q = \frac{\cos^2 u}{a^2} + \frac{\sin^2 u\cos^2 v}{b^2} + \frac{\sin^2 u\sin^2 v}{c^2}$$

so haben die Grössen V_0, V_l, V_m, V_n folgende Werte

$$\left.\begin{aligned}
V_0 &= \frac{64}{3abc}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin u\,du\,dv}{Q^3},\\
V_l &= \frac{64}{a^3bc}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 u\sin u\,du\,dv}{Q^3},\\
V_m &= \frac{64}{ab^3c}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 u\,.\cos^2 v\,du\,dv}{Q^3}\\
V_n &= \frac{64}{abc^3}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 u\sin^2 v\,du\,dv}{Q^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Diese vier Integrale lassen sich vermittelst einer einzigen Integration darstellen[17]. Wird nämlich der Quotient $\frac{1}{Q^2}$ partiell nach a, b, c differentiirt, so folgt

---

17) cf. Magener a. a. O. pag. 454.

14)
$$\frac{\cos^2 u}{Q^3} = \frac{a^3}{4}\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{Q^2}\right)}{\partial a}, \qquad \frac{\cos^2 v\,.\sin^2 u}{Q^3} = \frac{b^3}{4}\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{Q^2}\right)}{\partial b},$$
$$\frac{\sin^2 v \sin^2 u}{Q^3} = \frac{c^3}{4}\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{Q^2}\right)}{\partial c}$$

multipliciren wir beide Seiten dieser drei Gleichungen mit $\sin u\,.\,du\,.\,dv$ und integriren wir nach u und nach v zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so erhalten wir gerade die vier zuletzt angeführten Doppelintegrale, deren Auswertung daher auf die Bestimmung von

$$C = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u\, du\, dv}{Q^2}$$

und dessen partiellen Differentialquotienten nach a, b, c zurückgeführt ist. Das bestimmte Doppelintegral C ist bekannt, es ist dasselbe, zu welchem Jacobi[18]) 1833 bei der Quadratur der reciproken Fläche des Basis-Ellipsoides gelangte. Ist

$$S\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$$

diese Oberfläche, so resultirt

$$C = \frac{a^2 b^2 c^2 . S\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)}{8}$$

und

15)
$$V_l = \frac{16}{b\,.\,c}\cdot\frac{\partial C}{\partial}, \quad V_m = \frac{16}{ac}\cdot\frac{\partial C}{\partial b}, \quad V_n = \frac{16}{ab}\cdot\frac{\partial C}{\partial c},$$

zugleich nimmt V_0 mit Berücksichtigung der Relation

$$\cos^2 u + \sin^2 u \cos^2 v + \sin^2 u \sin^2 v = 1$$

die Gestalt an

16)
$$V_0 = \frac{16}{3abc}\left(a^3\frac{\partial C}{\partial a} + b^3\frac{\partial C}{\partial b} + c^3\frac{\partial C}{\partial c}\right),$$

wie sich durch Addition der Gleichungen 14) ergiebt. Die in Formel 13 aufgestellten Ausdrücke für V_l, V_m, V_n, V_0 sind stets positiv, da die Argumente der Integrale, also diese selbst, zwischen den vor-

18) Jacobi, De transformatione et determinatione integralium dupl. Crelle Bd. X.

gelegten Grenzen positive Grössen sind. Daraus geht zunächst hervor, dass das Volumen der Wellenfläche ein Minimum sein muss, wenn $l = m = n = 0$ ist, d. h. wenn der Mittelpunkt der Basis mit dem Pol zusammenfällt. Ferner, dass dies die einzige Lage des Poles ist, der ein Minimum oder Maximum des Volumens entspricht.

In der Tat bildet man die Gleichungen

$$\frac{\partial V_{l,m,n}}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial m} V_{l,m,n} = \frac{\partial}{\partial n} V_{l,m,n} = 0$$

so zeigt es sich, dass ihnen keine anderen Lösungen als die genannten $l = m = n = 0$ genügen.

Wir gelangen daher zu dem Lehrsatze:

I. Das Volumen der Wellenfläche des dreiaxigen Ellipsoides ist dann und nur dann ein Minimum, wenn der Pol im Mittelpunkt desselben gelegen ist.

Die Gleichung 12)

$$V_{l,m,n} = V_0 + l^2 V_l + m^2 V_m + n^2 V_n$$

führt uns noch zu einer Reihe interessanter Lehrsätze:

Wie schon einmal erwähnt, bedeuten l, m, n die Coordinaten des Mittelpunktes der Basis bezogen auf den Pol als Ursprung des Coordinatensystems, nun repräsentirt der Ausdruck

$$l^2 . V_l + m^2 V_m + n^2 V_n = D,$$

gleich einer Constanten, ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt der Pol ist. Wir erhalten den Satz:

II. Bewegt sich ein Ellipsoid derartig, dass ein Mittelpunkt auf einem zweiten Ellipsoide

$$l^2 \frac{V_l}{D} + m^2 \frac{V_m}{D} + n^2 \frac{V_n}{D} = 1,$$

dessen Centrum der Pol ist, gleitet, während seine Axen denen des letzteren parallel bleiben, so ist für alle Lagen das Volumen der auf das erstere bezogenen Wellenfläche ein constantes.

Da nun l^2, m^2, n^2 auch angesehen werden können als die Quadrate der Coordinaten $(-l, -m, -n)$ des Poles bezogen auf das Centrum der Basis, so folgt das bekannte Resultat:

III. Liegen die Pole auf der Oberfläche eines dreiaxigen, dem Basis-Ellipsoide concentrischen Ellipsoides, welches durch die Gleichung

$$x^2\frac{V_l}{D}+y^2\frac{V_m}{D}+z^2\frac{V_n}{D}=1$$

dargestellt wird, so sind die Volumina der zugehörigen Wellenflächen einander gleich.

Sämtliche Ellipsoide, zu denen man durch Veränderung von D gelangen kann, sind einander ähnlich:

IV. Die geometrischen Oerter der Pole gleicher Wellenkörper sind einander ähnliche, concentrische Ellipsoide.

Es ist leicht einzusehen, dass diese Ellipsoide dem Basis-Ellipsoide nicht ähnlich sein können, auch lässt sich nachweisen, dass sie stets drei von einander verschiedne Axen besitzen, so lange der Basis diese Eigenschaft zukommt [19]).

Setzt man $l=\pm ka$, $m=\pm kb$, $n=\pm kc$ und berücksichtigt, dass den Gleichungen 15) und 16) gemäss für das Volumen der Wellenfläche auch die Relation besteht

$$17)\qquad V_{l,m,n}=\frac{16}{3abc}\left\{a^3\frac{\partial C}{\partial a}+b^3\frac{\partial C}{\partial b}+c^3\frac{\partial C}{\partial c}\right\}$$
$$+\frac{16}{abc}\left\{l^2a\frac{\partial C}{\partial a}+m^2b\frac{\partial C}{\partial b}+n^2c\frac{\partial C}{\partial c}\right\}$$

so folgt

$$18)\qquad V_{ka,kb,kc}=V_0(3k^2+1)$$

Aus dieser Formel ergeben sich wieder zwei correspondirende Lehrsätze:

V. Es sei ein Parallelepipedon vorgelegt, dessen Ecken die Coordinaten $b=\pm ka$, $m\pm kb$, $n=\pm kc$ besitzen. Construirt man um dieselben als Centra die acht möglichen Ellipsoide, welche alle die nämlichen den Kanten des Parallelepipeds gleichgerichteten Axen a, b, c besitzen, so sind die Volumina der auf sie bezogenen Wellenflächen unter sich und dem $(3k^2+1)$-fachen Minimalvolumen gleich.

VI. Liegt der Pol in einer beliebigen Ecke $x=\pm ka$, $y=\pm kb$, $z=\pm kc$ des Parallelepipeds, dessen Diagonalen sich im Centrum der Basis schneiden, so ist das Volumen der Wellenfläche dem $(3k^2+1)$-fachen des Minimalwertes V_0 gleich.

Der Kürze wegen wollen wir für den Augenblick die zweite Lage des Coordinatensystemes festhalten, annehmen, dass der Coordinatenanfang mit dem Mittelpunkt des Ellipsoides zusammenfällt. Ist $k=1$,

19) cf. Magener a. a. O.

so nennen wir[20]) das Parallelepiped ein concentrisches, seine Diagonalen werden durch die Gleichungen $x = ka$, $y = kb$, $z = kc$, in denen k ein veränderlicher Parameter ist, dargestellt, so zwar, dass die Entfernung eines Punktes auf der Diagonale vom Mittelpunkte geschrieben werden kann $r = k.\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Dann resultirt:

VII. Bewegt sich der Pol auf einer der Diagonalen des dem Ellipsoide concentrischen (umschriebenen[21])) Parallelepipedons, so ist der Zuwachs, den der Minimalwert des Wellenflächenvolumens erleidet, dem Quadrate seiner Entfernung vom Mittelpunkte proportional und gegeben durch

$$V_0\left(1+3\frac{r^2}{a^2+b^2+c^2}\right).$$

Die vier Diagonalen durchsetzen die Schar der Ellipsoide, deren Oberfläche der geometrische Ort der Pole gleicher Wellenkörper ist. Jene Ellipsoide aber erfüllen den ganzen Raum, daher ergiebt sich:

VIII. Das Volumen einer jeden Wellenfläche des dreiaxigen Ellipsoides lässt sich in die Form bringen

$$V_0(1+3k^2).$$

Das Doppelintegral C ist nach Jacobi eine symmetrische Function vierten Grades der Grössen a, b, c und genügt daher der Gleichung:

$$4C = a\frac{\partial C}{\partial a}+b\frac{\partial C}{\partial b}+c\frac{\partial C}{\partial c}.$$

Diese Relation gestattet den für das Volumen gefundenen Ausdruck 17) in eine äusserst einfache Form überzuführen, wenn $l = m = n$ gesetzt wird. Es ergiebt sich aus

$$V_{l,l,l} = V_0+\frac{64l^2}{abc}C = V_0+8l^2 abc\, S\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$$

der Lehrsatz:

IX. Die Volumina der Wellenflächen des Ellipsoides, die den acht Ecken $x = y = z = \pm l$ eines concentrischen Würfels entsprechen, sind einander und dem Minimumkörper V_0 plus dem Körper gleich, der entsteht, wenn man die Oberfläche des reciproken Ellipsoides mit dem Factor $8l^2abc$ multiplicirt.

---

20) cf. Magener, l. l. pag. 461.

21) cf. Hirst, pag. 23.

Auch können die Gleichungen $x = y = z = l$ angesehen werden als das analytische Aequivalent der Diagonalen des concentrischen Würfels; da nun die Entfernung eines Punktes der Diagonalen vom Centrum des Ellipsoides $= l\sqrt{3}$ ist, so folgt:

X. Bewegt sich der Pol auf den Diagonalen des concentrischen Würfels, so ist der Zuwachs, den das Minimalvolumen der Wellenfläche erleidet, proportional dem Quadrate der Entfernung des Poles vom Centrum des Ellipsoides.

Hiermit müssen wir der grösseren Kürze wegen die Discussion der für das Volumen der Wellenflächen des Ellipsoides aufgestellten Gleichungen abbrechen. Die für die Fusspunktenkörper [22]) der beiden Rotationsellipsoide und der Kugel aufgestellten Lehrsätze lassen sich mit leichter Mühe übertragen und vermöge der mehrfach hervorgehobenen Dualität zwischen Pol und Wellenfläche vermehren.

§ 4.

Das zweischalige Hyperboloid.

Die Gleichung des zweischaligen Hyperboloides

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

wird identisch erfüllt durch die Functionen [23])

$$x = a \operatorname{tg} u \cos v,$$
$$y = b \operatorname{tg} u \sin v,$$
$$z = \frac{c}{\cos u},$$

welchen gemäss die Punkte auf der Mantelfläche des Hyperboloides dargestellt werden als Schnittpunkte einer der Z-Ebene parallelen, beweglichen und veränderlichen Ellipse und einer um die Z-Axe sich drehenden Ebene. Sollen sämtliche Punkte der Mantelfläche erschöpft werden, so sind

für v die Grenzen 0 und 2π
„ u „ „ 0 „ π

22) cf. Magener und Hirst a. a. O.

23) K. Bremer, „Beitrag zur Theorie des Potentials". Diss. Rostock 1882. pag. 49.

festzuhalten. Legen wir ferner als Basis die *Rotationsfläche* derselben Art zu Grunde, und nehmen wir den Coordinatenanfang als im Pole $(-l, -m, -n)$ liegend an, so lauten die Coordinaten:

$$1)\quad x = l + a \operatorname{tg} u \cos v, \quad y = m + a \operatorname{tg} u \sin v, \quad z = n + \frac{c}{\cos u}.$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir mit Hülfe der partiellen Differentiation die Werte der folgenden Grössen ab:

$$A = -ac\frac{\sin^2 u \cos v}{\cos^3 u}, \quad B = -ac\frac{\sin^2 u \sin v}{\cos^3 u}, \quad C = a^2 \frac{\sin u}{\cos^3 u},$$

$$S^2 = a^2(a^2 + c^2 \sin^2 u)\frac{\sin^2 u}{\cos^6 u}.$$

Sei

$$2)\quad M = cl \sin u \cos v + cm \sin u \sin v - na - ac \cos u,$$

so sind vermöge der Untersuchungen des § 1. die Coordinaten der Wellenfläche gegeben durch

$$x_1 = 2cM\frac{\sin u \cos v}{a^2 + c^2 \sin^2 u},$$

$$y_1 = 2cM\frac{\sin u \sin v}{a^2 + c^2 \sin^2 u},$$

$$z_1 = -2aM\frac{1}{a^2 + c^2 \sin^2 u}.$$

Durch Division erhalten wir $y_1 = x_1 \operatorname{tg} v$, die Curven [24]) V werden daher auf der Wellenfläche durch eine um die Z-Axe sich drehende Ebene ausgeschnitten. Quadriren wir die aus 3) abgeleiteten Gleichungen:

$$\frac{y_1}{z_1} = -\frac{c}{a}\sin u \sin v, \quad \frac{x_1}{z_1} = -\frac{c}{a}\sin u \cos v$$

und addiren sie, so ergibt sich die Gleichung eines veränderlichen Kreiskegels

$$\left(\frac{y_1}{z_1}\right)^2 + \left(\frac{x_1}{z_1}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}\sin^2 u$$

der den leuchtenden Punkt als Spitze besitzend auf der Wellenfläche die Curven U bestimmt.

Da die Coordinaten x, y, z und x_1, y_1, z_1 eindeutige Functionen von u und v sind, so werden die letzteren alle Punkte auf der Wellenfläche durchlaufen, wenn

für v die Grenzen 0 und 2π

„ u „ „ 0 „ π

---

24) cf. Joachimsthal „Anwendg. der Diff.- u. Int.-Rechng. auf die Theorie der Flächen und Curven dopp. Kr.“.

Rachlitz: [illegible]

eingeführt werden. [illegible] x_1, y_1, z_1 hervor, [illegible]

Ihr Volumen [illegible]

[illegible]

wo die Integration [illegible] wird

[illegible]

Nachdem die partiellen Differentialquotienten [illegible] und v bestimmt sind, [illegible]

4) $C_1 = \frac{[illegible]}{[illegible]}$ [illegible]

und erhalten für das Volumen [illegible]

5) $V = [illegible] \int \int \frac{[illegible]}{[illegible]}$

$- [illegible] \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{[illegible]}{[illegible]}$ [illegible]

Wir integriren zunächst [illegible] nach v, welche die Gleichungen

6) $\int_0^{2\pi} [illegible] = [illegible] \int_0^{2\pi} [illegible] = 0$

zur wesentlichen Vereinfachung dienen. Den Factor [illegible] kann ich für den Augenblick [illegible] und integrire gliedweise, so [illegible] die Ausdrücke

$$-3\int_0^{2\pi} c^2 P \sin^2 u \cos^2 v\,(aa + ac\cos u)\,dv$$

$$-3\int_0^{2\pi} c^2 m^2 \sin^2 u \sin^2 v\,(aa + ac\cos u)\,dv$$

$$-\int_0^{2\pi} (aa + ac\cos u)^3\,dv.$$

alle übrigen verschwinden. Mit anderen Worten, das erste Doppelintegral nimmt die Form an

$$7)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{M^3\sin^3 u\cos u\,du\,dv}{(a^2+c^2\sin^2 u)^4}$$

$$= -3\pi c^2(l^2+m^2)\int_0^{\pi}\frac{(na+ac\cos u)\sin^5 u\cos u\,du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^4}$$

$$-2\pi\int_0^{\pi}\frac{(na+ac\cos u)^3\sin^3 u\cos u\,du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^4}$$

Zwecks Auswertung des zweiten Doppelintegrales in 5) ist zu bilden

$$M\cos u+\frac{\partial M}{\partial u}\sin u = 2cl\sin u\cos u\cos v+2cm\sin u\cos u\sin v$$
$$-na\cos u-ac(\cos^2 u-\sin^2 u),$$

und dieser Ausdruck ist mit $M^2\dfrac{\sin u}{(a^2+c^2\sin^2 u)^3}$ zu multipliciren.

Mit Berücksichtigung der Gleichungen 6) erhält man für dasselbe die Summe zweier einfacher Integrale

$$8)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{M^2\left(M\cos u+\frac{\partial M}{\partial u}\sin u\right)\sin u\,du\,dv}{(a^2+c^2\sin^2 u)^3}$$

$$-2\pi\int_0^{\pi}\frac{(n^2a^2+2na^2c\cos u+a^2c^2\cos^2 u)(na\cos u+ac\cos^2 u-ac\sin^2 u)\sin u\,du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^3}$$

$$-\pi c^2(l^2+m^2)\int_0^{\pi}\frac{(5na\cos u+5ac\cos^2 u-ac\sin^2 u)\sin^3 u\,du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^3}.$$

Vermittelst der Gleichung

$$9)\quad \int_0^{\pi}\frac{\sin^m u\cos^{2n+1}u\,du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^r}=0$$

assen sich die Integrale 7) und 8) noch weiter reduciren.

Wir erhalten

$$10)\quad \int_0^{2\pi}\frac{M^3\sin^3u\cos u\,du\,dv}{(a^2+c^2\sin^2u)^4} = -3\pi ac^3(l^2+m^2)\int_0^{\pi}\frac{\sin^5u\cos^2u\,du}{(a^2+c^2\sin^2u)^4}$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi}\frac{(3n^2a^3c\cos u + a^3c^3u)\sin^3u\cos u\,du}{(a^2+c^2\sin^2u)^4}$$

$$11)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{M^2\left(M\cos u+\frac{\partial M}{\partial u}\sin u\right)\sin u\,du\,dv}{(a^2+c^2\sin^2u)^3}$$

$$-\pi c^2(l^2+m^2)\int_0^{\pi}\frac{5ac\cos^2u-ac\sin^2u}{(a^2+c^2\sin^2u)^3}\sin^3u\,du$$

$$-2\pi\int_0^{\pi}\frac{3n^2a^3c\cos^2u-n^2a^3c\sin^2u+a^3c^3\cos^4u-a^3c^3\sin^2u\cos^2u}{(a^2+c^2\sin^2u)^3}\sin u\,du.$$

Die Summe dieser beiden Grössen ergibt das Volumen, nachdem zuvor gemäss 5) die erstere mit $16ac^4$, die zweite mit $-8ac^2$ multiplicirt ist.

Ich will die rechte Seite der auf diese Weise entstehenden Gleichung in die Form bringen

$$12)\qquad V = 8\pi a^2c^5(l^2+m^2)I_1+16\pi a^4c^3n^2I_2+16\pi a^4c^5I_3,$$

dann sind die Symbole gegeben durch

$$I_1 = \int_0^{\pi}\frac{5\cos^2u-\sin^2u}{(a^2+c^2\sin^2u)^3}\sin^3u\,du - 6c^2\int_0^{\pi}\frac{\sin^5u\cos^2u\,du}{(a^2+c^2\sin^2u)^4}.$$

$$13)\quad I_2 = \int_0^{\pi}\frac{3\cos^2u-\sin^2u}{(a^2+c^2\sin^2u)^3}\sin u\,du - 6c^2\int_0^{\pi}\frac{\cos^2u\sin^3u\,du}{(a^2+c^2\sin^2u)^4},$$

$$I_3 = \int_0^{\pi}\frac{\cos^4u-\sin^2u\cos^2u}{(a^2+c^2\sin^2u)^3}\sin u\,du - 2c^2\int_0^{\pi}\frac{\cos^4u\sin^3u\,du}{(a^2+c^2\sin^2u)^4}.$$

Wird an Stelle der Differenz je zweier Integrale das Integral aus der Differenz der Argumente eingeführt, diese vereinfacht, und dann erst gliedweise integrirt, so resultirt

$$I_3 = 2a^2 \int_0^\pi \frac{\sin u \cos^4 u \, du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^4} - \int_0^\pi \frac{\sin u \cos^2 u \, du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^3}$$

und

$$14) \quad V_0 = 16\pi a^4 c^5 I_3 = \frac{8}{3}\pi c^3 - 4\pi a^2 c + \frac{4\pi a^4}{\sqrt{a^2+c^2}} \log \text{nat} \frac{c+\sqrt{a^2+c^2}}{a}$$ [25])

Durch ein ähnliches Verfahren wird gefunden

$$I_2 = 3\int_0^\pi \frac{a^2 - c^2\sin^2 u}{(a^2+c^2\sin^2 u)^4} \sin u \cos^2 u \, du - \int_0^\pi \frac{\sin^3 u \, du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^3}$$

daher wird

15)

$$V_n = 16\pi a^4 c^3 I_2 = 4\pi c \frac{a+2c_2}{a^2+c^2} - \frac{4a^4\pi}{(a^2+c^2)\sqrt{a^2+c^2}} \log \text{nat} \frac{c+\sqrt{a^2+c^2}}{a}$$

Ferner ist

$$I_1 = 6a^2 \int_0^\pi \frac{\cos^2 u \sin^3 u \, du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^4} - \int_0^\pi \frac{\sin^3 u \, du}{(a^2+c^2\sin^2 u)^3}$$

$$16) \quad V_{lm} = 8\pi a^2 c^5 I_1 = 2\pi c \frac{3a^2+2c^2}{a^2+c^2}$$

$$- 2\pi a^2 \frac{3a^2+4c^2}{(a^2+c^2)\sqrt{a^2+c^2}} \log \text{nat} \frac{c+\sqrt{a^2+c^2}}{a}$$

Das verlangte Volumen stellt sich demnach in der Gestalt dar

$$V_{l,m,n} = V_{l,m}(l^2+m^2) + V_n n^2 + V_0,$$

dabei bedeuten $V_{l,m}$, V_n, V_0 bekannte Functionen der Axen des Hyperboloides, die positiv sind, wie sich mit wenigen Schlüssen aus den Integralen I_1, I_2, I_3 ableiten lässt.

Die Untersuchung derjenigen Lagen des Poles, denen ein Maximum oder Minimum des Wellenflächen-Volumens entspricht, führt zu der einzigen Lösung $l = m = n = o$ der Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial l} = \frac{\partial V}{\partial m} = \frac{\partial V}{\partial n} = 0.$$

Setzt man diese Wurzeln in die Gleichung 17) ein, so zeigt es sich, dass V_0 das Minimum des Volumens darstellt. Diese Grösse ist das Achtfache desjenigen Ausdruckes, welchen Tortolini im 31. Bande

25) cf. Tortolini a. a. O. pag. 37.

des Crelle'schen Journals als Inhalt der dem zweischaligen Rotationshyperboloide entsprechenden Fusspunktfläche aufstellt; unter der Voraussetzung, dass der Pol mit dem Mittelpunkt zusammenfällt.

Lehrsatz I. Liegt der Pol im Mittelpunkt des Hyperboloides, so ist das Volumen der entsprechenden Wellenfläche ein Minimum.

Die Gleichung

$$V_{lm}(x^2+y^2)+V_n z^2 = D \tag{18}$$

repräsentirt ein Rotationsellipsoid, das mit der Basis concentrisch oder auch ein solches, dessen Mittelpunkt der Pol ist. Dies ist sogar die ursprüngliche Bedeutung der Gleichung 18), da der Coordinatenanfang im Pol gelegen ist. Nun treten aber die Grössen l, m, n nur quadratisch auf, ich kann sie ansehen als die Quadrate von $-l$, $-m$, $-n$, d. h. als Quadrate der rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, des Poles, bezogen auf ein paralleles Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt des Ellipsoides ist.

Die Gleichungen 17) und 18) führen dann zu den beiden correspondirenden Lehrsätzen:

II. Bewegt sich das Hyperboloid mit seinem Mittelpunkt auf der Oberfläche des um den Pol als Mittelpunkt construirten Rotationsellipsoides

$$\frac{V_{lm}}{D}(x^2+y^2)+\frac{V_n}{D}z^2 = u$$

während die Hauptaxen beider stets gleichgerichtet sind, so bleibt das Volumen der entsprechenden Wellenfläche ein constantes.

III. Liegen die Pole auf der Oberfläche eines mit der Basis concentrischen Rotationsellipsoides

$$\frac{V_{l,m}}{D}(x^2+y^2)+\frac{V_n}{D}z^2 = 1$$

so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen einander gleich.

Durch Veränderung von D gelangen wir zu immer neuen Ellipsoiden, die einander ähnlich und mit dem Hyperboloide concentrisch sind. Wir finden demnach:

IV. Die geometrischen Oerter der Pole gleichen Volumens der Wellenfläche des Rotationshyperboloides sind einander ähnliche und concentrische Rotationsellipsoide.

Wird $l^2+m^2 = c_1^2$, $n = \pm c_2$ gesetzt, so repräsentiren diese Gleichungen bei beliebig aber fest vorgelegten Werten c_1 und c_2 zwei Kreise, denen folgende Eigenschaft zukommt:

V. Bewegt sich das zweifache Rotations-Hyperboloid mit seinem Mittelpunkte auf einem der Kreise $l^2+m^2=c_1^2$, $n=\pm c_2$, so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen einander gleich, vorausgesetzt, dass die Rotationsaxe des Hyperboloides der Z-Axe parallel bleibt.

VI. Bewegt sich der Pol auf den Kreisen $x^2+y^2=c_1^2$, $z=\pm c_2$, so sind die Volumina der zugehörigen Wellenflächen dieselben [26]).

Es sei angenommen, dass die Coordinaten des Poles der Gleichung des Cylinders $x^2+y^2=\varrho^2$ Genüge leisten, dann lehrt die Formel 17), dass das Volumen der Wellenfläche ein relatives Minimum ist, wenn überdies die Bedingung $z=0$ erfüllt ist. Aus 17) ergiebt sich zugleich der Satz:

VII. Bewegt sich der Pol auf der Cylinderoberfläche $x^2+y^2=\varrho^2$, so sind die Zunahmen, welche das Wellenflächenvolumen

$$V_{l,m}\,\varrho^2+V_0$$

erleidet, proportional dem Quadrate der Entfernung des Poles von der Z-Ebene.

Ein specieller Fall ist der folgende:

VIII. Bewegt sich der Pol in der Rotationsaxe des Hyperboloides, so erfährt das Minimalvolumen eine Zunahme, die dem Quadrate des Abstandes des Poles vom Centrum des Hyperboloides proportional ist.

Durch analoge Betrachtungen leiten wir die Resultate ab:

IX. Bewegt sich der Pol in der Ebene $z=\pm c$, so sind die Zunahmen, welche das Volumen

$$V_n\,c^2+V_0$$

erleidet, proportional dem Quadrate der Entfernung des Poles von der Z-Axe.

X. Bewegt sich der Pol in der XY-Ebene, so sind die Zuwachse, welche zu dem Minimalvolumen hinzukommen, proportional dem Quadrate seiner Entfernung vom Centrum des Hyperboloides.

---

26) Es braucht nicht hervorgehoben zu werden, dass das Coordinatensystem einmal als im Pole, das andere Mal als im Centrum des Hyperboloides mit seinem Ursprung gelegen vorzustellen ist. Zur Unterscheidung sind die laufenden Coordinaten im ersten Fall l, m, n, im anderen Fall x, y, z genannt. Die erwähnte Reciprocität ist ein Analogon derjenigen zwischen Pol und Polare.

Wird nun umgekehrt der Pol als fest, das Hyperboloid als beweglich angesehen, so ergiebt sich eine Reihe correspondirender Lehrsätze, die wir zu dem folgenden zusammenziehen wollen:

XI. Bleibt die Rotationsaxe des zweischaligen Hyperboloides sich stets parallel, während das Centrum auf dem Kreise $l^2+m^2=\varrho^2$, $n=\pm c$ sich bewegt, so sind die Volumina sämtlicher Wellenflächen, deren Pol der Coordinatenanfang ist, einander gleich. Bei constantem ϱ ist die Zunahme, welche das Volumen $V_{l,m}\varrho^2+V_0$ erleidet, proportional c^2, bei veränderlichem ϱ und festem c ist die Zunahme, welche das Volumen $V_n c^2+V_0$ erfährt, proportional ϱ^2.

Eine besonders einfache Gestalt nimmt der für das Volumen gefundene Ausdruck an, wenn $l=m=n=k$ einer Constanten gesetzt wird. Nämlich

$$V_k=V_0\left(1-4\frac{k^2}{a^2}\right)+\frac{k^2}{a^2}\cdot\tfrac{4}{3}\pi(2c)^3$$

daraus folgt:

XII. Liegt der Pol in einer beliebigen Ecke $x=y=z=k$ des Würfels, dessen Diagonalen sich im Centrum des Hyperboloides schneiden, so ist das Volumen der Wellenfläche gleich dem $\left(1-4\frac{k^2}{a^2}\right)$-fachen seines Minimalwertes, vermehrt um das $\left(\frac{k^2}{a^2}\right)$-fache Volumen einer Kugel, deren Radius die Rotationsaxe ist.

Die Gleichungen $x=y=z=k$ repräsentiren die Diagonalen des definirten Würfels, diese durchdringen die den Raum erfüllenden Rotationsellipsoide 18), und wird dies berücksichtigt, so führen die Lehrsätze III. und XII. zu dem folgenden:

XIII. Das Volumen einer beliebigen Wellenfläche des Rotationshyperboloides mit zwei Mantelflächen kann in die Form

$$V=V_k=V_0\left(1-\frac{k^2}{a^2}\right)+\frac{k^2}{a^2}\cdot\tfrac{4}{3}\pi(2c)^3$$

gebracht werden.

Setzen wir z. B. in 17)

$$l=m=0,\quad n=\sqrt{a^2+c^2},$$

so erhalten wir

$$V_f=V_0+(a^2+c^2)V_n=\tfrac{4}{3}\pi(2c^3)$$

d, h. wir gelangen zu dem bekannten Resultat:

XIV. Liegt der Pol in dem einen Brennpunkt des Rotationshyperboloides, so ist das Volumen der entsprechenden Wellenfläche dem Inhalte einer Kugel gleich, deren Radius die Rotationsaxe ist.

§ 5.

Das einfache Hyperboloid.

Nach Bremer, „Beitrag z. Th. d. Potentials" lassen sich die rechtwinkligen Coordinaten des einfachen Hyperboloides

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

in folgender Weise als Functionen zweier Veränderlichen u und v darstellen:

$$x = \frac{a}{c}u\cos v + a\sin v,$$

$$y = \frac{b}{c}u\sin v - b\cos v,$$

$$z = u.$$

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen v, so resultiren

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{u^2}{c^2},$$

$$z=u$$

die Gleichungen einer mit u zugleich veränderlichen Ellipse.

Die Elimination von u führt zur Gleichung

$$x = \frac{a}{c}z\cos v + a\sin v$$

einer der Y-Axe parallelen Ebene. Die Mantelfläche ist daher anzusehen als das Continuum der Schnittpunkte jener Ellipse mit der beweglichen Ebene. Damit alle Punkte des Hyperboloides durchlaufen werden, sind

für u die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$
für v „ „ $-\pi$ „ $+\pi$

zu wählen [27]).

Ich verlege das Coordinatensystem parallel nach dem leuchtenden Punkte [28]), dann lauten die Coordinaten des einfachen Hyperboloides

27) cf. Bremer a. a. O. pag. 11.

28) cf. § 1.

$$1)\qquad \begin{aligned} x &= l + \frac{a}{c} u \cos v + a \sin v, \\ y &= m + \frac{b}{c} u \sin v - b \cos v, \\ z &= n + u. \end{aligned}$$

Durch Differentiation ergiebt sich

$$dx = \frac{a}{c} \cos v \, du + \left(-\frac{a}{c} u \sin v + a \cos v\right) dv$$

$$dy = \frac{b}{c} \sin v \, du + \left(\frac{b}{c} u \cos v + b \sin v\right) dv$$

$$dz = du$$

Wird nun für die Folge die Rotationsfläche derselben Art zu Grunde gelegt, also $a = b$ gesetzt, so ergeben sich die Beziehungen

$$A = -\frac{a}{c}(u \cos v + c \sin v),$$

$$B = -\frac{a}{c}(u \sin v - c \cos v),$$

$$C = \frac{a^2}{c^2} u,$$

$$S^2 = \frac{a^2}{c^4}(c^4 + u^2(a^2 + c^2)).$$

Es sei ferner

$$M = c(lu - mc) \cos v + c(mu + lc) \sin v + ac^2 - anu,$$
$$N = c^4 + u^2(a^2 + c^2),$$

so nehmen die Coordinaten der Wellenfläche die Form an

$$2)\qquad \begin{aligned} x_1 &= 2cM \frac{u \cos v + c \sin v}{N}, \\ y_1 &= 2cM \frac{u \sin v - c \cos v}{N}, \\ z_1 &= -2aM \frac{u}{N}. \end{aligned}$$

Werden in den Gleichungen für x_1 und z_1 die rechten Seiten der Null gleich gemacht, die linken nach Potenzen von u geordnet, und die so gebildeten Relationen mit u multiplicirt, so kann dann

System der vier Gleichungen, als deren Unbekannte die Grössen u^3, u^2, u, 1 angesehen werden können, nur bestehen, wenn die Gleichungsdeterminante verschwindet: wir gelangen zu der Gleichung einer Ellipse mit den laufenden Coordinaten x_1 und z_1, deren Constanten den Parameter v in sich enthalten. Mit anderen Worten die Projectionen der Curven V auf die Y-Ebene sind Ellipsen; sie gehen sämtlich durch den Coordinatenanfang und degeneriren in den Fällen $v = \pm \pi$, $v = 0$ in Parabeln.

Auf analogem Wege ergeben sich die Projectionen der Curven V auf X-Ebene als eine Schar von Ellipsen, die den Pol mit einander gemein haben und in den Fällen $v = \pm \frac{\pi}{2}$ in Parabeln ausarten.

Es ist nicht schwer die Gleichungen der Projectionen der Curven U auf die Z-Ebene zu bestimmen, sie enthalten den Parameter u und lauten:

$$\{(x^2+y^2)(a^2u^2+c^2(u^2+c^2)) - 4c^2(u^2+c^2)(lx+my)\}^2$$
$$= 4a^2c^2(u^2+c^2)(c^2-nu)^2(x^2+y^2).$$

Die Punkte auf der Wellenfläche sind demgemäss anzusehen als die Schnittpunkte zweier elliptischer Cylinder mit einer Cylinderfläche von der vierten Ordnung, deren Erzeugende sich in ihnen lotrecht durchsetzen.

Sollen sämtliche Punkte der Wellenfläche erschöpft werden, so sind für u die Grenzen $\pm\infty$, für v die Grenzen $\pm\pi$ einzuführen. Dann lehrt das Gleichungssystem 2), dass die Coordinaten x_1, y_1, z_1 wohl den Wert Null annehmen können, nicht aber unendlich grosse Werte.

Stellen wir die ähnlichen Betrachtungen an wie in § 3., so wird das Volumen repräsentirt durch

$$V_{l,m,n} = \tfrac{1}{3}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1)\,du\,dv$$

Zur Bestimmung der Grössen A_1, B_1, C_1 sind die partiellen Differentialquotienten nach u und v zu bilden, aus ihnen setzen sich jene Determinanten in bekannter Weise zusammen § 3., 9). Es resultirt

$$A_1 = \frac{4ac}{N^3}M\left\{\begin{array}{c}(u\cos v + c\sin v)\left(MN + uN\frac{\partial M}{\partial u} - uM\frac{\partial N}{\partial u}\right) \\ - c\cos v\,N\frac{\partial M}{\partial v}\end{array}\right\}$$

$$B_1 = \frac{4ac}{N^3} M \left\{ \begin{array}{c} (u \sin v - c \cos v) \left(MN + uN \frac{\partial M}{\partial u} - uM \frac{\partial N}{\partial u} \right) \\ - c \sin v N \frac{\partial M}{\partial v} \end{array} \right\}$$

$$C_1 = \frac{4c^2}{N^3} M \left\{ u\, MN - cN \frac{\partial M}{\partial v} + (u^2 + c^2) \left(N \frac{\partial M}{\partial u} - M \frac{\partial N}{\partial u} \right) \right\}$$

Wenige Operationen führen dann zu

$$3) \qquad V_{l,m,n} = \tfrac{8}{3} ac^4 \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{M^3}{N^3}\, du\, dv$$

Wird nun M^3 entwickelt und gliedweise integrirt, so folgt unter Beachtung der Formeln

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^{2n+1} v \sin^m v\, dv = \int_{-\pi}^{+\pi} \cos^n v \sin^{2m+1} v\, dv = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 v\, dv = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 v\, dv = \pi,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 du}{(c^4 + (a^2 + c^2)u^2)^3} = \frac{\pi}{8(a^2 + c^2)c^6 \sqrt{a^2 + c^2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(c^4 + (a^2 + c^2)u^2)^3} = \frac{3\pi}{8c^{10} \sqrt{a^2 + c^2}},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^{2n+1} du}{(c^4 + (a^2 + c^2)u^2)^3} = 0.$$

der nachstehende Wert für das Volumen der Wellenfläche

$$4) \qquad V_{l,m,n} = V_{l,m}(l^2 + m^2) + V_n n^2 + V_0,$$

wo der Kürze wegen

$$5) \quad V_{l,m} = \frac{\pi^2 a^2 (4c^2 + 3a^2)}{(a^2 + c^2)\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad V_n = \frac{2\pi^2 a^4}{(a^2 + c^2)\sqrt{a^2 + c_2}},$$

$$V_0 = \frac{2\pi^2 a^4}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

gesetzt wurde. Die letzten drei Grössen sind positiv, daher ergeben sich aus 4) die Sätze:

I. Das Volumen der Wellenfläche des einfachen Rotationshyperboloides ist dann und nur dann ein Minimum

$$V_0 = \frac{2\pi^2 a^4}{\sqrt{a^2+c^2}} \quad ^{29})$$

wenn der Pol im Centrum gelegen ist.

Ferner wenn D eine Constante bedeutet:

II. Bleibt die Rotationsaxe des Hyperboloides der Z-Axe parallel, während das Centrum sich auf einem beliebigen Rotationsellipsoide der Schar

$$(l^2+m^2)\frac{V_{l,m}}{D}+n^2\frac{V_n}{D}=1$$

bewegt, so sind die Volumina der Wellenflächen, deren Pol der Coordinatenanfang ist, einander gleich.

III. Die geometrischen Oerter der Pole aller Wellenflächen gleichen Volumens sind eine Schar mit dem Basis-Hyperboloide concentrischer Rotationsellipsoide

$$(x^2+y^2)\frac{V_{l,m}}{D}+z^2\frac{V_n}{D}=1,$$

die einander ähnlich sind.

IV. Bleibt die Rotationsaxe des einfachen Hyperboloides der Z-Axe parallel, während das Centrum auf einem der Kreise $l^2+m^2=c_1^2$, $n=\pm c_2$ sich bewegt, so sind die Volumina aller zugehörigen Wellenflächen, deren Pol der Coordinatenanfang ist, einander gleich.

Ist $c_2=0$, so wird das Volumen der Wellenfläche repräsentirt durch

$$V_{l,m}c_1+V_0,$$

ist $c_1=0$, so ist das Volumen gleich

$$V_n c_2+V_0$$

es folgen daraus die Sätze:

V. Bewegt sich das einfache Hyperboloid in der definirten Weise auf der Oberfläche des Cylinders $l^2+m^2=\varrho^2$, so sind die Zunahmen,

---

29) cf. Tortolini a. a. O. pag. 39.

welche das Wellenflächenvolumen $V_{l,m}\varrho^2+V_0$ erleidet, proportional dem Quadrate der Entfernung des Mittelpunktes von der Z-Ebene.

VI. Bewegt sich das einfache Hyperboloid im angegebenen Sinne auf der Ebene $z=$ const, so sind die Zuwachse, welche zu dem Volumen $V_n$const$+V_0$ hinzutreten, dem Quadrate des Abstandes des Mittelpunktes von der Z-Axe proportional.

VII. Denken wir das einfache Hyperboloid der Art verschoben, dass die Rotationsaxe sich parallel in der Z-Ebene bewegt, so sind die Zunahmen, welche zu dem Minimalvolumen V_0 hinzutreten, proportional dem Quadrate der Entfernung des Centrums von dem Coordinatenanfang.

VIII. Bewegt sich das einfache Hyperboloid in der Weise vom Pole fort, dass seine Rotationsaxe stets mit der Z-Axe zusammenfällt, so sind die Zuwachse, welche das Minimalvolumen V_0 erleidet, dem Quadrate der Entfernung des Centrums vom Pole proportional.

Wenn wir jetzt umgekehrt den Pol als beweglich, die Basis als fest ansehen, so ergeben sich ganz analoge Sätze wie in § 4. Wir wollen sie zusammenfassen und in den nachstehenden Lehrsatz kleiden:

IX. Bewegt sich der Pol auf einem der Kreise $x^2+y^2=\varrho^2$, $z=\pm$const, so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen des einfachen Rotationshyperboloides einander gleich. Aendert sich eine der Grössen ϱ und c, während die andere fest bleibt, so sind die Zunahmen, welche die Volumina $V_{l,m}\varrho^2+V_0$ und $V_n c^2+V_0$ erleiden, resp. proportional c^2 und ϱ^2.

Wird $x=y=z=kc$ gesetzt, so nimmt die Gleichung 4) die Form an

$$V_{kc}=\frac{\pi^2a^2}{\sqrt{a^2+c^2}}(8k^2c^2+2a^2)=V_0+8k^2.\pi^2\frac{a^2c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

Nun stellt der Ausdruck[30] $\dfrac{\pi^2a^4}{4\sqrt{a^2+c^2}}$ das Volumen des Körpers dar der durch Rotation der Lemniskate $(x^2+y^2)^2=a^2x^2-c^2y^2$ um die Y-Axe entsteht, daher resultirt:

X. Liegt der Pol in einer beliebigen Ecke $x=y=z=kc$ des concentrischen Würfels, so sind die Volumina der acht entsprechenden Wellenflächen dem Minimalvolumen V_0 gleich vermehrt um

30) cf. Tortolini a. a. O. pag. 39.

das $\left(32k^2\frac{c^2}{a^2}\right)$-fache Volumen des Körpers, der durch die Rotation der Lemniskate $(x^2+y^2) = a^2x^2 - c^2y^2$ um die Y-Axe erzeugt wird.

Die Gleichungen $x = y = z = kc$ können als das analytische Aequivalent der Diagonalen des definirten Würfels angesehen werden; liegt der Pol auf einer derselben, so ist seine Entfernung vom Mittelpunkt gegeben durch $r = kc\sqrt{3}$. Demnach finden wir:

XI. Bewegt sich der Pol auf den Geraden $x = y = z = kc$, so ist der Zuwachs, den das Minimalvolumen V_0 erleidet, dem Quadrate seiner Entfernung vom Centrum des Hyperboloides proportional.

Diese Geraden durchdringen die Schar der Ellipsoide

$$\frac{V_{l,m}}{D}(x^2+y^2)+\frac{V_n}{D}z^2 = 1,$$

dann aber geht aus den Sätzen III. und XI. der nachstehende hervor.

XII. Das Volumen einer jeden Wellenfläche des einfachen Rotationshyperboloides kann in die Form

$$V = V_0 + 8k^2\pi^2\frac{a^2c^2}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

gebracht werden.

Ist z. B. $k = \frac{1}{2}$, so ergiebt sich der einfache Ausdruck:

$$V_{c/_2} = 2\pi^2 a^2\sqrt{a^2+c^2}$$

Wir gelangen zu dem Satz:

XIII. Liegt der Pol in einer der Ecken des concentrischen Würfels, dessen Seitenflächen die Rotationsaxe des einfachen Hyperboloides halbiren, so ist das Volumen der entsprechenden Wellenfläche gleich dem Körper, der durch Multiplication von $\frac{\pi}{8}\sqrt{a^2+c^2}$ mit der Kugeloberfläche entsteht, deren Radius die Nebenaxe des Hyperboloides ist.

Die Substitution $x = y = z = ha$ führt zu dem Resultat:

$$V_{l,m,n} = (4h^2+1)V_0,$$

oder wir finden

XIV. Bewegt sich der Pol auf den Diagonalen des Würfels, dessen Seitenflächen die Endpunkte der Nebenachsen treffen, so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen dem $(4h^2+1)$ fachen

Minimalvolumen V_0 gleich, wo $h = \frac{r}{a\sqrt{3}}$ der Entfernung r des Poles vom Centrum des Hyperboloides proportional ist.

Mit Berücksichtigung von III. gelangen wir zu

XV. Das Volumen einer jeden Wellenfläche des einfachen Rotationshyperboloides kann auf die Form

$$V_{l,m,n} = V_0(4h^2+1)$$

gebracht worden.

Zwischen den Zahlen h und k der Lehrsätze XII. und XIV. besteht die Relation $ah = \pm kc$. Der Fall $h = 1$ führt zu dem Lehrsatze:

XVI. Liegt der Pol in den Ecken des concentrischen Würfels, dessen Seitenflächen die Endpunkte der Nebenaxen treffen, so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen dem fünffachen Minimalvolumen V_0 gleich.

Auch die Lehrsätze X. bis XVI. lassen sich umkehren, insofern wir den Pol als fest, das Hyperboloid als beweglich ansehen können. Der Kürze wegen soll darauf nur hingewiesen werden.

§ 6.

Das Rotationsparaboloid.

Die Gleichung des Rotationshyperboloides

$$x^2+y^2+az = 0$$

wird identisch erfüllt durch die Functionen [31]:

$$r = au.\cos v,$$
$$y = au\sin v,$$
$$z = -au^2,$$

deren Variabele u und v in folgender Weise zu definiren sind: die Curven U $\{x^2+y^2 = a^2u^2.\ z = -au^2\}$ sind der XY-Ebene parallele, bewegliche und veränderliche Kreise; die Curven V werden durch eine um die Z-Axe sich drehende Ebene $y = x.\mathrm{tg}\,v$ auf dem Paraboloide ausgeschnitten.

Legen wir den folgenden Untersuchungen eine paraboloidische

---

31) cf. Bremer, a. a. O. pag. 47.

Calotte von der Höhe h zu Grunde, so sind die Grenzen, zwischen denen u und v variiren müssen, 0 und 2π für v, 0 und $\sqrt{\frac{h}{a}}$ für u.

Durch die Verlegung des Coordinatenanfanges in den leuchtenden Punkt $(-l, -m, -n)$ ergeben sich folgende Gleichungen:

1) $$x = l + au\cos v, \quad y = m + au\sin v, \quad z = n - au^2$$

Durch partielle Differentiation erhalten wir

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a\cos v, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -au\sin v,$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = a\sin v, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = au\cos v,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -2au, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Hieraus leiten wir ab

2) $$\begin{cases} A = 2a^2u^2\cos v, \quad B = 2a^2u^2\sin v, \quad C = a^2u, \\ S^2 = a^4u^2(4u^2+1). \end{cases}$$

Wenige Operationen ergeben die Coordinaten der Wellenfläche des Rotationsparaboloides in der Form

3) $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4u\cos v}{4u^2+1}M, \\ y_1 = \dfrac{4u\sin v}{4u^2+1}M, \\ z_1 = \dfrac{2}{4u^2+1}M. \end{cases}$$

dabei haben wir der Kürze wegen

4) $$M = 2lu\cos v + 2mu\sin v + n + au^2$$

gesetzt. Es ist bekannt, dass die vom Brennpunkt ausgehenden Lichtstrahlen an der Oberfläche des Rotationsparaboloides parallel der Rotationsaxe reflectirt werden. Durch Specialisirung der Formeln 3) und 4) gelangen wir unmittelbar zu demselben Resultat:

Sei $l = m = 0$, $n = a/_4$, so folgen die Gleichungen der Wellenfläche

$$x_f = au\cos v, \quad y_f = au\sin v, \quad z_f = a/_2,$$

die eine zur Z-Axe senkrechte Ebene repräsentiren, deren Schnitt-

punkt mit dieser Axe dieselbe Entfernung $\frac{a}{4}$ vom Scheitel des Paraboloides hat, wie der Focus. Zu der paraboloidischen Calotte gehört ein endliches Kreisstück

$$u = \sqrt{\frac{h}{a}}$$

$$x^2 + y^2 = (a^2 u^2)_{u=0}$$

der Ebene

$$z = \frac{a}{2},$$

d. h. der Kreis

$$5) \qquad x^2 + y^2 = ah, \quad z = \frac{a}{2}.$$

Nach dieser Abschweifung, deren Resultat später von Bedeutung sein wird, kehren wir zu dem Gleichungssystem 3) zurück.

Die Coordinaten x, y, z wie x_1, y_1, z_1 sind eindeutige Functionen von u und v. Für die Veränderlichen u und v der Functionen x_1, y_1, z_1 sind daher die Grenzen 0 und $\sqrt{\frac{h}{a}}$ resp. 0 und 2π einzuführen. wenn alle Punkte der Wellenfläche erschöpft werden sollen, die der Oberfläche der paraboloidischen Calotte entsprechen.

Mit wachsenden Werten von h wird nun auch u grösser und grösser, mit u zugleich wachsen auch die Coordinaten der Wellenfläche, so dass x_1, y_1 für unendlich grosse Werte von h über alle Grenzen hinaus zunehmen. Die Oberfläche des Rotationsparaboloides ist daher nicht rings geschlossen. Wir müssen uns auf die paraboloidische Calotte von endlicher Höhe, auf ein endlich begrenztes Oberflächenstück der Wellenfläche beschränken, und haben unter dem Volumen der Wellenfläche den Inhalt des Kegels zu verstehen, dessen Basis dies Oberflächenstück, dessen Spitze der Pol ist. Es wird vom Zeichen abgesehen, dargestellt durch

$$V = \tfrac{1}{3} \int r\, ds \cos(N, r),$$

oder

$$V = -\tfrac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} (A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1)\, du\, dv$$

Es ist nicht schwer, die Gleichung des begrenzenden Kegelmantels aufzustellen. Aus 3) ergiebt sich:

$$x_1 = 2z_1 u \cos v, \quad y_1 = 2z_1 u \sin v$$

aus beiden

$$x_1^2 + y_1^2 = 4u^2 z_1^2,$$

die Gleichung eines Kegels, der die Wellenfläche in den Curven U durchsetzt, setzen wir in 6) an Stelle von u die obere Grenze $\sqrt{\frac{h}{a}}$, so repräsentirt die resultirende Formel

$$a(x_1^2 + y_1^2) = 4hz_1^2$$

den begrenzenden Kegelmantel.

Aus 3) leiten wir durch partielle Differentiation ab

$$\frac{\partial c_1}{\partial u} = \frac{4 \cos v}{(4u^2+1)^2}\left((4u^2+1)\left(M + u\frac{\partial M}{\partial u}\right) - 8Mu^2\right),$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = \frac{4 \sin v}{(4u^2+1)^2}\left((4u^2+1)\left(M + u\frac{\partial M}{\partial u}\right) - 8Mu^2\right),$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = \frac{2}{(4u^2+1)^2}\left((4u^2+1)\frac{\partial M}{\partial u} - 8Mu\right),$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{4u}{(4u^2+1)}\left(-M\sin v + \frac{\partial M}{\partial v}\cos v\right),$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{4u}{(4u^2+1)}\left(M\cos v + \frac{\partial M}{\partial v}\sin v\right),$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial v} = \frac{2}{(4u^2+1)}\frac{\partial M}{\partial v}$$

und finden

$$A_1 = \frac{8M}{(4u^2+1)^2}\left(\sin v\frac{\partial M}{\partial v} - u\cos v\frac{\partial M}{\partial u}\right) + \frac{64M^2u^2\cos v}{(4u^2+1)^3},$$

$$7) \quad B_1 = \frac{-8M}{(4u^2+1)^2}\left(\cos v\frac{\partial M}{\partial v} + u\sin v\frac{\partial M}{\partial u}\right) + \frac{64M^2u^2\sin v}{(4u^2+1)^3},$$

$$C_1 = \frac{16Mu}{(4u^2+1)^2}\left(M + u\frac{\partial M}{\partial u}\right) - \frac{128M^2u^3}{(4u^2+1)^3}$$

Aus ihnen und den Gleichungen in 3) resultirt

$$A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1 = \frac{32M^3}{(4u^2+1)^3},$$

welcher Wert in Verbindung mit 4) zu der Formel führt

8)

$$V = \frac{32}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \frac{(2lu\cos v + 2mu\sin v + n + au^2)^3 u\,du\,dv}{(4u^2+1)^3}$$

$$= \frac{32}{3} \int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \frac{2\pi(n+au^2)^3 + 12\pi(l^2+m^2)(n+au^2)^2u^2}{(4u^2+1)^3}\, u\,du$$

Der Zähler des Quotienten unter dem Integralzeichen lautet nach Potenzen von u geordnet:

$$2\pi(a^3u^7 + 3a^2nu^5 + 6a(l^2+m^2)u^5 + 3an^2u^3 + 6n(l^2+m^2)u^3 + n^3u).$$

Setzen wir daher

$$\frac{3}{64\pi} V = a^3J_7 + 3(a^2n + 2a(l^2+m^2))J_5 + 3(an^2 + 2n(l^2+m^2))J_3 + n^3J_1$$

so sind unter den Grössen J folgende Integrale zu verstehen:

$$J_7 = \int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \frac{u^7\,du}{(4u^2+1)^3} = \frac{16h^3 + 18h^2a + 3ha^2}{128a(4h+a)^2} - \frac{3}{512}\log\text{nat}\,\frac{4h+a}{a},$$

$$J_5 = \int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \frac{u^5\,du}{(4u^2+1)^3} = -\frac{h(6h+a)}{32(4h+a)^2} + \frac{1}{128}\log\text{nat}\,\frac{4h+a}{a},$$

$$J_3 = \int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \frac{u^3\,du}{(4u^2+1)^3} = \frac{h^2}{4(4h+a)^2},$$

$$J_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}} \frac{u\,du}{(4u^2+1)^3} = \frac{h(2h+a)}{2(4h+a)^2}.$$

Die Coefficienten J sind hierdurch bestimmt, aus der Form der unter dem Integrationszeichen stehenden Ausdrücke und den positiven Integrationsgrenzen geht unmittelbar hervor, dass sie positive Zahlen

sind. In 8) bedeuten l, m, n die rechtwinkligen Coordinaten des Scheitels des Rotationsparaboloides, bezogen auf den Pol als Anfang, während $-l$, $-m$, $-n$ resp. x, y, z die Coordinaten des Poles sind bezüglich eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, dessen Ursprung der Scheitel des Paraboloides ist.

Demgemäss kann das Volumen V auf folgende beiden Arten dargestellt werden[32]).

$$9)\quad V' = +\frac{64}{3}\pi J n^3 + 64\pi J_3(an^2 + 2n(l^2 + m^2)) + 64\pi J_5(a^2 n + 2a(l^2 + m^2)) + \frac{64}{3}\pi a^3 J_7.$$

$$10)\quad V = -\frac{64}{3}\pi J_1 J z^3 - 64\pi J_3(2(x^2 + y^2)z - az^2) + 64\pi J_5(2a(x^2 + y_2) - a^2 z) + \frac{64}{3}\pi a^3 J_7.$$

Aus der zweiten Formel ergiebt sich der Lehrsatz:

I. Der geometrische Ort der Pole, denen ein und dasselbe Volumen der dem Rotationsparaboloide zugehörigen Wellenfläche entspricht, ist eine Oberfläche dritter Ordnung $V = \text{const.}$

Die Gleichung

$$2(x^2 + y^2) - az = 0$$

repräsentirt ein Rotationsparaboloid, das sich vom Coordinatenanfang nach der positiven Seite der Z-Axe hin erstreckt, während die Basis sich nach der entgegengesetzten Richtung hin ausdehnt; auch unterscheiden sich die Parameter der erzeugenden Parabeln um den Factor zwei. Berücksichtigt man, dass der Coefficient von z^3 in 10) negativ ist, so resultirt der eigentümliche Lehrsatz:

II. Bewegt sich der Pol auf dem Rotationsparaboloide

$$x^2 + y^2 - \frac{a}{2}z = 0,$$

so ändern sich erstens die Volumina der entsprechenden Wellenflächen der Basis

$$x^2 + y^2 + az = 0$$

---

32) Dass die Wahl des Vorzeichens die richtige ist, ergiebt der am Ende dieses § untersuchte Specialfall.

nur mit der Entfernung des Poles von der Z-Ebene; so zwar, dass zweitens die Abnahmen, welche das Volumen

$$V_0 = \frac{64}{3}\pi J_7 a^3$$

erleidet, proportional dem Kubus jener Entfernung sind. Dabei bedeutet V_0 das Volumen der Wellenfläche, deren Pol der gemeinsame Schnittpunkt beider Paraboloide ist.

Der erste Teil dieses Lehrsatzes kann vermöge der Formel

$$V = -\frac{64}{3}\pi J_1 z^3 - 64\pi J_3 (2z(x^2+y^2) - \varphi a z^2 + (\varphi - 1) a z^2)$$
$$+ 64\pi J_5 (2a(x^2+y^2) - \varphi a^2 z + (\varphi - 1) a^2 z) + \frac{64}{3}\pi J_7 a^3,$$

in der φ eine von Null verschiedene Zahl bedeuten möge, verallgemeinert werden:

III. Bewegt sich der Pol auf dem Kreisschnitte des Paraboloides

$$x^2 + y^2 - \varphi a z = 0$$

mit der Ebene

$$z = \text{Const},$$

so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen der Basis

$$x^2 + y^2 + a z = 0$$

einander gleich.

Je nach der Wahl von $\varphi \gtrless 0$ sind die Paraboloide

$$x^2 + y^2 - \varphi a z = 0$$

auf der positiven oder negativen Seite der Z-Axe gelegen.

Alle diese Kreisschnitte können wir auch ansehen als Schnittlinien des Cylinders $x^2 + y^2 = c_1^2$, $z = c_2$. Dann folgt

IV. Bewegt sich der Pol auf dem Kreisschnitte des Cylinders $x^2 + y^2 = \varrho^2$ und der Ebene $z = \text{Const}$, so bleiben für alle möglichen Lagen des Poles die Volumina der Wellenflächen des Rotationsboloides dieselben.

Hierbei ist zu beachten, dass nicht wie bei den Wellenflächen des Ellipsoides und der Hyperboloide den beiden Kreisen

$$x^2 + y^2 = \varrho^2, \quad z = \pm c^2$$

dasselbe Volumen entspricht.

Die Coordinaten der Pole, denen ein Maximal- oder Minimalwert des Volumen V zugehört, müssen den Gleichungen genügen

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0 = -256\pi x(J_3 z - J_5 a) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0 = -246\pi y(J_3 z - J_5 a) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0 = -64\pi(J_1 z^2 + 2J_3(x^2+y^2) - 2J_3 az + a^2 J_5) = 0.$$

Die Lagen des Poles sind daher die 8 Schnittpunkte der drei Oberflächen zweiten Grades $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$, von welchen die beiden ersten in Ebenenpaare zerfallen, die dritte ein Ellipsoid darstellt. In der Tat, durch die Transformation $x = x$, $y = y$, $z = z + a\frac{J_3}{J_1}$ nimmt die letzte Gleichung die Gestalt an

$$J_1 z^2 + 2J_3(x^2+y^2) = \frac{a^2}{J_1}(J_3^2 - J_1 J_5).$$

Diesem Rotationsellipsoide können nun reelle Punkte nur dann entsprechen, wenn $J_3^2 - J_1 J_5 > 0$ ist, da J_1 positiv ist.

Das Vorzeichen von

$$J_3^2 - J_1 J_5 = \frac{h^4}{16(4h+a)^4} - \frac{h(2h+a)}{2(4h+a)^2}\left\{-\frac{h(6h+a)}{32(4h+a)^2} + \frac{1}{128}\log\frac{4h+a}{a}\right\}$$
$$= \frac{h^2}{64(4h+a)^2} - \frac{h(2h+a)}{256(4h+a)^2}\log\frac{4h+a}{a},$$

hängt ab von dem Factor

$$4h - (2h+a)\log\frac{4h+a}{a}.$$

Nun ist

$$\log\frac{4h+a}{a} = \log\left(1+\frac{4h}{a}\right) = 2\left\{\frac{2h}{2h+a} + \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{2h+a}\right)^3 + \dots\right\}\ ^{33)}$$

oder

$$4h - (2h+a)\log\frac{4h+a}{a} = -\frac{2}{3}\frac{(2h)^3}{(2h+a)^2} - \frac{2}{5}\frac{(2h)^5}{(2h+a)^4} - \dots$$

jedenfalls eine negative Grösse.

---

33) cf. Harnack, Die Elemente der Diff.- und Int.-Rechng. § 47 im ..

Das Ellipsoid $\frac{\partial V}{\partial z}$ ist daher imaginär, es können demnach überhaupt keine reellen Lagen des Poles existiren, denen ein Maximal- oder Minimalwert des Volumens der Wellenfläche eines Rotationsparaboloides zukommt.

Zum Vergleiche möge noch das von Herrn Fischer[34]) zur Bestimmung des Volumens der Fusspunktflächen angewandte Verfahren herangezogen werden. Er gelangt durch Einführung von Polarcoordinaten, und nachdem zuvor die Integration nach dem radius vector ausgeführt wurde, zu folgender Formel für das Volumen K einer beliebigen Basis $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

$$K = \frac{1}{3} \int_a^b \int_{a'}^{b'} \Big\{ (\xi - \alpha) \cos u \cos v + (\eta - \beta) \cos u \sin v + (\zeta - \gamma) \sin u \Big\}^3 \cos u \, du \, dv$$

hierin bedeuten α, β, γ die Coordinaten des Poles, nach unserer Bezeichnungsweise haben wir dafür $-l$, $-m$, $-n$ zu setzen.

Ferner wird verlangt, dass die laufenden Coordinaten ξ, η, ζ der Basis vermöge der drei Gleichungen

$$f(\xi, \eta, \zeta) = 0$$

$$-p = -\frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \operatorname{cotg} u \cos v$$

$$-q = -\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = \operatorname{cotg} u \sin v \; ^{34})$$

als Functionen der Winkel u und v dargestellt werden.

Aus der Gleichung der Basis leiten wir durch partielle Integration

$$p = -\frac{2}{a}\xi, \quad q = -\frac{2}{a}\eta$$

ab, und finden

$$\xi = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} u \cos v, \quad \eta = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} u \sin v, \quad \zeta = -\frac{a}{4} \operatorname{cotg}^2 u.$$

Einer paraboloidischen Calotte von der Höhe h entsprechen die Grenzen

$$0 \text{ und } 2\pi \text{ für } v, \quad \frac{\pi}{2} \text{ und } \operatorname{arc\,cotg} 2\sqrt{\frac{h}{a}} \text{ für } u.$$

---

34) cf. Fischer, l. l. pag. 13. In der mir vorliegenden Dissertation steht allerdings $p = \operatorname{cotg} u \cos v$, $q = u \sin v$, doch ist der Druckfehler unschwer zu erkennen.

Es resultirt

$$K=\frac{1}{3}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arc\,cotg} 2\sqrt{\frac{h}{a}}}\left(l\cos u\cos v+m\cos u\sin v+n\sin u+\frac{a\cos^2 u}{4\sin u}\right)^3\cos u\,du\,dv$$

wird zunächst die Integration nach v von 0 bis 2π ausgeführt, so erhalten wir

$$K=\frac{1}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arc\,cotg} 2\sqrt{\frac{h}{a}}}\left(2\pi\left(\frac{a\cos^2 u}{4\sin u}+n\sin u\right)^3+3\pi(l^2+m^2)\left(\frac{a\cos^2 u}{4\sin u}+n\sin u\right)\cos^2 u\right)\cos u\,du$$

$$=\frac{\pi}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\operatorname{arc\,cotg} 2\sqrt{\frac{h}{a}}}\left(2\left(\frac{a}{4}\cos^2 u+n\sin^2 u\right)^3+3(l^2+m^2)\left(\frac{a}{4}\cos^2 u+n\sin^2 u\right)\cos^2 u\sin^2 u\right)\frac{\cos u\,du}{\sin^5 u}$$

Führen wir in dasselbe durch die Gleichung $\operatorname{cotg} u=2x$ eine neue Veränderliche x ein, so ist

$$\sin^2 u=\frac{1}{4x^2+1},\quad \cos u^2=\frac{4x^2}{4x^2+1},\quad -\frac{du}{\sin^2 u}=2dx,$$

und

$$K=-\frac{8\pi}{3}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{h}{a}}}\left((ax^2+n)^3+6(ax^2+n)x^2(l^2+m^2)\right)\frac{x\,dx}{(4x^2+1)^3}$$

Wir gelangen vom Zeichen abgesehen zu dem achten Teil des in 8) aufgestellten Integrales, dessen Auswertung zu der Formel 9) führt.

Auch diese Gleichung 9) soll uns zur Ableitung einer Reihe von Lehrsätzen dienen:

V. Bewegt sich die Basis derartig, dass ihr Scheitel auf der Oberfläche dritter Ordnung $V'=\text{Const}$ gleitet, während die Rotationsaxe sich stets parallel bleibt, so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen einander gleich.

Die Gleichung $2(l^2+m^2)+cn=0$ repräsentirt ein Rotationsparaboloid, welches sich nach der negativen Seite der Z-Axe hin öffnet, die Coordinaten z können daher nur negative Werte annehmen. Der Coefficient von n^3 ist positiv, dann ergiebt sich:

VI. Gleitet die Basis mit ihrem Scheitel auf der Oberfläche des Rotationsparaboloides

$$l^2+m^2+\frac{a}{2}n=0,$$

während die Rotationsaxe sich stets parallel bleibt, so ändern sich erstens die Volumina der entsprechenden Wellenflächen nur, wenn die Entfernung des Poles von der Ebene $N=0$ ab oder zunimmt; und zweitens ist die Abnahme, welche das Volumen $V_0 = \frac{64}{3}J_7 a^3$ erleidet, proportional dem Kubus der genannten Entfernung. Dabei bedeutet V_0 das Volumen der Wellenfläche desjenigen Basisparaboloides, dessen Scheitel zusammenfällt mit dem Pole.

Der erste Teil dieses Satzes kann verallgemeinert werden (cf. Lehrs. III.). Wir wollen das Resultat in folgenden Satz kleiden:

VII. Bewegt sich die Basis derartig, dass ihr Scheitel auf einem der Kreisschnitte des Cylinders $l^2+m^2=c_1^2$, mit den Ebenen $z=\pm c_2^2$ gelegen ist, während ihre Rotationsaxe der Cylinderaxe parallel bleibt, so sind die Volumina der entsprechenden Wellenflächen constant.

Es sei $l=m=0$, $n=\frac{a}{4}$, dann fällt der Brennpunkt der Basis in den Pol und wir finden für das Volumen der Wellenfläche

$$V_f = \frac{\pi}{3}\frac{h}{2}a^2.$$

Nun hatten wir als Wellenfläche des Paraboloides für dieselbe Lage des Brennpunktes die Kreisebene deren Radius $=ah$, deren Abstand $n=\frac{a}{2}$ ist, gefunden[35]). Da ferner

$$V_f = \tfrac{1}{3}\pi(ah)\frac{a}{2}$$

geschrieben werden kann, so repräsentirt V_f den Inhalt des Kegels, dessen Basis jener Kreis, dessen Spitze der Pol ist. Die erste Formel

---

35) cf. die Formel 5).

$$V_f = \frac{\pi}{3}\frac{h}{2}a^2$$

ergiebt den Lehrsatz:

VIII. Das Volumen der zu einer paraboloidischen Calotte von der Höhe h gehörenden Wellenfläche ist gleich dem Inhalte eines Kreiskegels, dessen Höhe $\frac{h}{2}$, dessen Grundflächenradius die Constante a der Gleichung des Rotationsparaboloides ist.

§ 7.

Das hyperbolische Paraboloid.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

schneidet die Z-Ebene in den beiden geraden Linien

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad z = 0.$$

Die eine derselben $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, $z = 0$ möge die Y-Axe, die andere $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, $z = 0$ die X-Axe des neuen Coordinatensystemes sein, auf welches wir im Folgenden die Gleichung des Paraboloides bezogen denken. Die Z-Axe des neuen Systemes sei mit der ursprünglichen identisch, dann wird die Transformation durch die folgenden Gleichungen vermittelt:

$$x_1 = \frac{bx - ay}{2ab}\sqrt{a^2 + b^2}, \quad y_1 = \frac{bx + ay}{2ab}\sqrt{a^2 + b^2}, \quad z_1 = z$$

oder

$$x = (x_1 + y_1)\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = -(x_1 - y_1)\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = z_1.$$

Wird der Einfachheit wegen der Index 1 unterdrückt, so nimmt die Gleichung des hyperbolischen Paraboloides die Form an

$$2xy = (a^2 + b^2)z, \tag{1}$$

sie wird identisch erfüllt durch die Functionen

$$\begin{aligned} x &= u, \\ y &= v, \\ z &= \frac{2}{a^2 + b^2}uv. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Elimination von v führt zu den Gleichungen einer Geraden:

$$3)\qquad (a^2+b^2)z = 2uy, \quad x = u,$$

und wenn wir u eliminiren, ergiebt sich die gerade Linie:

$$4)\qquad (a^2+b^2)z = 2vx, \quad y = v.$$

Die Mantelfläche des hyperbolischen Paraboloides muss daher angesehen werden als das Continuum der Schnittpunkte jener beiden geraden Linien, deren analytisches Aequivalent die Gleichungen unter 3) und 4) sind. Aus ihnen resultirt, dass die erzeugenden Geraden resp. der X- und der Y-Ebene stets parallel sind, dass sie ferner in den Grenzfällen $u=0$, $v=0$ mit der Y- resp. X-Axe zusammenfallen.

Die drei Ebenen $x=0$, $y=v$, $z=0$ schneiden aus der Oberfläche des Paraboloides ein zusammenhängendes Stück heraus, welches unter der Voraussetzung, dass u und v positive endliche Grössen sind, von der positiven X- und Y-Axe und den Geraden

$$(a^2+b^2)z = 2uy, \quad x = u, \quad (a^2+b^2)z = 2vx, \quad y = v$$

begrenzt wird. Die Coordinaten x, y, z werden der Reihe nach die sämtlichen Punkte des definirten Oberflächenstückes darstellen, wenn

u zwischen den Grenzen 0 und u,
v " " " 0 und v

variirt.

Durch eine parallele Verschiebung des Coordinatensystemes, der Art, dass der Nullpunkt in den Pol $(-l, -m, -n)$ hineinfällt, nehmen die Coordinaten des hyperbolischen Paraboloides die Gestalt an'

$$5)\qquad x = l+u, \quad y = m+v, \quad z = n + \frac{2uv}{a^2+b^2}$$

Die partielle Differentiation ergiebt

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2v}{a^2+b^2},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{2v}{a^2+b^2},$$

wir finden für die Determinanten folgende Ausdrücke

$$A = -\frac{2v}{a^2+b^2}, \quad B = -\frac{2u}{a^2+b^2}, \quad C = 1$$

ferner

$$S^2 = \frac{4(u^2+v^2)+(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2}.$$

Setzen wir

$$M = 2uv + 2lv + 2mu - n(a^2 + b^2) \tag{6}$$

so ergeben die in § 1. aufgestellten Formeln folgende Darstellung der Coordinaten der Wellenfläche des Paraboloides

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{4Mv}{(a^2+b^2)^2 S^2}, \\ y_1 &= \frac{4Mu}{(a^2+b^2)^2 S^2}, \\ z_1 &= \frac{-2M}{(a^2+b^2)^2 S^2} \end{aligned} \tag{7}$$

Die Fläche ist nicht geschlossen, wir haben demnach ihrer Kubatur die Formel

$$V = \tfrac{1}{3} \int r\, ds \cos(Nr)$$

zu Grunde zu legen, sie erfordert die Bestimmung der Determinanten A_1, B_1, C_1. Differentiiren wir die Gleichungen in 7) partiell, so folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_1}{\partial u} &= \frac{4v}{(a^2+b^2)^2 S^4} \left\{ \frac{\partial M}{\partial u} S^2 - M \frac{\partial S^2}{\partial u} \right\}, \\
\frac{\partial x_1}{\partial v} &= \frac{4}{(a^2+b^2)^2 S^4} \left\{ \left(\frac{\partial M}{\partial v} v + M \right) S^2 - Mv \frac{\partial S^2}{\partial v} \right\}, \\
\frac{\partial y_1}{\partial u} &= \frac{4}{(a^2+b^2)^2 S^4} \left\{ \left(\frac{\partial M}{\partial u} u + M \right) S^2 - Mu \frac{\partial S^2}{\partial u} \right\}, \\
\frac{\partial y_1}{\partial v} &= \frac{4u}{(a^2+b^2)^2 S^4} \left\{ \frac{\partial M}{\partial v} S^2 - M \frac{\partial S^2}{\partial v} \right\}, \\
\frac{\partial z_1}{\partial u} &= \frac{-2}{(a^2+b^2) S^4} \left\{ \frac{\partial M}{\partial u} S^2 - M \frac{\partial S^2}{\partial u} \right\}, \\
\frac{\partial z_1}{\partial v} &= \frac{-2}{(a^2+b^2) S^4} \left\{ \frac{\partial M}{\partial v} S^2 - M \frac{\partial S^2}{\partial v} \right\}.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich leicht die folgenden ableiten:

$$\begin{aligned}
A_1 &= -\frac{8M}{(a^2+b^2)^3 S^6} \left\{ \frac{\partial M}{\partial v} S^2 - M \frac{\partial S^2}{\partial v} \right\}, \\
B_1 &= -\frac{8M}{(a^2+b^2)^3 S^6} \left\{ \frac{\partial M}{\partial u} S^2 - M \frac{\partial S^2}{\partial u} \right\}, \\
C_1 &= -\frac{16M}{(a^2+b^2)^4 S^6} \left\{ \left(M + \frac{\partial M}{\partial u} u + \frac{\partial M}{\partial v} v \right) S^2 - M \left(\frac{\partial S^2}{\partial v} v + \frac{\partial S^2}{\partial u} u \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung

$$V = \tfrac{1}{3}\int_0^v\int_0^u (A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1 z_1)\,du\,dv$$

erhalten wir

$$V = \frac{32}{3}(a^2+b^2)\int_0^v\int_0^u \frac{(2uv+2lv+2mu-n(a^2+b^2))^3}{(4(u^2+v^2)+(a^2+b^2)^2)^3}\,du\,dv.$$

Durch die Entwickelung von $(2uv+2lv+2mu-(a^2+b^2)n^3)$ und gliedweise Integration wird die Kubatur der Wellenfläche reducirt auf die Auswertung von zwanzig Doppelintegralen, deren allgemeine Form die nachstehende ist

$$9)\qquad \int_0^v\int_0^u \frac{u^k v^i\,du\,dv}{(4u^2+4v^2+(a^2+b^2)^2)^3} = I_{k,i},$$

dabei kann sowohl k als i gleich 0, 1, 2, 3 sein.

Sei $a^2+b^2 = c$, so wird die Berechnung der Grössen $I_{k,i}$ vermöge der Formel

$$10)\qquad \int_0^u\int_0^v \frac{u^k v^i\,du\,dv}{(4u^2+4v^2+c^2)^3} = -\frac{1}{4c}\frac{\partial}{\partial c}\int_0^u\int_0^v \frac{u^k v^i\,du\,dv}{(4u^2+4v^2+c^2)^2}$$

$$= -\frac{1}{4c}\,I_{ki}'$$

auf die Auswertung einfacherer Doppelintegrale zurückgeführt.

Wir gelangen zu der folgenden Formel für das gesuchte Volumen

$$11)\qquad V = \frac{32}{3}\left\{\begin{array}{l} 8l^3 I_{0,3} + 8m^3 I_{3,0} - n^3c^3 I_{0,0} + 24l^2m I_{1,2} + 24lm^2 I_{2,1} \\ -12l^2nc I_{0,2} + 6ln^2c^2 I_{0,1} - 12m^2nc I_{2,0} + 6mn^2c^2 I_{1,0} \\ -24lmnc I_{1,1} + 24l^2 I_{1,3} + 24m^2 I_{3,1} + 48lm I_{2,2} - 24lnc I_{1,2} \\ +6n^2c^2 I_{1,1} - 24mnc I_{2,1} + 24l I_{2,3} + 24m I_{3,2} - 12nc I_{2,2} + 8 I_{3,3} \end{array}\right\}$$

in welcher die Grössen I von Null verschiedene positive Werte besitzen.

Aus der Formel der Doppelintegrale geht auch hervor, dass wir von den 20 Grössen $I_{k,i}$ nur 10 auszuwerten brauchen, alle übrigen lassen sich aus ihnen durch Vertauschung der Veränderlichen u und v ableiten.

Wir erhalten:

$$I_{0,3} = \frac{1}{128c}\operatorname{arctg}\frac{2u}{c} - \frac{6v^2+c^2}{128(4v^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{4v^2+c^2}} - \frac{uv^2}{32(4v^2+c^2)(4u^2+4v^2+c^2)}$$

$$\begin{aligned} I_{0,0} = {} & \frac{u}{64vc^2}\,\frac{(12v^2+c^2)(4u^2+c^2)+12v^2(4v^2+c^2)}{(4u^2+4v^2+c^2)(4u^2+c^2)(4v^2+c^2)} \\ & + \frac{c^2}{256v^3(4v^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{4v^2+c^2}} \\ & - \frac{1}{256cv^3}\operatorname{arctg}\frac{2u}{c} + \frac{1}{c^2+z_2^2}\operatorname{arctg}\frac{4vz_2}{c^2+z_2^2} \\ & - \frac{1}{c^2+z_1^2}\operatorname{arctg}\frac{4vz_1}{c^2+z_1^2} \\ & - \frac{1}{2\sqrt{4v^2+c^2}}\left\{\begin{aligned} & \frac{1}{R_1}\,\frac{c^2+R_1^2}{c^2-R_1^2}\operatorname{arctg}\frac{R_1(z_2-z_1)}{R_1^2+z_2z_1} \\ & -\frac{1}{R_2}\,\frac{c^2+R_2^2}{c^2-R_2^2}\operatorname{arctg}\frac{R_2(z_2-z_1)}{R_2^2+z_2z_1} \\ & -\frac{2c(R_1^2-R_2^2)}{(c^2-R_1^2)(c^2-R_2^2)}\operatorname{arctg}\frac{c(z_2-z_1)}{c^2+z_2z_1} \end{aligned}\right\} \end{aligned}$$

Dabei ist zu setzen

$$R_1 = \sqrt{4v^2+c^2}-2v, \quad R_2 = \sqrt{4v^2+c^2}+2v$$
$$z_1 = c, \qquad z_2 = \sqrt{4u^2+c^2}-2u.$$

$$I_{1,2} = \frac{1}{32}\left\{\frac{1}{8c}\operatorname{arctg}\frac{2v}{c} - \frac{1}{8\sqrt{4u^2+c^2}}\operatorname{arctg}\frac{2v}{\sqrt{4u^2+c^2}} - \frac{vu^2}{(4v^2+c^2)(4u^2+4v^2+c^2)}\right\},$$

$$\begin{aligned} I_{0,2} = {} & \frac{1}{256\,cv}\operatorname{arctg}\frac{2u}{c} - \frac{c^2+8v^2}{256\,v(4v^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{4v^2+c^2}} \\ & - \frac{uv}{32(4v^2+c^2)(4u^2+4v^2+c^2)} \\ & + \frac{1}{64}\left(\frac{1}{c^2+z_2^2}\operatorname{arctg}\frac{4vz_2}{c^2+z_1^2} - \frac{1}{c^2+z_1^2}\operatorname{arctg}\frac{4vz_1}{c^2+z_1^2}\right) \end{aligned}$$



$$- \frac{1}{128\sqrt{4v^2+c^2}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{R_1} \dfrac{c^2+R_1^2}{c^2-R_1^2} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{R_1(z_2-z_1)}{R_1^2-z_2 z_1} \\ - \dfrac{1}{R_2} \dfrac{c^2+R_2^2}{c^2-R_1^2} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{R_2(z_2-z_1)}{R_2^2-z_2 z_1} \\ + \dfrac{2c(R_2^2-R_1^2)}{(c^2-R_2^2)(c^2-R_1^2)} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{c(z_2-z_1)}{c^2-z_2 z_1} \end{array} \right\}$$

$$I_{21} = \frac{1}{64c} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{8uv^2(4u^2+4v^2+2c^2)}{c(4v^2+c^2)(4u^2+c^2)(4u^2+4v^2+c^2)} \\ + \dfrac{1}{c^2} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2u}{c} - \dfrac{c}{(4v^2+c^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2}{\sqrt{4v^2+c^2}} \end{array} \right\}$$

$$I_{11} = \frac{u^2 v^2 (2u^2+2v^2+c^2)}{4c^2(4v^2+c^2)(4u^2+c^2)(4u^2+4v^2+c^2)},$$

$$I_{12} = \frac{1}{512} \log \frac{(4u^2+c^2)(4v^2+c^2)}{c^2(4u^2+4v^2+c^2)} - \frac{u^2 v^2}{32(4u^2+c^2)(4u^2+4v^2+c^2)},$$

Das Integral I_{22} lässt sich nicht vollständig durch die algebraischen Functionen, den Logarithmus und die Arcustangente darstellen, sondern führt auf transcendente Functionen anderer Art.

$$\begin{aligned} I_{22} = & \frac{c^2}{1024v\sqrt{4v^2+c^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{\sqrt{4v^2+c^2}} + \frac{uv}{128(4u^2+4v^2+c^2)} \\ & - \frac{c}{1024v} \operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{c} \\ & + \frac{1}{512} \left\{ \left(\log z_1 + \frac{2c^2}{c^2+z_1^2} \right) \operatorname{arc\,tg} \frac{4vz_1}{c^2+z_1} \right. \\ & \left. - \left(\log z_2 + \frac{2c^2}{c^2+z_2^2} \right) \operatorname{arc\,tg} \frac{4vz_2}{c^2+z_2} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{c^2}{512\sqrt{4v^2+c^2}} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{R_1^2} \dfrac{c^2+R_1^2}{c^2-R_1^2} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{R_1(z_2-z_1)}{R_1^2-z_2 z_1} \\ - \dfrac{1}{R_2^2} \dfrac{c^2+R_2^2}{c^2-R_1^2} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{R_2(z_2-z_1)}{R_2^2-z_2 z_1} \\ - \dfrac{2c(R_1^2-R_2^2)}{(c^2-R_1^2)(c^2-R_2^2)} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{c(z_2-z_1)}{c^2-z_2 z_1} \end{array} \right\}$$

$$+ \frac{1}{1024\sqrt{4v^2+c^2}} \left\{ (c^2+R_1^2) \int_{z_1}^{z_2} \frac{\log z\, dz}{z^2+R_1^2} - (c^2+R_2^2) \int_{z_1}^{z_2} \frac{\log z\, dz}{z^2+R_2^2} \right\}.$$

Die Transcendenten $\int_{z_1}^{z_2} \frac{\log z\, dz}{z^2+R_1^2}$, $\int_{z_1}^{z_2} \frac{\log z\, dz}{z^2+R_2^2}$ lassen sich für die Grenzen 0 und 1 auf eine einfache Gestalt reduciren[36]), doch ist es leicht einzusehen, dass für u und v keine Werte gefunden werden können, der Art, dass $z_1 = 1$ und zugleich $z_2 = 0$ wird.

Es ergiebt sich ferner:

$$I_{2,3} = \frac{c^2+2v^2}{512\sqrt{4v^2+c^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{\sqrt{4v^2+c^2}} - \frac{c}{512} \operatorname{arc\,tg} \frac{2u}{c} + \frac{uv^2}{128(4u^2+4v^2+c^2)}$$

$$I_{3,3} = \frac{u^2v^2}{128(4u^2+4v^2+c^2)} + \frac{c^2}{2048} \log\operatorname{nat} \frac{(4v^2+c^2)(4u^2+c^2)}{(4u^2+4v^2+c^2)c^2}.$$

Alle übrigen Coefficienten I lassen sich aus den aufgestellten unmittelbar herleiten, dann aber ergiebt sich aus 11) der Lehrsatz:

I. Der geometrische Ort der Pole, zu denen ein und dasselbe Volumen der Wellenfläche gehört, die einem endlichen Oberflächenstück des hyperbolischen Paraboloides entspricht, ist eine Oberfläche dritter Ordnung; und dessen Umkehrung.

II. Bewegt sich das in der früher definirten Weise begrenzte Oberflächenstück des hyperbolischen Paraboloides so, dass erstens die begrenzenden Linien sich stets parallel bleiben, dass ferner der Schnittpunkt derjenigen Geraden, die der X- und Y-Axe resp. gleichgerichtet sind, auf einer Oberfläche dritter Ordnung $V =$ Const gleitet, so sind die Volumina der entsprechenden auf den Coordinatenanfang bezogenen Wellenflächen einander gleich.

Durch die complicirte Form der Grössen I und namentlich durch den Umstand, dass das Doppelintegral $I_{2,2}$ auf eine transcendente Function führt, wird es unmöglich, in ähnlicher Weise wie bei den vorhergehenden Flächen eine grössere Reihe von Lehrsätzen aufzustellen. Immerhin aber dürften die Untersuchungen die Theorie der Fusspunktflächen etwas weiter geführt und in eigentümlicher Weise beleuchtet haben.

Zum Schlusse kann ich nicht umhin, eine angenehme Pflicht zu erfüllen, es auszusprechen, dass die lebhafteste Anregung und dauernde Hilfe mir aus dem Interesse erwuchs, dass Herr Prof. Krause, dem ich an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank sage, der vorliegenden Arbeit entgegenbrachte.

36) cf. Bertrand, Calcul différentiel et intégral.

XIII.

Erweiterung einiger Sätze der Flächentheorie auf *n* Dimensionen.

Von

R. Hoppe.

Unter dem Titel: Einfachste Sätze aus der Theorie der mehrfachen Ausdehnungen — habe ich in T. LXIV. S. 189. mehrere solche, grösstenteils fundamentale Sätze zusammengestellt, die ohne wesentliche Aenderung der Form durch Erweiterung aus der Euklidischen Geometrie auf beliebig viele Dimensionen übertragen werden können. Diesen Aufsatz betrachtete ich als Anfang einer Sammlung offen für weitere Vermehrung. Später habe ich einige Themata behandelt, welche Beiträge dazu enthalten. Der Satz „über den Winkel von n Dimensionen“, T. LXVI. S. 448, gehört dahin, obgleich die entsprechenden Sätze in der Ebene und im Raume nicht vorher bekannt waren. Dasselbe gilt von den „drei Sätzen für Inhaltsberechnung in der Mehr-Dimensionen-Geometrie“, T. LXIX. S. 3. 385. Der Aufsatz T. LXVII. S. 29. enthält die Erweiterung des Euler'schen Satzes von den Polyedern auf n Dimensionen aufgestellt und so bewiesen für 4 Dimensionen, dass der allgemeine Beweis daraus ersichtlich ist. Noch sind dahin zu rechnen die Sätze, welche sich auf die 3 Reihen von regelmässigen linear begrenzten Figuren beziehen und für jede Anzahl > 2 von Dimensionen gelten.

Im Folgenden füge ich einige Sätze hinzu, deren erster zwar, wie manche andre, bekannt ist, der aber gerade um seiner bekannten Bedeutung willen, nach gleichen Grundsätzen wie die vorhergehenden

fundamentalen Sätze behandelt zu werden verdient. Einige von diesen Grundsätzen mögen hervorgehoben werden, weil sie nicht von allen Bearbeitern gleichmässig beobachtet zu werden pflegen. Die Mehrdimensionengeometrie ruht auf Euklidischer Grundlage. Jede Ueberschreitung des Euklidischen Gebietes stützt sich auf analytische Rechnung derselben Form, in welcher sie durch ihre Euklidisch geometrische Bedeutung realisirt wird, derart dass jedes in mehrdimensionalen Gebilden enthaltene linear dreidimensionale Gebilde der Euklidischsn Geometrie entsprechen muss. Irgend ein alle betrachteten Gebilde umfassendes Gebilde muss als linear vorausgesetzt werden; nur relativ zu diesem haben die geometrischen Bestimmungen einen Sinn.

Was die Terminologie betrifft, so sind mehrdeutige Ausdrücke zu verwerfen. Das Wort Raum ist bereits mehrdeutig in vulgärem Gebrauch; um so mehr ist Grund den Euklidischen Sinn festzuhalten und keine Erweiterung zuzulassen. Den Ort eines mit n Parametern variirenden Punktes habe ich eine n dehnung genannt. Wird er allein durch lineare Gleichungen zwischen den Coordinaten bestimmt, so heisst die n dehnung linear. Durch letzteres Wort wird also das Analogon zum Attribut eben benannt, welches gleichfalls nicht in weiterem Sinne gebraucht werden sollte. Der Raum ist dann eine unbegrenzte lineare Dreidehnung und hört bei Ueberschreitung der Dreizahl der Dimensionen auf ein einziger zu sein, wie es beim Uebergang von der Planimetrie zur Stereometrie mit der Ebene der Fall ist.

I.

Unsere erste Aufgabe wird sein, die Krümmung einer n dehnung in einer linearen $(n+1)$ dehnung analytisch darzustellen.

Der von Gauss definirte Begriff der Krümmung einer Fläche lässt sich unmittelbar auf beliebige Dimensionszahl übertragen. Wir ziehen in gleicher Richtung mit der Normale der n dehnung N im Punkte x eine Gerade vom Anfangspunkt von der Länge $= 1$. Der Ort des Endpunktes sei P. Erzeugt der Punkt x das Element ∂N, und gleichzeitig jener Endpunkt das Element ∂P, so ist der Quotient

$$\frac{\partial P}{\partial N}$$

der Ausdruck der Krümmung von N im Punkte x.

Die Coordinaten eines Punktes von N seien

$$x, \quad x_1, \quad \ldots \quad x_n$$



Die Gleichungen einer Tangente an N im Punkte x sind:

$$\xi = x + R\frac{\partial x}{\partial s}; \quad \text{etc.}$$

Erzeugt nun der Punkt x die $n$dehnung bei Variation der n Parameter $u_1, u_2, \ldots u_n$, so wird

$$\xi = x + R\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial s} + \ldots \frac{\partial x}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial s}\right); \quad \text{etc.}$$

woraus nach Elimination der $\partial u_1, \partial u_2, \ldots \partial u_n$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial u_n} & \xi - x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0 \tag{1}$$

das ist die Gleichung einer linearen $n$dehnung, welche N berührt. Die Coefficienten der ξ sind proportional ihren Richtungscosinus p, $p_1, \ldots p_n$, welche zugleich Richtungscosinus ihrer Normale sind. Man hat also:

$$tp_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \tag{2}$$

Projicirt man nun das Element ∂N auf die lineare $n$dehnung $x_n = 0$, so ist nach bekanntem Ausdruck für das Element einer linearen $n$dehnung die Projection (u. a. bewiesen in T. LXIV. S. 197)

$$p_n \partial N = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n$$

folglich

$$\partial N = t\partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n \tag{3}$$

Der Construction zufolge sind nun $p, p_1, \ldots p_n$ zugleich die Coordinaten des Punktes, welcher P erzeugt, und die Richtungscosinus der Normale von P. Wendet man also die vorigen Gleichungen auf die $n$dehnung P an, so erhält man, entsprechend (2):

$$qp_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial p}{\partial u_1} & \frac{\partial p}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial p}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \tag{4}$$

und entsprechend (3):

$$\partial P = q\partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n \tag{5}$$

daher ist die gesuchte Krümmung:

$$K = \frac{\partial P}{\partial N} = \frac{q}{t} \tag{6}$$

Sei nun

$$\frac{\partial p_k}{\partial u_h} = A_{h1}\frac{\partial x_k}{\partial u_1} + A_{h2}\frac{\partial x_k}{\partial u_2} + \dots A_{hn}\frac{\partial x_k}{\partial u_n} \tag{7}$$

Multiplicirt man mit $\frac{\partial x_k}{\partial u_g}$, summirt von $k = 0$ bis $k = n$ und setzt

$$e_{fg} = \Sigma\frac{\partial x_k}{\partial u_f}\frac{\partial x_k}{\partial u_g} = e_{gf} \tag{8}$$

$$E_{fg} = \Sigma p\frac{\partial^2 x_k}{\partial f\,\partial g} = E_{gf}$$

so kommt:

$$-E_{gh} = A_{h1}e_{g1} + A_{h2}e_{g2} + \dots A_{hn}e_{gn} \tag{10}$$

$$g = 1,\ 2,\ \dots\ n$$

Dies Gleichungssystem aufgelöst gibt:

$$A_{hf}\,\Delta = -v_{1f}E_{1h} - v_{2f}E_{2h} - \dots - v_{nf}E_{nf} \tag{11}$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{vmatrix} \tag{12}$$

und v_{gf} als Unterdeterminante dem Element e_{gf} entspricht.

Führt man jetzt die Werte (7) in die Determinante (4) ein, so zerfällt sie in das Product:

$$qp_n = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Der zweite Factor der Rechten ist nach Gl. (2) $= tp_n$, folglich der erste nach Gl. (6) $= K$.

Führt man in diesen wieder die Werte (11) ein, so zerfällt die Determinante der A nochmals in ein Product, nämlich:

$$K\Delta^n = (-1)^n \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{n1} & E_{n2} & \dots & E_{nn} \end{vmatrix}$$

Die Determinante der v ist, als adjungirte der Determinante (12), $= \Delta^{n-1}$, folglich

$$K = (-1)^n \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{n1} & E_{n2} & \dots & E_{nn} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{vmatrix} \qquad (13)$$

Hiermit ist die Krümmung in Elementen ausgedrückt, die von der Lage der Coordinatenaxen unabhängig sind, ohne dass vorher t und q in ebensolchen Elementen dargestellt waren. Man kann jetzt nachträglich nach dieser Darstellung fragen.

Wir wenden dazu Gl. (2) für beliebiges p in der Form an:

$$tp_k = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x}{\partial u_n} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{\partial x_k}{\partial u_1} & \frac{\partial x_k}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_k}{\partial u_n} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{vmatrix}$$

Dies ins Quadrat erhoben, gibt mit Anwendung der Gl. (8):

$$t^2 p_k^2 = \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} & \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} & \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} & \frac{\partial x_k}{\partial u_n} \\ \frac{\partial x_k}{\partial u_1} & \frac{\partial x_k}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial x_k}{\partial u_n} & 1 \end{vmatrix}$$

Entwickelt man die Determinante nach Elementen der letzten Verticalreihe, fügt jedes solche Element, z. B. $\frac{\partial x_k}{\partial u_h}$, der letzten Horizontalreihe als Factor zu, summirt dann das Ganze von $k = 0$ bis $k = n$, so wird diese letzte Horizontalreihe $e_{h1}\ e_{h2} \dots e_{hn}$, ergänzt also die Determinante Δ, welche stets mit negativem Vorzeichen erscheint; nur der letzte Term der Entwickelung, zum Element 1 gehörig, ist unmittelbar $= \Delta$ und gibt nach Summation $(n+1)\Delta$; davon die n übrigen Terme $= \Delta$ subtrahirt gibt:

$$t^2 = \Delta$$

Da nun nach Gl. (3) t stets reell ist, so folgt, dass Δ immer positiv ist, und man hat:

$$t = \pm \sqrt{\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{vmatrix}} \tag{14}$$

Nach Gl. (6) ist

$$q = tK$$

also nach Einsetzung des Wertes (13) für K:

$$q = \pm \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{n1} & E_{n2} & \dots & E_{nn} \end{vmatrix} : \sqrt{\begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \dots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \dots & e_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{n1} & e_{n2} & \dots & e_{nn} \end{vmatrix}} \tag{15}$$

II.

Der Satz, dass die Hauptnormale einer kürzesten Linie auf einer Fläche im Raume mit der Normale der Fläche zusammenfällt, gilt nicht nur in Erweiterung auf die $n$dehnung, sondern bedarf auch keiner neuen Herleitung, da der gewöhnliche Beweis (T. LIX. S. 266) auf beliebig viele Dimensionen anwendbar ist. Wir können daher als bewiesen voraussetzen:

„Die zweiten Differentialquotienten der Coordinaten eines Punktes „auf einer $n$dehnung in einer linearen $(n+1)$dehnung nach dem „Bogen einer kürzesten Linie auf ihr verhalten sich wie Richtungs- „cosinus ihrer Normale".

Durch $\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$ und die Anfangswerte von x und $\frac{\partial x}{\partial s}$ sind die x bestimmt. Die so bestimmte Curve ist es dann, die wir hier unter einer Kürzesten verstehen.

Im folgenden soll das Analogon eines zweiten Satzes von den Kürzesten hergeleitet werden. Zunächst sind die partiellen Differentialquotienten 2. Ordnung von x auf die 1. Ordnung und auf p zurückzuführen, unter der Voraussetzung orthogonaler Parameter. Wir nehmen an, dass die Linien, welche der Punkt x bei Variation je eines Parameters beschreibt, in rechten Winkeln von ihm ausgehen, dass also

$$e_{kh} = 0 \quad \text{für} \quad k \gtrless h$$

und der Kürze wegen $e_{kk} = e_k$ sei, und setzen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_h} = \sum_\mu B_{kh\mu} \frac{\partial x}{\partial u_\mu} + C_{kh} p \tag{16}$$

Multiplicirt man mit p, substituirt die übrigen x und p und summirt, so erhält man:

$$E_{kh} = C_{kh}$$

Multiplicirt man statt dessen mit $\frac{\partial x}{\partial u_g}$, so gibt die Summe:

$$\Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_h} \frac{\partial x}{\partial u_g} = \sum_\mu B_{kh\mu} e_{g\mu} = B_{khg} e_g$$

woraus durch Vertauschung von k, h, g:

$$\Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u_h \partial u_g} \frac{\partial x}{\partial u_k} = B_{hgk} e_k$$

$$\Sigma \frac{\partial^2 x}{\partial u_g \partial u_k} \frac{\partial x}{\partial u_h} = B_{gkh} e_h$$

Addirt man je 2 dieser 3 Gleichungen, so kommt:

$$\frac{\partial e_{kh}}{\partial u_g} = B_{hgk} e_k + B_{gkh} e_h$$

$$\frac{\partial e_{hg}}{\partial u_k} = B_{gkh} e_h + B_{khg} e_g$$

$$\frac{\partial e_{gk}}{\partial u_h} = B_{khg} e_g + B_{hgk} e_k$$

Für ungleiche k, h, g sind die Linken null, folglich allgemein:

$$B_{kgh} = 0 \text{ für ungleiche } k, h, g$$

Sei $k = h \gtrless g$; dann erhält man:

$$B_{kgk} = B_{gkk} = \frac{1}{2e_k} \frac{\partial e_k}{\partial u_g}; \quad B_{kkg} = -\frac{1}{2e_g} \frac{\partial e_k}{\partial u_g} \tag{17}$$

endlich für $k = h = g$

$$B_{kkk} = \frac{1}{2e_k} \frac{\partial e_k}{\partial u_k}$$

Seien nun 2 Scharen von Parameterlinien entsprechend u_μ und u_ν Kürzeste., also e_μ nur Function von u_μ, und e_ν nur von u_ν. Dann ist auf einer Fläche, erzeugt bei Variation von u_μ und u_ν, das Linienelement

$$\partial s = \sqrt{e_\mu \partial u_\mu^2 + e_\nu \partial u_\nu^2}$$

allgemein gleich dem auf einer Ebene, daher jene Fläche (Parameterfläche) auf der Ebene abwickelbar. Das Ergebniss lautet:

„In einem System orthogonaler Parameterlinien können nur dann „2 Scharen Kürzeste sein, wenn die von ihnen erzeugte Fläche auf „der Ebene abwickelbar ist."

Ist ferner die Parameterlinie (u_μ) Kürzeste, so ist ein Bogen von ihr

$$s_1 - s_0 = \int_{u_{\mu 0}}^{u_{\mu 1}} \sqrt{e_\mu}\, \partial u_\mu$$

unabhängig von allen übrigen Parametern, bleibt daher von constanter Länge, wenn man ihn mit einem oder mehreren andern Parametern längs N variiren lässt. Da er aber den kürzesten normalen Abstand der 2 Orte seiner Endpunkte misst, so folgt der Satz:

„Besteht eine Schar Parameterlinien eines orthogonalen Systems „aus Kürzesten, so bestehen alle übrigen Scharen aus Äquidistanten „(geodätischen Parallelen)."

Eine zweite Anwendung der Formeln (18) (19) ist die folgende. Eliminirt man durch partielle Differentiation die linken Seiten, führt die entstehenden Differentialquotienten 2. Ordnung mittelst der Formeln (18) (19) und (7), welche letztere für orthogonale Parameter lautet:

$$\frac{\partial p}{\partial u_h} = -\sum_\mu \frac{E_{h\mu}}{e_\mu} \frac{\partial x}{\partial u_\mu} \tag{21}$$

auf erste Ordnung zurück und vergleicht die Coefficienten $\frac{\partial x}{\partial u_k}$, $\frac{\partial x}{\partial u_h}$, $\frac{\partial x}{\partial u_\mu}$ (wo k, h, μ als ungleich anzunehmen sind), so erhält man im ersten Falle eine identische Gleichung, in den beiden andern aber die Formeln:

$$\begin{vmatrix} E_{kk} & F_{hk} \\ E_{kh} & E_{hh} \end{vmatrix} = \frac{1}{2e_k}\frac{\partial e_k}{\partial u_k}\frac{\partial e_h}{\partial u_k} + \frac{1}{2e_h}\frac{\partial e_h}{\partial u_h}\frac{\partial e_k}{\partial u_h}$$
$$+ \frac{1}{4e_k}\left(\frac{\partial e_k}{\partial u_h}\right)^2 + \frac{1}{4e_h}\left(\frac{\partial e_h}{\partial u_k}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_k}{\partial u_h^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_h}{\partial u_k^2}$$
$$- \sum_\mu \frac{1}{4e_\mu}\frac{\partial e_k}{\partial u_\mu}\frac{\partial e_h}{\partial u_\mu} \qquad \left(k \gtrless h\right) \tag{22}$$

$$\begin{vmatrix} E_{kk} & E_{\mu k} \\ E_{kh} & E_{\mu h} \end{vmatrix} = \frac{1}{4e_\mu}\frac{\partial e_k}{\partial u_\mu}\frac{\partial e_\mu}{\partial u_h} + \frac{1}{4e_h}\frac{\partial e_k}{\partial u_h}\frac{\partial e_h}{\partial u_\mu} + \frac{1}{4e_k}\frac{\partial e_k}{\partial u_h}\frac{\partial e_k}{\partial u_\mu}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e_k}{\partial u_h \partial u_h} \qquad (k,\ h,\ \mu \text{ ungleich}) \tag{23}$$

Alle n dehnungen nun, die in denselben Parametern dargestellt in den Grössen e übereinstimmen, sind offenbar auf einander abwickelbar, weil die entsprechenden Linienelemente auf allen gleich sind. Auch ist das Umgekehrte leicht ersichtlich. Die Gl. (22) (23) zeigen also, dass alle auf einander abwickelbare n dehnungen in den Grössen

$$\begin{vmatrix} E_{kk} & E_{hk} \\ E_{kh} & E_{hh} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} E_{kk} & E_{\mu k} \\ E_{kh} & E_{\mu h} \end{vmatrix} \tag{24}$$

für ungleiche k, h, μ, wenn sie in denselben orthogonalen Parametern dargestellt sind, mithin in

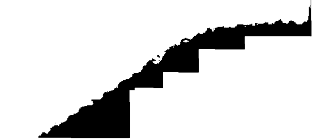
$$\tfrac{1}{2}n(n-1) + \tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2) = \tfrac{1}{2}(n+1)n(n-1)$$

Complexen 2. Grades der Grössen E übereinstimmen.

Dies ist in der Tat eine Erweiterung ohne Aenderung der Form und Herleitung eines Satzes der Flächentheorie in zweierlei Hinsicht: erstens sofern die Gl. (22) einer Gleichung von Gauss unmittelbar analog ist, zweitens sofern die Uebereinstimmung der erstern Determinante im Falle der Abwickelbarkeit auf allen n dehnungen ebenso gilt wie auf Flächen.

Keine Analogie hingegen ergibt sich in zwei andern Beziehungen Erstens ist für $n = 2$, d. h. auf Flächen, die Determinante (22) der Dividend im Ausdruck der Krümmung (13), deren Divisor nur von den e abhängt. Dies gilt für grössere n nicht mehr, und die Gl. (22) (23) sind überhaupt unzureichend den Satz darzutun, dass auch die Krümmung auf einander abwickelbarer n dehnungen gleich ist. Zweitens kann man auf Flächen aus der Krümmung als Invariante schliessen, dass jene Determinante von den Parametern unabhängig ist, was nun für $n > 2$ nicht mehr geschlossen werden kann.

Näheres findet man hierüber, indem man die Gl. (18) nach u_g differentiirt, wo k, h, g ungleich sind. Die linke Seite ist dann symmetrisch; daher bleibt sich die rechte bei jeder Vertauschung von k, h, g gleich. Unter den 6 gleichen Ausdrücken sind nur zwei nicht identische. Vergleicht man die Coefficienten von $\frac{\partial x}{\partial u_k}$, $\frac{\partial x}{\partial u_h}$ und $\frac{\partial x}{\partial u_g}$, so findet man die Relation (23) wieder. Nur die Coefficienten von $\frac{\partial x}{\partial u_\mu}$, wo μ von k, h, g verschieden, ergeben eine neue Relation, nämlich



$$E_{kh} E_{g\mu} = E_{hg} E_{k\mu} = E_{kg} E_{h\mu}$$

Hiernach ist für irgend 4 ungleiche Indices k, h, g, μ

$$\begin{vmatrix} E_{kh} & E_{gh} \\ E_{k\mu} & E_{g\mu} \end{vmatrix} = 0 \tag{25}$$

Die 3 Determinanten (24) (25) erschöpfen die möglichen Formen der in

$$D = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E_{n1} & E_{n2} & \dots & E_{nn} \end{vmatrix} \tag{26}$$

enthaltenen Unterdeterminanten 2. Grades. Ist daher n gerade, so lässt sich D in lauter solchen Determinanten darstellen, die teils null, teils Functionen der e und ihrer Derivirten sind. Für gerade n ist demnach auch die Krümmung von N Function der e und ihrer Derivirten und bleibt bei Biegung von N unverändert. Ferner ist D unabhängig von den Parametern.

Ist n ungerade, so hat D die Form

$$D = \sum_{\mu} \varepsilon_{k\mu} E_{k\mu}$$

wo die ε Functionen der e und ihrer Derivirten sind.

Setzt man ferner

$$\begin{vmatrix} E_{kk} & E_{\mu k} \\ E_{kh} & E_{\mu h} \end{vmatrix} = d_{kh\mu} \tag{27}$$

so ist vermöge der Gl. (25)

$$\frac{d_{kh\mu}}{d_{kg\mu}} = \frac{E_{\mu h}}{E_{\mu g}}$$

Demnach sind die Quotienten aller E von ungleichen Indices Functionen der e und ihrer Derivirten, und man kann setzen:

$$E_{kh} = d_{kh} E_{12} \quad \left(k \gtrless h\right)$$

Dann gibt Gl. (27):

$$E_{kk} = \frac{d_{kh}\, d_{\mu k}}{d_{\mu h}} E_{12} + \frac{d_{kh\mu}}{d_{\mu h} E_{12}}$$

Folglich hat D für ungerade n die Form:

$$D = dE_{12} + \frac{d_0}{E_{12}}$$

wo d, d_0 bei Biegung von N unverändert bleiben, während E_{12} variiren muss, weil sonst alle E und e, somit die $n$dehnung selbst unverändert bliebe. Es hat sich ergeben:

„Für gerade n bleibt die Krümmung einer $n$dehnung bei deren „Biegung unverändert, für ungerade n nicht."

Eine kurze Zusammenstellung der Resultate ergibt:

1. Die Krümmung einer $n$dehnung N in einer linearen $(n+1)$dehnung hat den Wert (13).

2. Das Element ∂N dividirt durch die Differentiale der Parameter hat den Wert (14).

3. Das Element der Indicatrix der Normale von N durch dasselbe Product dividirt hat den Wert (15).

4. Die Krümmung von N bleibt für gerade n bei Biegung constant; desgl. die Determinante (26) nebst allen Unterdeterminanten geraden Grades.

5. Die Hauptnormale einer Kürzesten auf N ist zugleich Normale von N.

6. Die partiellen Differentialquotienten 2. Ordnung der Coordinaten haben für orthogonale Parameter die Werte (18) (19).

7. Ist für orthogonale Parameter ein Coefficient im Ausdruck des Linienelements nur Function des zugehörigen Parameters, so ist die entsprechende Parameterlinie Kürzeste, und umgekehrt.

8. Der zweite Differentialquotient einer Coordinate nach dem Bogen einer Linie auf N hat den Wert (20).

9. In einem System orthogonaler Parameterlinien können nur dann 2 Scharen Kürzeste sein, wenn die von ihnen erzeugte Fläche abwickelbar ist.

10. Besteht eine Schar Parameterlinien eines orthogonalen Systems aus Kürzesten, so bestehen alle übrigen Scharen aus Aequidistanten.

XIV.

Ueber Variation von Geraden, die an eine Fläche geknüpft sind.

Von

R. Hoppe.

---

§. 1.

Das Folgende schliesst sich an eine Arbeit von P. Jssoly: Sur les diverses courbures des lignes qu'on peut tracer sur une surface. Nouv. Ann. III. p. 522 — 7 — an. Diese geht von der Betrachtung einer variabeln Linie S auf einer Fläche aus, durch welche zunächst 3 orthogonale Gerade, die Tangente an S, die Tangente an die orthogonale Trajectorie Σ und die Flächennormale, bestimmt sind. Nun findet der Verfasser das Wort Krümmung schon in mehrfachem Sinne in Gebrauch, ausser der Krümmung der Curve im Raume wird ihre geodätische Krümmung auf der Fläche in Betracht gezogen, vielleicht auch Krümmungen in manchem andern Sinne. Er geht auf diesem Wege weiter und entdeckt manche interessante Beziehungen zwischen den Grössen, die der Krümmung analog, den Winkel zwischen den consecutiven Geraden messen. In der Tat kann man jede variabele Gerade als Parallele der Tangente einer Curve ansehen. Die Krümmung dieser Curve hängt dann ausserdem von dem willkürlichen Linienelement ab. Als solches wählt Jssoly gemeinsam für alle Geraden ∂S. Die Geraden sind zuerst die 3 genannten; eine Vermehrung ergibt sich durch Projection der Curven nebst ihren Tangenten auf 2 orthogonale Ebenen, die durch jene Geraden gehen.

Die analytische Ausführung ist nicht angegeben, doch lässt sich leicht eine allgemeine Formel dafür aufstellen. Wir geben die Coor-

dinaten und Gleichungen nur in Bezug auf eine Axe, die x Axe an. Die Projection x_1 eines Punktes x auf eine Ebene

$$\Sigma b x = 0 \tag{1}$$

hat die Coordinate:

$$x_1 = x - b\,\Sigma b x$$

woraus:

$$\partial x_1 = \partial x - b\,\Sigma b\,\partial x$$

Ist x ein Punkt einer Curve s, so findet man:

$$\partial s_1^2 = \Sigma \partial x_1^2 = \partial s^2 - (\Sigma b\,\partial x)^2$$

daher

$$\frac{\partial x_1}{\partial s_1} = \frac{\frac{\partial x}{\partial s} - b\Sigma b\,\frac{\partial x}{\partial s}}{\sqrt{1 - \left(\Sigma b\,\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2}} \tag{2}$$

Da hierauf eine Parallelverschiebung keinen Einfluss hat, so kann man statt der Tangente eine beliebige Gerade setzen, deren Richtungscosinus a sei; dann wird in der Projection für a

$$a_1 = \frac{a - b\,\Sigma b a}{\sqrt{1 - (\Sigma b a)^2}}$$

Dies bei constanten b differentiirt gibt:

$$\partial a_1 = \frac{[1 - (\Sigma ba)^2]\partial a - (b - a\Sigma ba)\Sigma b\,\partial a}{[1 - (\Sigma ba)^2]^{\frac{3}{2}}} \tag{3}$$

Die Summe der Quadrate der Analogen ist:

$$\Sigma \partial a_1^2 = \left\{\Sigma \partial a^2 - \frac{(\Sigma b\,\partial a)^2}{[1 - (\Sigma ba)^2]}\right\} : [1 - (\Sigma ba)^2] \tag{4}$$

Die Quadratwurzel hieraus ist das Differential des Drehungswinkels der auf die beliebige feste Ebene (1) projicirten Geraden. Um die von Jssoly für alle Fälle untersuchte Grösse, die wir den **Drehungsquotienten** einer Geraden nennen wollen, zu finden, hat man jene Quadratwurzel durch ∂S zu dividiren.

Bei allen in der citirten Schrift vorkommenden Anwendungen ist die Ebene (1) eine solche, die durch die momentane primitive Gerade geht, so dass stets

$$\Sigma ba = 0$$

ist, wo zwar b mit a variirt, aber bei der Operation (3) als constant zu denken ist. Hiernach vereinfacht sich die Formel zu

$$\Sigma \partial a_1^2 = \Sigma \partial a^2 - (\Sigma b \partial a)^2 \tag{5}$$

§. 2.

Wir werden von folgenden kinematischen Formeln Gebrauch machen.

Variirt eine Gerade

$$\xi = \alpha + aw$$

wo a ihr Richtungscosinus, so ist das Differential ihres Drehungswinkels

$$= \sqrt{\Sigma \partial a^2}$$

Bezeichnet a_1 den Richtungscosinus ihrer momentanen Rotationsaxe, so ist

$$\begin{vmatrix} a & a' & a_1 \\ . & . & . \end{vmatrix} = 1 \tag{6}$$

wo

$$a' = \frac{\partial a}{\sqrt{\Sigma \partial a^2}} \tag{7}$$

den Richtungscosinus der momentanen Bewegung der Geraden, d. h. eines Lotes auf die Gerade in einer der consecutiven Geraden parallelen Ebene, darstellt. Aus a und a' wird a_1 in Determinantenform gefunden.

Der Drehpunktsabstand, d. i. die Strecke vom Punkte α bis zur momentanen Rotationsaxe, ist

$$= -\frac{\Sigma \partial a \partial \alpha}{\Sigma \partial a^2} \tag{8}$$

Die Gleitung der Geraden längs der Rotationsaxe oder ihr normaler Abstand von der Consecutiven ist

$$= \begin{vmatrix} a & a' & \partial \alpha \\ . & . & . \end{vmatrix} \tag{9}$$

Die Variationen der Richtungscosinus sind:

$$\partial a_1 = -\Delta \partial a, \quad \partial a' = (\Delta a_1 - a)\sqrt{\Sigma \partial a^2} \tag{10}$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ . & . & . \end{vmatrix}$$

§. 3.

Die Figur, an welche sich unsere Betrachtung knüpft, besteht aus einem System zweier orthogonal sich schneidender Curvenscharen, die wir der Einfachheit wegen zu Parameterlinien der u und

v nehmen, auf einer Fläche und den folgenden dadurch bestimmten Systemen von Geraden.

Vom Flächenpunkte O aus gehen die Tangenten OT, OH an die Parameterlinien der u und v und die Flächennormale ON.

Bei Variation von u und v ist das erzeugte Linienelement

$$= \sqrt{e\,\partial u^2 + g\,\partial v^2}$$

Die Parameterlinienelemente also sind

$$\sqrt{e}\,\partial u, \quad \sqrt{g}\,\partial v$$

Bei Variation von u allein mögen die Richtungen der momentanen Rotationsaxen von OT, OH, ON sein OT_1, OH_1, ON_1 und ihre Bewegungsrichtungen, normal zu beiden, OT_2, OH_2, ON_2, so dass von O aus die 4 Systeme orthogonaler Geraden gehen:

$$THN, \quad TT_1T_2, \quad HH_1H_2, \quad NN_1N_2.$$

Die Richtungscosinus von OT, OH, ON (gegen die x Axe) seien bezeichnet durch m, n, p; ferner sei

$$E = \Sigma p \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}; \quad F = \Sigma p \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} \tag{11}$$

$$t = \sqrt{eg}$$

Wir betrachten nun die Variationen jener 9 Geraden bei Verschiebung des Punktes O längs der Parameterlinie der u um das Linienelement $\sqrt{e}\,\partial u$, was uns zum Teil auf die Resultate von Jssoly führt.

§. 4.

Differentiirt man die Grössen

$$m = \frac{\partial x}{\sqrt{e}\,\partial u}, \quad n = \frac{\partial x}{\sqrt{g}\,\partial v}, \quad p \tag{12}$$

wo p durch die orthogonale Lage der 3 Geraden gemäss

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ . & . & . \end{vmatrix} = 1 \tag{13}$$

bestimmt wird, nach u, so haben die Resultate die Form:

$$\frac{\partial m}{\partial u} = Bp - Cn; \quad \frac{\partial n}{\partial u} = Cm - Ap; \quad \frac{\partial p}{\partial u} = An - Bm \tag{14}$$

Multiplicirt man die 3 Gleichungen nach einander mit m, n, p, so geben die Summen der Analogen, ausser 3 Gleichungen $0 = 0$, die 6 folgenden:

$$\Sigma n \frac{\partial p}{\partial u} = -\Sigma p \frac{\partial n}{\partial u} = A$$

$$\Sigma p \frac{\partial m}{\partial u} = -\Sigma m \frac{\partial p}{\partial u} = B$$

$$\Sigma m \frac{\partial n}{\partial u} = -\Sigma n \frac{\partial m}{\partial u} = C$$

womit zunächst die Uebereinstimmung der Coefficienten A, B, C in Gl. (14) bewiesen ist. Ausserdem sind dadurch nach den Formeln (11) die 2 Werte bekannt:

$$A = -\frac{F}{\sqrt{g}}; \quad B = \frac{E}{\sqrt{e}}$$

Zur Bestimmung von C hat man, da $\Sigma mn = 0$:

$$C\sqrt{g} = \Sigma m \frac{\partial(n\sqrt{g})}{\partial u} = \Sigma m \frac{\partial(m\sqrt{e})}{\partial v} = \frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = \frac{\partial e}{2\sqrt{e}\,\partial v}$$

also

$$C = \frac{\partial e}{2\sqrt{eg}\,\partial v}$$

Setzt man demnach

$$h = -\frac{F}{t}; \quad k = \frac{E}{e}; \quad l = \frac{\partial e}{2e\sqrt{g}\,\partial v} \tag{15}$$

so wird

$$\frac{\partial m}{\sqrt{e}\,\partial u} = \begin{vmatrix} k & n \\ l & p \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial n}{\sqrt{e}\,\partial u} = \begin{vmatrix} l & p \\ h & m \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial p}{\sqrt{e}\,\partial n} = \begin{vmatrix} h & m \\ k & n \end{vmatrix} \tag{16}$$

§. 5.

Aus den Differentialformeln (16) ergeben sich unmittelbar die Drehungsquotienten der 3 Geraden OT, OH, ON, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} W(T) &= \frac{\sqrt{\Sigma\partial m^2}}{\sqrt{e}\partial u} = \sqrt{k^2+l^2} \\ W(H) &= \frac{\sqrt{\Sigma\,\partial n^2}}{\sqrt{e}\partial u} = \sqrt{l^2+h^2} \\ W(N) &= \frac{\sqrt{\Sigma\,\partial p^2}}{\sqrt{e}\partial u} = \sqrt{h^2+k^2} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die positiven Richtungen der genannten Geraden wählen wir congruent den Axen der x, y, z, schneiden darauf Strecken ab:

$$OT = h, \quad OH = k, \quad ON = l.$$

und vollenden die Rechtecke:

$$HON, \quad NOT, \quad TOH$$

dann stellen deren Diagonalen von O aus die Grössen (17) dar. Ihre Bedeutung ergibt sich auf mehrfache Weise.

Der Construction zufolge sind die Richtungscosinus der Diagonalen:

$$\frac{kn + lp}{\sqrt{k^2 + l^2}}, \quad \frac{lp + hm}{\sqrt{l^2 + h^2}}, \quad \frac{hm + kn}{\sqrt{h^2 + k^2}} \tag{18}$$

Mit Anwendung der Formel (16) für ∂m und der Relation (13) findet man aber:

$$\begin{vmatrix} m & \frac{\partial m}{\sqrt{\Sigma \partial m^2}} & \frac{kn + lp}{\sqrt{k^2 + l^2}} \\ . & . & . \end{vmatrix} = 1$$

folglich sind die Elemente der dritten Verticalreihe, d. i. die Richtungscosinus der ersten Diagonale nach Gl. (6) die Richtungscosinus der momentanen Rotationsaxe von OT, mithin von OT_1. Von den beiden andern Grössen (18) gilt das Analoge. Das Resultat ist:

„Die Diagonalen der 3 Rechtecke OT_1, OH_1, ON_1 stellen der Grösse nach die Drehungsquotienten, der Richtung nach die momentanen Rotationsaxen der Geraden OT, OH, ON dar."

Untersucht man ferner die Projectionen von OT auf die primitiven Ebenen

$$\Sigma nx = 0, \quad \Sigma px = 0$$

so ist das Quadrat des Drehungsquotienten einer jeden nach der Formel (5):

$$\frac{\Sigma \partial m^2 - (\Sigma n \partial m)^2}{e \partial u^2}, \quad \frac{\Sigma \partial m^2 - (\Sigma p \partial m)^2}{e \partial u^2}$$

das ist

$$(k^2 + l^2) - l^2 = k^2, \quad (k^2 + l^2) - k^2 = l^2$$

Das Analoge gilt für die Projectionen von OH, ON, und man findet:

„Die Strecken OT, OH, ON, Projectionen von OT_1, OH_1, ON_1 stellen, jede in doppelter Eigenschaft, die Drehungsquotienten der Projectionen von OT, OH, ON auf die primitiven Ebenen HON, NOT, TOH dar."

Hiermit ist die geometrische Construction dreier Resultate von Jssoly gegeben, die derselbe ohne Construction und ohne analytischen Ausdruck in teils gebräuchlichen, teils von ihm eingeführten Begriffen ausgesprochen aufstellt.

Die Grösse l, Krümmung der Projection der Parameterlinie u auf die primitive Berührungsebene, ist die geodätische Krümmung derselben Curve; sie erscheint hier als Projection der Krümmung im Raume, welche OT_1 darstellt. Ihre andre Projection k ist die Krümmung des berührenden Normalschnitts, von Jssoly nicht benannt; da er aber l die erste geodätische Krümmung nennt, soll vielleicht k die zweite heissen. Die Grösse h nennt er die geodätische Torsion, die Grössen $\sqrt{l^2+h^2}$, $\sqrt{h^2+k^2}$ die tangentielle und normale Deviation.

Ausserdem ist OT_1 als Hauptnormale der Parameterlinie u bekannt.

§. 6.

Wie die erste Gl. (10) zeigt, hat die momentane Rotationsaxe gleiche momentane Bewegungsrichtung mit der variirenden Geraden selbst. Daher stellen OT_2, OH_2, ON_2 dieselbe auch für die Variation von OT_1, OH_1, ON_1 dar. Der Drehungsquotient hingegen unterscheidet sich durch den Factor $\varDelta$, dessen Wert für OT_1 ist

$$\varDelta = \begin{vmatrix} m & \dfrac{\partial m}{\sqrt{\Sigma \partial m^2}} & \dfrac{\partial}{\sqrt{\Sigma \partial m^2}} \dfrac{\partial m}{\sqrt{\Sigma \partial m^2}} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} m & kp-ln & \dfrac{\partial}{\sqrt{e}\,\partial u}(kp-ln) \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix} (k^2+l^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\left(h + \frac{l\,\partial k - k\,\partial l}{k^2+l^2}\,\frac{1}{\sqrt{e}\,\partial u}\right) : \sqrt{k^2+l^2}$$

Demnach sind die Drehungsquotienten:

$$\left.\begin{aligned} W(T_1) &= h + \frac{l\,\partial k - k\,\partial l}{k^2+l^2}\,\frac{1}{\sqrt{e}\,\partial u} \\ W(H_1) &= k + \frac{h\,\partial l - l\,\partial h}{l^2+h^2}\,\frac{1}{\sqrt{e}\,\partial u} \\ W(N_1) &= l + \frac{k\,\partial h - h\,\partial k}{h^2+k^2}\,\frac{1}{\sqrt{e}\,\partial u} \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Die momentanen Rotationsaxen von OT_1. OH_1, ON_1 als normal zu je 2 bekannten Geraden, haben die Richtungen OT, OH, ON.

Setzt man

$$\frac{k}{l} = \operatorname{tg}\alpha; \quad \frac{l}{h} = \operatorname{tg}\beta; \quad \frac{h}{k} = \operatorname{tg}\gamma \tag{20}$$

so kann man die Gl. (19) auch schreiben:

$$W(T_1) = h + \frac{\partial\alpha}{\sqrt{e}\,\partial u}; \quad W(H_1) = k + \frac{\partial\beta}{\sqrt{e}\,\partial u}; \quad W(N_1) = l + \frac{\partial\gamma}{\sqrt{e}\,\partial u}$$

und α, β, γ erfüllen die Gleichung

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = 1$$

welche Jssoly gleichfalls findet; sie sind die Winkel zwischen den OT_1, OH_1, ON_1 und bzhw. ON, OT, OH.

§. 7.

Die Gerade OT_2 hat eine momentane Rotationsaxe parallel der Ebene TOT_1, deren Richtung sich nach Gl. (10) bestimmt. Ihr zufolge ist der Richtungscosinus

$$\frac{\Delta a + a_1}{\sqrt{\Delta^2 + 1}}$$

Setzt man $\Delta = \operatorname{tg}\delta$, so wird er

$$= a_1 \cos\delta + a \sin\delta \tag{21}$$

und δ stellt den Winkel zwischen ihr und OT_1 dar nach OT hin.

Der Drehungsquotient ist

$$= \frac{\sqrt{\Sigma\,\partial a^2}}{\sqrt{e}\,\partial u \cos\delta}$$

also für OT_2, OH_2, ON_2

$$= \frac{\sqrt{k^2 + l^2}}{\cos\delta}, \quad \frac{\sqrt{l^2 + h^2}}{\cos\varepsilon}, \quad \frac{\sqrt{h^2 + k^2}}{\cos\zeta} \tag{22}$$

wo

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{h + \frac{\partial\alpha}{\sqrt{e}\,\partial u}}{\sqrt{k^2 + l^2}}; \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{k + \frac{\partial\beta}{\sqrt{e}\,\partial u}}{\sqrt{l^2 + h^2}}; \quad \operatorname{tg}\zeta = \frac{l + \frac{\partial\gamma}{\sqrt{e}\,\partial u}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \tag{23}$$

Die momentane Bewegung von OT_2 hat nach Gl. (10) die Richtungscosinus

$$a_1 \sin\delta - a\cos\delta = a_1 \cos(\delta - \mathrm{R}) + a \sin(\delta - \mathrm{R}) \tag{24}$$

also eine Richtung längs der Ebene TOT_1 von der Rotationsaxe aus um 1 Rechten weiter zurück.

Hiermit hat sich die betrachtete Figur um 2 neue Tripel von Geraden, nämlich

OT_3, OH_3, ON_3, Rotationsaxen und

OT_4, OH_4, ON_4 Bewegungsrichtungen

von OT_2, OH_2, ON_2 vermehrt.

Diese Figur hat eine Centralaxe, die in den verschiedenen Tripeln nicht enthalten ist. Die Ebenen TOT_1 und HOH_1 haben die Richtungscosinus von T_2 und H_2, nämlich

$$\frac{kp-ln}{\sqrt{k^2+l^2}} \quad \text{und} \quad \frac{lm-hp}{\sqrt{l^2+h^2}}$$

Daraus findet man als Richtungscosinus ihres Schnittes:

$$\frac{hm+kn+lp}{\sqrt{h^2+k^2+l^2}} \tag{25}$$

Da dieser Ausdruck symmetrisch für T, H, N ist, so folgt:

„Die Ebenen TOT_1, HOH_1 und NON_1 schneiden sich in einer Geraden OP."

Auf diesen Ebenen liegen 12 der genannten 15 Geraden, die 3 übrigen sind ihre Normalen. Man kann daher von OP aus eine Uebersicht über alle leicht gewinnen.

Ihre Lage absolut im Raume ist durch die Richtungscosinus ihrer Normalen OT_2, OH_2, ON_2, nämlich

$$\frac{kp-ln}{\sqrt{k^2+l^2}}, \quad \frac{lm-hp}{\sqrt{l^2+h^2}}, \quad \frac{hn-km}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

gegeben. In der Kante OP bilden sie unter sich 3 Winkel

$$H_2ON_2, \quad N_2OT_2, \quad T_2OH_2$$

deren Cosinus sind

$$-\frac{kl}{\sqrt{(l^2+h^2)(h^2+k^2)}}, \quad -\frac{lh}{\sqrt{(h^2+k^2)(k^2+l^2)}}, \quad -\frac{hk}{\sqrt{(k^2+l^2)(l^2+h^2)}}$$

Die Lage der Geraden auf ihren respectiven Ebenen wird durch die Winkel bestimmt, welche sie in O mit OP bilden. Deren Cosinus ergeben sich leicht aus ihren Richtungscosinus und dem (25) von OP. Sei mit bezüglichen Indices



Wkl. $POT = \tau$! $POH = \eta$; $PON = \nu$

und zur Abkürzung

$$\sqrt{h^2+k^2+l^2} = q$$

so wird

$$\cos\tau = \frac{h}{q} \qquad \cos\ = \frac{k}{q} \qquad \text{etc.}$$

$$\cos\tau_1 = \frac{\sqrt{k^2+l^2}}{q} \qquad \cos\eta_1 = \frac{\sqrt{l^2+h^2}}{q}$$

$$\cos\tau_3 = \frac{\sqrt{k^2+l^2}\cos\delta + h\sin\delta}{q}; \quad \cos\eta_3 = \frac{\sqrt{l^2+h^2}\cos\varepsilon + k\sin\varepsilon}{q}$$

$$\cos\tau_4 = \frac{\sqrt{k^2+l^2}\sin\delta - h\cos\delta}{q}; \quad \cos\eta_4 = \frac{\sqrt{l^2+h^2}\sin\varepsilon - k\cos\varepsilon}{q}$$

Die Zweideutigkeit der Winkelwerte hebt sich, wenn man auch die mit OT, etc. gebildeten Winkel zuzieht; dann ist

$$\cos(\tau_1-\tau) = 0; \qquad \cos(\eta_1-\eta) = 0; \qquad \cos(\nu_1-\nu) = 0$$
$$\cos(\tau_3-\tau) = \sin\delta; \qquad \cos(\eta_3-\eta) = \sin\varepsilon; \qquad \cos(\nu_3-\nu) = \sin\zeta$$
$$\cos(\tau_4-\tau) = -\cos\delta; \quad \cos(\eta_4-\eta) = -\cos\varepsilon; \quad \cos(\nu_4-\nu) = -\cos\zeta$$

§. 8

Die momentanen Rotationsaxen sind bisher nur nach ihren Richtungen bestimmt worden. Es bleibt noch der Abstand des Drehpunkts von O zu bestimmen. Dieser ist durch die Formel (8) ausgedrückt, worin indes

$$\partial\alpha = \frac{\partial x}{\partial u}\partial u = m\sqrt{e}\,\partial u$$

durchgängig dieselbe Grösse ist. Die Grössen ∂a sind lineare Complexe von m, n, p. Da nun $\Sigma m^2 = 1$; $\Sigma mn = \Sigma mp = 0$ ist, so bleibt stets nur der Term mit dem Factor m in ∂a zu berücksichtigen.

Die Grössen ∂a sind einesteils durch die Differentialformeln (16) gegeben, anderenteils durch die Gl. (10), wo für $\varDelta$ die Werte $\operatorname{tg}\delta$, $\operatorname{tg}\varepsilon$, $\operatorname{tg}\zeta$ zu setzen sind, auf ∂a zurückgeführt.

Bezeichnet $R(T)$ den Drehpunktsabstand der beliebigen Geraden OT von O, so ist

$$R(T)=0;\qquad R(H)=-\frac{l}{l^2+h^2};\qquad R(N)=\frac{k}{h^2+k^2}$$

$$RT_1)=0;\qquad R(H_1)=\frac{l\cot\varepsilon}{l^2+h^2}\qquad R(N_1)=-\frac{k\cot\zeta}{h^2+k^2}$$

$$R(T_2)=\frac{\cos^2\delta}{\sqrt{k^2+l^2}};\quad R(H_2)=-\frac{h\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{l^2+h^2};\quad R(N_2)=-\frac{h\sin\zeta\cos\zeta}{h^2+k^2}$$

Einfach gestaltet sich noch der Drehpunktsabstand für OT_3, OH_3, ON_3. Differentirt man den Ausdruck (21) des Richtungscosinus von OT_3, so kommt:

$$\begin{aligned}\partial(a_1\cos\delta+a\sin\delta) &= -\mathrm{tg}\delta\,\partial a\cos\delta-a_1\partial\delta\sin\delta+\partial a\sin\delta+a\partial\delta\cos\delta\\ &= -\partial\delta(a_1\sin\delta-a\cos\delta)\end{aligned}$$

woraus zunächst:

$$W(T_3)=-\frac{\partial\delta}{\sqrt{e}\,\partial u}\tag{26}$$

dann nach der Formel (8):

$$R(T_3)=-\frac{\sqrt{e}\,\partial u}{\partial\delta}\Sigma m\left(\frac{kn+lp}{\sqrt{k^2+l^2}}\sin\delta-m\cos\delta\right)$$

daher bei gehöriger Vertauschung im letzten Factor allein:

$$R(T_3)=\frac{\sqrt{e}\,\partial u}{\partial\delta}\cos\delta;\quad R(H_3)=-\frac{\sqrt{e}\,\partial u}{\partial\varepsilon}\,\frac{h\sin\varepsilon}{\sqrt{l^2+h^2}}$$

$$R(N_3)=-\frac{\sqrt{e}\,\partial u}{\partial\zeta}\,\frac{h\sin\zeta}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Die Grössen R multiplicirt mit den Richtungscosinus der bewegten Geraden sind zu x zu addiren, um die Coordinate der Ausgangspunkte der momentanen Rotationsaxen zu finden.

§. 9.

Der Gleitungsquotient oder das Verhältniss des Normalabstandes der consecutiven Geraden zu der Verrückung ergibt sich aus der Formel (9), wo $\partial\alpha$ stets $=m\sqrt{e}\,\partial u$. Bezeichnet man ihn durch Q, so findet man:

$$Q(T)=0;\quad Q(H)=-\frac{h}{\sqrt{l^2+h^2}};\quad Q(N)=-\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\tag{27}$$

$$Q(T_1)=1;\quad Q(H_1)=0;\qquad Q(N_1)=0$$

$$Q(T_2) = -1; \quad Q(H_2) = -\frac{h\cos\varepsilon}{\sqrt{l^2+h^2}}; \quad Q(N_2) = \frac{h\cos\zeta}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$Q(T_3) = 0; \quad Q(H_3) = \frac{l}{\sqrt{l^2+h^2}}; \quad Q(N_3) = -\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

§. 10.

Für 3 Verrückungscurven verschwindet je eine der Grössen h, k, l.

Sind die Linien $v =$ const Krümmungslinien, so sind die Linien $u =$ const desgleichen, und es wird $h = 0$; T fällt in O, H_1 in N N_1 in H; es bleibt nur das eine Rechteck OHT_1N.

Man hat jetzt:

$$W(H) = l; \quad W(N) = k$$

Die tangentielle Deviation wird gleich der geodätischen Krümmung, die normale Deviation gleich der Krümmung des Normalschnitts.

Ferner wird

$$\beta = \mathrm{R}; \quad \gamma = 0$$

$$W(T_1) = \frac{\partial\alpha}{\sqrt{e}\,\partial u}; \quad W(H_1) = k; \quad W(N_1) = l$$

$$\delta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{k^2+l^2}\sqrt{e}\,\partial u}; \quad \varepsilon = \mathrm{R} - \zeta = \alpha$$

Die Grenzlage von OP ist OT_1.

Die Gl. (27) lassen erkennen, dass OT_1, OH, ON, OH_1, ON, OH_2, ON_2 und OT_2 Coincidenzpunkte haben.

Sind die Verrückungscurven asymptotische Linien, so ist $k = 0$. Die Consequenzen dieses Falles sind dem Vorigen analog und gehen durch einfache Vertauschung hervor; nur die Gl. (27) geben nichts entsprechendes.

Sind jene Curven Kürzeste, ihre Trajectorien also geodätische Parallelen, so ist $l = 0$.

XV.

Die vierte Rechenstufe.

Von

Herrn Dr. **Emil Schulze.**

Die Definitionsgleichungen für Product und Potenz lauten:

$$\left.\begin{aligned} a.p &= a+a+a+\ldots \\ a^p &= a.a.a\ldots \end{aligned}\right\} p \text{ mal gesetzt.}$$

Der Gedanke liegt nahe, das Zahlensystem nach dem in diesen Definitionen enthaltenen Princip weiter auszubauen, und, wenn man wie üblich multipliciren und potenziren als Operationen der 2ten und 3ten Rechenstufe bezeichnet, auch die 4te, 5te und allgemein die $n$te Rechenstufe in die Arithmetik einzuführen. Bezüglich der Functionen der 2ten und 3ten Stufe ist wegen der Gültigkeit des Commutationsgesetzes gleichgültig, ob man dieselben durch die Gleichungen

$$\text{I)} \qquad \begin{aligned} ap &= \{\ldots[(a+a)+a]+\ldots a\} \\ a^p &= \{\ldots[(a.a).a]\ldots a\} \end{aligned}$$

oder durch die Gleichungen

$$\text{II)} \qquad \begin{aligned} ap &= \{a+\ldots[a+(a+a)]\ldots\} \\ a^p &= \{a\ldots[a.(a.a)]\ldots\} \end{aligned} \qquad \text{definirt.}$$

Bei der Aufstellung der Function der 4ten, sowie jeder höheren Stufe dagegen bieten sich 2 verschiedene Wege dar, je nachdem man von dem Definitionssystem I) oder II) ausgeht. So z. B. heissen die die beiden Functionen der 4ten Stufe:

$$\{\ldots[a^a)^a]^{\ldots a}\} \quad \text{oder} \quad \{a\ldots^{[a^{(a^a)}]}\ldots\}$$

In den meisten bekannten Lehrbüchern der Arithmetik, wie Hankel, Grassmann, Scheffler, Schröder, Schlömilch u. a. wird die Berechtigung der Einführung der 4ten Stufe ohne weiteres eingeräumt. Scheffler nennt die Function aus System II) $a \curvearrowright p$, Gerlach bezeichnet sie durch ^{p}a (Zeitschr. für math. u. nat. Unt., 13. Jahrg., 6 H.), Wöpcke nennt die des Systems I) $\frac{p}{a}$, die des Systems II) $\frac{p}{a}$ (Crelle, Bd. 42).

Um beide Systeme für jede beliebige Rechenstufe übersichtlich darzustellen, führe ich als Rechenzeichen der $m$ten Stufe des Systems I) $\underline{m}$ und des Systems II) $\underline{\underline{m}}$ ein, dann heissen die Definitionsgleichungen beider Systeme:

$$
\text{I)}\quad
\begin{aligned}
a \underset{-}{2} p &= \{\ldots[(a \underset{-}{1} a) \underset{-}{1} a] \ldots \underset{-}{1} a\} \\
a \underset{-}{3} p &= \{\ldots[(a \underset{-}{2} a) \underset{-}{2} a)] \ldots \underset{-}{2} a\} \\
a \underset{-}{4} p &= \{\ldots[(a \underset{-}{3} a)) \underset{-}{3} a] \ldots \underset{-}{3} a\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a \underset{-}{n} p &= \{\ldots[(a \underset{-}{n-1} a] \ldots \underset{-}{n-1} a\}
\end{aligned}
$$

$$
\text{II)}\quad
\begin{aligned}
a \underset{=}{2} p &= \{a \underset{=}{1} \ldots [a \underset{=}{1} (a \underset{=}{1} a)] \ldots\} \\
a \underset{=}{3} p &= \{a \underset{=}{2} \ldots [a \underset{=}{2} (a \underset{=}{2} a)] \ldots\} \\
a \underset{=}{4} p &= \{a \underset{=}{3} \ldots [a \underset{=}{3} (a \underset{=}{3} a)] \ldots\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a \underset{=}{n} p &= \{a \underset{=}{n-1} \ldots [a \underset{=}{n-1} (a \underset{=}{n-1} a)] \ldots\}
\end{aligned}
$$

Das Princip, nach welchem man verfährt, lässt sich in die Worte fassen: Fügt man die Zahl a mittelst des Zeichens der n [illegible] Rechenstufe p mal an einander, so stellt der erhaltene Ausdruck die Function der $n$ten Rechenstufe dar.

Nur wenig allgemeines will ich über die beiden Functionen $a \underset{-}{n} p$ und $a \underset{=}{n} p$ bemerken. Jede derselben besitzt 2 Umkehrungen. Ist $a \underset{-}{n} p = x$ und $a \underset{=}{n} p = z$, so sei

[illegible]

Hieraus und aus den Definitionsgleichungen folgt.

$$a^{\underline{n}}(p-1) = (a^{\underline{n}}p)\overline{n-1}\,a \quad \text{und} \quad a^{\underline{\underline{n}}}(p-1) = a \overset{n-1}{\|} (^{\underline{\underline{n}}}p)$$

Diese Gleichungen können dazu benutzt werden, um $a^{\underline{n}}p$ und $a^{\underline{\underline{n}}}p$ zu definiren, falls p gleich Null oder negativ ist. Man findet:

$$a^{\underline{n}}0 = a\overline{n-1}a \qquad a^{\underline{n}}(-q) = \{\ldots[(a\overline{n-1}a)\overline{n-1}a]\ldots\overline{n-1}a\}$$

$$a^{\underline{\underline{n}}}0 = a \overset{n-1}{\|} a \qquad a^{\underline{\underline{n}}}(-q) = \{a \overset{n-1}{\|} \ldots [a \overset{a-1}{\|} (a \overset{n-1}{\|} a)] \ldots\}$$

Ist $n > 2$, so ist $a^{\underline{\underline{n-1}}}1 = a$, folglich $a \overset{n-1}{\|} a = 1$, d. h. $a^{\underline{n}}0 = 1$
Ist $n > 3$, so findet man in derselben Weise $a^{\underline{\underline{n}}}(-1) = 0$
Ist $n > 4$, so ist $a^{\underline{\underline{n}}}(-2) = 1$
Ist $n > q+2$, so ist $a^{\underline{\underline{n}}}(-q) = -(q-1)$

Dies wenige mag genügen. Eine völlig befriedigende Untersuchung der Functionen jeder Stufe müsste gemäss dem von Hankel „Princip der Permanenz formaler Gesetze" genannten Princip nach dem Plane angelegt sein, für jede Rechenstufe den Zahlenbegriff systematisch so zu erweitern, dass die Operationen unter allen Umständen, was auch a, p, α, $\mathfrak{a}$ für Functionen seien, ausgeführt werden können.

Ein oberflächlicher Blick genügt, um zu sehen, dass solche Untersuchung unüberwindlichen Schwierigkeiten begegnet, und dies ist wol einer der Gründe, weshalb man die 4te Rechenstufe meist nur erwähnt, die $n$te Stufe überhaupt nicht genannt findet. Einen andern Grund giebt Hankel bezüglich der Function der 4ten Stufe des Systems II) an, die auch für jede höhere Stufe passt; er sagt von ihr „ihre Untersuchung hat sich bis jetzt in der Wissenschaft nicht als notwendig erwiesen".

Endlich will ich noch einen Gesichtspunkt hervorheben, von dem aus eine eingehende Untersuchung der Functionen $n$ter Stufe zwecklos erscheint. In der Function $a^{\underline{n-1}}p$ sind die Cardinalzahl a und Ordnungszahl p durchaus von einander unabhängig. Weshalb nun gerade die Gleichung $a^{\underline{n-1}}a = a^{\underline{n}}2$ als Ausgangspunkt für die nächst höhere Stufe gewählt werden darf, dazu liegt keine innere Berechtigung vor. Mit demselben Rechte könnte man übrigens $a^{\underline{n-1}}a = a^{n}1$ als Definition wählen, so dass $a^{\underline{n}}p$ die Function bedeuten würde, welche man erhält, wenn man mit a $p$mal hintereinander die Operation der nächst niederen Stufe vornimmt. Einzig und allein die Function der 2ten Stufe ap gewinnt die innere Berechtigung ihrer Einführung von einem anderen Standpunkte aus, nämlich, dass sie so aus der höheren Einheit a entsteht, wie p aus der einfachen

Einheit 1. Deshalb bilden Addition und Multiplicatien und ihre Umkehrungen die elementaren Rechenoperationen, und weiter sind keine nötig, selbst das Potenziren nicht, wie Weierstrass ausgesprochen hat (vergl. Kossak, Elem. d. Arithm.). Die 3te Rechenstufe hat vor der 4ten nur das voraus, dass ihre Einführung sich als nützlich, diese aber bis jetzt als zwecklos erwiesen hat. Möglicherweise findet letztere später einmal bei irgend einem Probleme Anwendung, doch abgesehen davon, wird es sich wohl der Mühe lohnen, ihre Functionen näher zu untersuchen.

Die Function der 4. Rechenstufe aus System II) besitzt vor der aus System I) den Vorzug, dass sie durchaus selbständig auftritt, während diese sich als Potenz darstellen lässt: $(a^a)^{a\ldots} = a^{(a^{p-1})}$.

In einem folgenden Aufsatze will ich erstere, in diesem letztere Function, oder was auf dasselbe hinauskommt, die beiden Functionen $a^{(a^z)}$ und $z^{(z^a)}$ behandeln.

Einige Formeln für 4. Stufe, Syst. I. heissen:

$$ {a^m}^{(a^n)} = a_n^{(a^m)} = a_{m+n}, \quad (abcd\ldots) = a_m^{(bcd\ldots)^{m-1}} . b_m^{(acd\ldots)^{m-1}} \ldots $$

$$ (a_{mnp\ldots})^{a^m+a^n+a^p+\ldots} = (a_m . a_n . a_p \ldots)^{a^{mnp\ldots}}, $$

$$ (a_{m_n})^{a^n . a_n^{m-1}} = (a_{n_m})^{a^m . a_m^{n-1}} . $$

I. Die Function $a^{(a^z)}$

Es sei $e^z = Z$, $e^Z = \mathfrak{Z}$, so entspricht bekanntlich dem Punkte z_n, welcher im $n$ten Parallelstreifen der z-Ebene liegt, nur ein einziger Punkt Z_n im $n$ten Blatte der Riemann'schen Z-Schraubenfläche. Bezeichnet man im $n$ten Blatt die beiden Ufer der von Null ins Unendliche laufenden Unstetigkeitslinie l mit $\overset{+}{l_n}$ und $\overset{-}{l_n}$ (s. Thomae, anal. Funct.), so hängen die einzelnen Blätter in der Weise zusammen, dass das Ufer $\overset{-}{l_n}$ an das Ufer $\overset{+}{l}_{n+1}$, $\overset{+}{l_n}$ an $\overset{-}{l}_{n-1}$ sich continuirlich anschliesst. Nimmt man an, dass l in gerader [illegible] 0 bis $-\infty$ läuft, so muss der imaginäre Teil des Haupt[illegible]

$\log Z$ zwischen $\pm i\pi$ liegen. — Denkt man sich die Blätter der Z-Fläche isolirt, und in Parallelstreifen von der Breite $2\pi i$ zerlegt und bildet man die einzelnen Blätter gemäss der Gleichung $e^{Z_n} = \mathfrak{Z}^n$ ab, so entspricht dem Punkte $Z_{(n,n')}$ im n'ten Streifen des $n$ten Blattes ein Punkt $\mathfrak{Z}(n,n')$ im n'ten Blatte der $n$ten Schraube der $\mathfrak{Z}$-Fläche. Die Schnittlinien l, welche in den 0ten Streifen der Blätter der Z-Fläche von 0 bis $-\infty$ gezogen sind, werden durch Schnittlinien L, in den Hauptblättern der Schrauben der $\mathfrak{Z}$-Fläche von 0 bis 1 gezogen, abgebildet. Dem oberen Ufer $\overset{-}{l_n}$ entspricht das obere Ufer $\overset{-}{L_n}$ und dem unteren Ufer $\overset{+}{l_n}$ das untere Ufer $\overset{+}{L_n}$, denn sind die Zahlenwerte von Z_n an den beiden Ufern von l

$$Z'_{(n,0)} = -p + \varepsilon i \quad Z''_{(n,0)} = -p - \varepsilon i,$$

so sind die zugehörigen Werte von $\mathfrak{Z}_n$

$$\mathfrak{Z}'_{(n,0)} = e^{-p}(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon) \quad \mathfrak{Z}''_{(n,0)} = e^{-p}(\cos\varepsilon - i\sin\varepsilon)$$

Fügt man jetzt die Blätter der Z-Fläche so aneinander, dass $\overset{-}{l_n}$ an $\overset{+}{l_{n+1}}$, $\overset{+}{l_n}$ an $\overset{-}{l_{n-1}}$ sich anschliesst, so muss man demgemäss die Schrauben der $\mathfrak{Z}$-Fläche so zusammensetzen, dass $\overset{-}{L_n}$ und $\overset{+}{L_{n+1}}$, $\overset{+}{L_n}$ und $\overset{-}{L_{n-1}}$ in einander übergehen. Während also die Z-Fläche eine einfache Schraube ist, ist die $\mathfrak{Z}$-Fläche eine Doppelschraube. Die einzelnen Hauptblätter der Nebenschrauben bilden für sich wieder eine Schraube, denn lässt man z. B. den Punkt z der z-Ebene in der imaginären Axe aufsteigen, so senkt sich dieser Bewegung gemäss der Punkt Z um den Punkt Null in einer kreisförmigen Schraubenlinie durch alle Blätter der Z-Fläche positiv herum und ebenso Punkt $\mathfrak{Z}$ um den Punkt Eins in einer Schraubenlinie durch alle Hauptblätter der $\mathfrak{Z}$-Fläche positiv herum. Die betreffenden Gleichungen heissen:

$$z_n = (2n\pi + y)i, \quad \text{wo} \quad y \overset{<}{\underset{>}{=}} \pm\pi,$$

$$Z_n = \cos y + i\sin y, \quad \mathfrak{Z}(n,0) = e^{\cos y}(\cos(\sin y) + i\sin(\sin y))$$

Wenn der Punkt $\mathfrak{Z}(n,0)$ im Hauptblatt der $n$ten Schraube den Punkt Eins in beliebiger Curve umkreist, so gelangt er entweder in das 1ste Blatt der $n$ten Schraube, oder in das Hauptblatt der $n+1$ten

Schraube, je nachdem er ausser Punkt Eins auch den Punkt Null umkreist oder nicht.

Was von der Function $e^{(e^z)}$ gilt, lässt sich leicht verallgemeinern. $e^{(e^{(e^z)})}$ stellt eine dreifache Schraube dar, indem durch jedes der der Hauptblätter, die längs einer von 1 bis e gezogenen Linie mit einander zusammenhängen, eine Doppelschraube der geschilderten Art gelegt ist. Ebenso stellt $e^{(e^{(e^{(e^z)})})}$ eine vierfache Schraube dar, u. s. f.

Die Punkte $\mathfrak{Z} = a^{(a^z)}$ sind ebenfalls auf einer Doppelschraube abgebildet. Man setze $e^{\alpha z} = Z$ und $e^{\alpha Z} = \mathfrak{Z}$, wo α den Hauptlogarithmus von a bedeutet; ist $\alpha = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}i$, sind sowohl die z-Ebene als die Blätter der Z-Fläche in Streifen von der Breite $\frac{2\pi\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}\sqrt{\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2}}$, welche mit der positiven reellen Axe den Winkel $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right)$ bilden, zu zerlegen. Hier sind die Linien $\overset{-}{L}_n$ und $\overset{+}{L}_{n+1}$, in denen die $n$te und $n+1$te Nebenschraube der $\mathfrak{Z}$-Fläche zusammenhängen, zwar auch von 0 bis 1 bezogen, verlaufen aber nicht im Hauptblatt der Nebenschrauben, sondern durchsetzen alle Blätter der einen Hälfte derselben.

Reihenentwickelung von $a^{(a^z)}$. Setzt man $\lg a = \alpha$, so ist

$$\mathfrak{Z} = \sum_0^\infty \frac{\alpha^\mu a^{\mu z}}{\mu!} = \sum_0^\infty \left(\sum_0^\infty \frac{\alpha^\mu \mu^\nu}{\mu!}\right) \frac{\alpha^\nu}{\nu!} z^\nu$$

Die Reihe convergirt nach den Regeln, betreffend Potenzreihen von Potenzreihen, für jede Werte von z. Den Coefficienten von z^ν findet man am bequemsten nach Mac Laurin:

$$\mathfrak{Z} = \Sigma \frac{f^r(0)}{r!} z^r, \quad \text{wo} \quad f^r(0 = \left(\frac{d^r \mathfrak{Z}}{dz^r}\right)_{z=0}$$

Aus der Gleichung

$$f^1(z) = \alpha^2 . f^0(z) . a^z$$

folgt nach den Regeln über höhere Differentialquotienten:

$$f^r(0) = \alpha^2 \sum_{r_1=0}^{r_1=r-1} (r-1)_{r_1} \alpha^{r-1-r_1} f^{r_1}(0)$$

Wendet man auf $f^{r_1}(0)$ dieselbe Formel an, beachtet aber, dass sie für $r_1 = 0$ nicht gilt, so erhält man schliesslich:

$$f^r = a\alpha^n\Big[\alpha + \alpha^2 \sum_{r_1=1}^{r-1} (r-1)_{r_1} + \alpha^3 \sum_{r_1=1}^{r-1} \sum_{r_2=1}^{r_1-1} (r-1)_{r_1} (r-1)_{r_2} + \ldots$$

$$+ \alpha^r \sum_{r_1=1}^{r-1} \sum_{r_2=1}^{r_1-1} \ldots \sum_{r_r=1}^{r_{r-1}-1} (r-1)_{r_1} (r-1)_{r_2} \ldots (r_{s-1}-1)_{r_r}$$

Aus dem Binomischen Lehrsatz ergiebt sich:

$$\sum_{r_1=1}^{r-1} (r-1)_{r_1} = \frac{2^r}{0!\,1!} - \frac{1^r}{1!\,0!},$$

$$\sum_{r_1=1}^{r-1} \sum_{r_2=1}^{r_1-1} (r-1)_{r_1} (r_1-1)_{r_2} = \frac{3^r}{0!\,2!} - \frac{2^r}{1!\,1!} + \frac{1^r}{2!\,0!}$$

$$\sum_{r_1=1}^{\nu-1} \sum_{r_2-1}^{r_1-1} \sum_{r_3=1}^{r_2-1} (r-1)_{r_1} (r_1-1)_{r_2} (r_2-1)_{r_3}$$

$$= \frac{4^r}{0!\,3!} - \frac{3^\nu}{0!\,2!} + \frac{2^r}{2!\,1!} - \frac{1^r}{3!\,0!}, \quad \text{u. s. f.}$$

Demnach erhält man:

$$f^0(0) = a, \quad f^r(0) = a\alpha^\nu \sum_{k=1}^{r} \alpha^k \sum_{\lambda=1}^{k} (-1)^{k-\lambda} \frac{\lambda^r}{(\mu-\lambda)!\,(\lambda-1)!}$$

$$\mathfrak{Z} = a + a \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{r} \alpha^k \sum_{\lambda=1}^{k} ((-1)^{\mu-\lambda} \frac{\lambda^r}{(k-\lambda)!\,(\lambda-1)!} \right) \frac{\alpha^r}{r!} \mathfrak{z}^r$$

Reihenentwicklung von $z = \mathrm{Lg}(\mathrm{Lg}\,\mathfrak{Z})$. Ebensowenig wie $\mathrm{Lg}\,\mathfrak{Z}$ lässt sich $\mathrm{Lg}\,\mathrm{Lg}\,\mathfrak{Z}$ in eine Reihe nach Potenzen von $\mathfrak{Z}$ entwickeln. Am einfachsten gestaltet sich die Entwickelung von

$$z(0,0) = \lg\lg \mathfrak{Z}(0,0) = \lg\lg(e(\mathfrak{z}+1))$$

nach Potenzen von $\mathfrak{z}$, wobei ich unter $\lg\lg\mathfrak{Z}(0,0)$ den Hauptlogarithmus vom Hauptlogarithmus, unter $\mathfrak{Z}(0,0)$, also einen Punkt im Hauptblatt der 0ten Schraube der $\mathfrak{Z}$-Fläche verstehe. Nach den Convergenzkriterien, die bei den Umkehrungsproblemen Geltung ha-

ben, lässt sich, wenn $e^{(e^z-1)}-1=\mathfrak{z}$ ist, $z=\Sigma k_\mu \mathfrak{z}^\mu$ unter folgender Bedingung in eine convergente Reihe entwickeln: Sind $\mathfrak{z}_0$, $\mathfrak{z}_1$, $\mathfrak{z}_2$ u. s. w. die Werte von $\mathfrak{z}$, die der Gleichung $\frac{d\mathfrak{z}}{dz}=0$ genügen, und ist $\bmod \mathfrak{z}_0$ der kleinste unter den Modulis $\bmod \mathfrak{z}_0$, $\bmod \mathfrak{z}_1$ u. s. w., so muss $\bmod \mathfrak{z} < \bmod \mathfrak{z}_0$ sein. Hier ist

$$\frac{d\mathfrak{z}}{dz}=e^z(1+\mathfrak{z})$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{z}_0=\frac{1}{e}-1,\quad \mathfrak{z}_1=-1.$$

Demnach ist Convergenzbedingung:

$$\bmod \mathfrak{z} < 1-\frac{1}{e}.$$

Es ist

$$z(0,0)=\lg\lg(e(1+\mathfrak{z}))=\sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\lambda+1}}{\lambda}(\lg(1+\mathfrak{z}))^\lambda$$

Ferner ist (Schlömil ch, Anal. Th. II.)

$$(\lg(1+\mathfrak{z}))^\lambda=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{\overset{\lambda+r}{\lambda C_r}}{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+r)}\mathfrak{z}^{\lambda+r}$$

Hier bedeutet $\overset{\mu}{C}_r$ den sogenannten Facultätencoefficienten, definirt durch die Gleichung:

$$l(l+1)(l+2)\dots(l+\mu-1)=\overset{\mu}{C}_0 l^\mu+\overset{\mu}{C}_1 l^{\mu(n-1)}+\dots\overset{\mu}{C}_r l^{\mu-r}+\dots$$

Den Wert eingesetzt und nach Potenzen von $\mathfrak{z}$ geordnet, erhält man

$$z(0,0)=\lg\lg\mathfrak{Z}(0,0)$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu+1}\left(\sum_{r=0}^{r=\mu-1}\frac{\overset{\mu}{C}r}{\mu\,.\,\overline{\mu-1}\,.\,\overline{\mu-2}\dots\overline{\mu-r}}\right)\mathfrak{z}^\mu\}\bmod\mathfrak{z}<1-\frac{1}{e}$$

Die Reihenentwickelung $z(n,m)=\mathrm{Lg}\,\mathrm{Lg}\,\mathfrak{Z}(n,m)$ für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{Z}(n,m)$ im $m$ten Blatte der $n$ten Schraube lässt sich ganz ähnlich durchführen, denn es ist:

$$z(n,m)=\lg[\lg(e(\mathfrak{z}+1))+2m\pi i]+2n\pi i$$

$$=\lg\left[1+\frac{1}{1+2m\pi i}.\lg(1+\mathfrak{z})\right]+\lg(1+2m\pi i)+2n\pi i$$

$$=\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu+1}\left(\sum_{r=0}^{\mu-1}\frac{\overset{\mu}{C}_r}{\mu\,.\,\overline{\mu-1}\dots\overline{\mu-r}}(1+2\mu\pi i)^{\mu-s}\right)\mathfrak{z}^\mu+\lg(1+2m\pi i)+2n\pi i$$

Die Convergenzbedingung ist auch hier:

$$\operatorname{mod} \mathfrak{z} < 1 - \frac{1}{e}.$$

Weil $\mathfrak{Z} = e(\mathfrak{z}+1)$ ist, demnach die Convergenzbedingung auch die Form hat: $\operatorname{mod}(e - \mathfrak{Z}) < e - 1$, so gilt die Reihenentwickelung für alle diejenigen Punkte $\mathfrak{Z}(n, m)$, welche innerhalb des Convergenzkreises liegen, mit $e-1$ als Radius um den Punkt e geschlagen.

Das Problem gestattet eine allgemeine Lösung. Bedeutet wieder in der Gleichung $z = \operatorname{Lg}\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}$ $\mathfrak{Z}$ einen Punkt im $m$ten Blatte der $n$ten Schraube, dann bestimme man $\operatorname{Lg}\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}'$ der Art, dass die Gleichung erfüllt wird

$$z = \operatorname{Lg}\operatorname{Lg}\mathfrak{Z} = \operatorname{Lg}\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}' + \lg\frac{\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}}{\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}'},$$

wo $\lg\left(\frac{\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}}{\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}'}\right)$ der Hauptlogarithmus von $\frac{\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}}{\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}'}$ sein soll. Ebenso bestimme man $\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}_1$ so, dass

$$\operatorname{Lg}\mathfrak{Z} = \operatorname{Lg}\mathfrak{Z}_1 + \lg\left(1 + \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1}\right)$$

ist. Dann nimmt die Gleichung für z die Form an:

$$z = \operatorname{Lg}\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}' + \lg\left(\frac{\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}_1}{\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}'}\right) + \lg\left[1 + \frac{1}{\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}_1}\lg\left(1 + \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1}\right)\right].$$

Setzt man noch

$$\operatorname{Lg}\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}' + \lg\left(\frac{\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}_1}{\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}'}\right) = \operatorname{Lg}\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}_1 = z_1,$$

so erhält man:

$$z - z_1 = \log\left[1 + \frac{1}{\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}_1}\lg\left(1 + \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1}\right)\right]$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu+1}\left(\sum_{r=0}^{\mu-1}\frac{\overset{\mu}{C_r}}{\mu\,.\,\mu-1\ldots\mu-r\,(\operatorname{Lg}\mathfrak{Z}_1)^{\mu-r}}\right)\cdot\left(\frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{Z}_1}\right)^{\mu}$$

$$\operatorname{mod}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_1 < \left(1 - \frac{1}{e}\right)\operatorname{mod}\mathfrak{Z}_1$$

Der Convergenzkreis hat jetzt $\mathfrak{Z}_1$ als Mittelpunkt und $\left(1 - \frac{1}{e}\right).\operatorname{mod}\mathfrak{Z}_1$ als Radius. Hat der Punkt $\mathfrak{Z}_1$ solche Lage, dass der Kreis einen Verzweigungsschnitt schneidet, so ist der Kreis nicht geschlossen, aber auch in diesem Falle gilt die Reihenentwickelung,

weil die Function in der $\mathfrak{Z}$-Fläche stetig ist. Fällt Punkt $\mathfrak{Z}_1$ mit Punkt e zusammen, so liefert die Entwickelung den zuerst behandelten speciellen Fall.

II. Die Function $Z^{(Z^a)} = \mathfrak{Z}$.

Es sei

$$1)\ Z = e^z \qquad 2)\ z.e^{az} = \mathfrak{z} \qquad 3)\ e^{\mathfrak{z}} = \mathfrak{Z}.$$

Die Punkte Z denke man sich auf einer Schraubenfläche der Gleichung 1) gemäss, ebenso die Punkte $\mathfrak{z}$ auf einer Schraubenfläche der Gleichung 2) gemäss, endlich die Punkte $\mathfrak{Z}$ auf einer Fläche den Gleichungen 2) und 3) gemäss ausgebreitet. Letztere ist offenbar eine Doppelschraube; ein Punkt Z_n im $n$ten Blatt der Z-Fläche ist in einem Punkte $\mathfrak{Z}_n$ in der $n$ten Nebenschraube der $\mathfrak{Z}$-Fläche abgebildet. Weil die Blätter der Z-Fläche in der Weise zusammenhängen, dass das Ufer $\overset{-}{l}_n$ an $\overset{+}{l}_{n+1}$, $\overset{+}{l}_n$ an $\overset{-}{l}_{n-1}$ sich anschliesst, so müssen in analoger Weise auch die Nebenschrauben der $\mathfrak{Z}$-Fläche mittelst der jenen Linien entsprechenden Curven $\overset{-}{\lambda}_n$ und $\overset{+}{\lambda}_{n+1}$, $\overset{+}{\lambda}_n$ und $\overset{-}{\lambda}_{n-1}$ an einander gefügt sein. Um einen genaueren Einblick in den Bau der $\mathfrak{Z}$-Fläche zu erhalten, will ich die ziemlich complicirte Gleichung jener Curven für den Fall näher untersuchen, dass a eine reelle ganze Zahl ist. Bezeichnet $-u$ den Wert, welchen Z_n am Ufer $\overset{-}{l}_n$ resp. $\overset{+}{l}_n$ hat, und sind $\mathfrak{z}'_n$, $\mathfrak{z}''_n$ und $\mathfrak{Z}'_n$, $\mathfrak{Z}''_n$ die entsprechenden Werte von $\mathfrak{z}_n$ und $\mathfrak{Z}_n$, so ist:

I)

$$\mathfrak{z}'_n = (-u)^a.(\lg u + (2n+1)\pi i)$$

$$\mathfrak{z}''_n = (-u)^a.(\lg n + (2n-1)\pi i);$$

II)

$$\mathfrak{Z}'_n = u^{(-u)^a}.[\cos(2n+1)\pi.u^a) + \sin((2n+1))\pi(-u)^a)]$$

$$\mathfrak{Z}''_n = u^{(-u)^a}.[\cos((2n-1)\pi.u^a) + i\sin((2n-1)\pi(-u)^a)]$$

Die Gleichungen II) sind die der Curven $\overset{-}{\lambda}_n$ und $\overset{+}{\lambda}_n$; dieselben stellen Schraubenlinien dar, deren Radiusvector $r = u^{(-u)^a}$ ist. Um zu untersuchen, durch welche Blätter der $\mathfrak{Z}_n$-Nebenschraube dieselben sich winden, teile man das $n$te Blatt der $\mathfrak{z}$-Fläche in Parallelstreifen von der Breite $2\pi i$; liegt nun $\mathfrak{z}'_n$ für einen bestimmten Wert von u im $m$ten Streifen und infolgedessen $\mathfrak{Z}'_n$ im $m$ten Blatt der $\mathfrak{Z}_n$-

Nebenschraube, so muss der imaginäre Teil von $\mathfrak{z}'n$, d. i. $(2n+1)\pi.(-u)^a i$ zwischen den Grenzen $(2m\pm1)\pi i$ liegen, d. h. wenn a $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{gerade}}{\text{ungerade}}$ und n $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ ist, muss m positiv sein, wenn dagegen a $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{ungerade}}{\text{gerade}}$ und n $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{positiv}}{\text{negativ}}$ ist, muss m negativ sein. Daraus folgt dass die Schraubenlinie $\overset{-}{\lambda}_n$ sich im ersten Fall durch die Plus-Blätter der $\mathfrak{Z}n$-Schraube, im zweiten durch die Minus-Blätter derselben windet. Das nämliche gilt von der Schraubenlinie $\overset{+}{\lambda}_n$. Beide Linien schneiden sich in einem Punkte; in diesem findet die Gleichung $\mathfrak{Z}'n = \mathfrak{Z}''n$ statt, die beiden zugehörigen Werte von u sind:

$$u' = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{\frac{2n+1}{2a}} \quad \text{und } u' = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{\frac{2n-1}{2a}}$$

Wächst u von 0 bis ∞, so ändert sich der Radiusvector r der Schraubenlinien stetig; die Curve $r = u^{(u^a)}$ gibt diese stetige Aenderung an.

Ist z. B. a positiv und gerade und n positiv, so beginnen die Schraubenlinien im Punkte Eins, winden sich entgegengesetzt dem Zeiger einer Uhr zuerst nach innen, von $u = e^{-\frac{1}{a}}$ an nach aussen; für $u = 1$ gehen sie durch den Punkt (-1) und zwar $\overset{-}{\lambda}_n$ auf der Grenze zwischen dem $n$ten und $n+1$ten, $\overset{+}{\lambda}_n$ auf der Grenze zwischen dem $n-1$ten und $n$ten Blatt.

Der Bau der $\mathfrak{Z}$-Doppelschraube ist jetzt klar zu erkennen. Die Blätter je zweier benachbarten Nebenschrauben, der $\mathfrak{Z}n$- und $\mathfrak{Z}n+1$-Schraube, durchsetzen einander in der Weise, dass sie in den Schraubenlinien $\overset{-}{\lambda}_n$ und $\overset{+}{\lambda}_{n+1}$ zusammenhängen. Einer stetigen Bewegung des Punktes Z in der Z-Schraube entspricht eine stetige Bewegung des Punktes $\mathfrak{Z}$ in der $\mathfrak{Z}$-Doppelschraube. Wie der Punkt Z, wenn er bei seiner Bewegung im $n$ten Blatt der Z-Fläche, an die Linie $\overset{-}{l}_n$ kommt, entweder im $n$ten Blatt verbleiben oder ins $n+1$te übertreten kann, so kann auch der Punkt $\mathfrak{Z}$, wenn er an die Schraubenlinie $\overset{-}{\lambda}_n$ kommt, in der $n$ten Nebenschraube bleiben, oder in die $n+1$te übertreten. Damit im Schnittpunkt von $\overset{-}{\lambda}_n$ und $\overset{+}{\lambda}_n$ keine

Verzweigung stattfindet, muss man annehmen, dass dort die eine Schraubenlinie isolirt über die andere fortgeht. Der singulären Stelle $Z=0$ der Z-Fläche entspricht die singuläre Stelle $\mathfrak{Z}=1$ der $\mathfrak{Z}$-Fläche, falls a positiv ist, und $\mathfrak{Z}=0$ oder $\mathfrak{Z}=\infty$, falls a negativ und zwar gerade oder ungerade ist.

Reihenentwickelung von $\mathfrak{Z}=\Sigma A_\mu(Z-Z_0)^\mu$.

Es ist

$$\mathfrak{Z}=Z^{(Z^a)}=e^{\lg Z.e^{a\lg Z}}=\sum_{k=0}\frac{(\lg Z)^k}{k!}e^{ak\lg Z}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(ak)^\lambda}{k!\,\lambda!}(\lg Z)^{k+\lambda}$$

Macht man von den schon früher angewendeten Formel

$$(\lg Z)^{k+\lambda}=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(k+\lambda)\overset{m+\lambda+r}{C_r}}{(k+\lambda)(k+\lambda+1)\ldots(k+\lambda+r)}(Z-1)^{k+\lambda+r}$$

Gebrauch und führt man $\mu=k+\lambda+r$ ein, so erhält man:

$$\mathfrak{Z}=\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\sum_{(k+\lambda)=0}^{k+\lambda=\mu}(-1)^{\mu-(\mu+\lambda)}.(k+\lambda)_\lambda.(ak)^\lambda.\overset{\mu}{C}_{\mu-(k+\lambda)}\right)\cdot\frac{(Z-1)^\mu}{\mu!}$$

Nach den Regeln über Convergenz der Potenzreihen von Potenzreihen (z. B. Thomae, anal. Funct. S. 68) ist Convergenzbedingung: $\mathrm{mod}(Z-1)<1$.

Reihenentwickelung von $Z=\Sigma\mathfrak{A}_\mu(\mathfrak{Z}-\mathfrak{Z}_0)^\mu$.

Zu dem Zwecke benutze ich die Bürmann'sche Reihe, welche ihre Anwendung bei den Umkehrungsproblemen findet. Ist $\mathfrak{z}$ eine Function von z und umgekehrt $f(z)$ eine Function von $\mathfrak{z}$, so hat jene Reihe die Form:

$$f(z)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\lambda^r}{r!}\mathfrak{z}^r.$$

Bedeutet z_0 den Wert von z, welcher die Gleichung $\mathfrak{z}=0$ erfüllt, so sind die Coefficienten λ durch die Gleichungen bestimmt:

$$\lambda_0=f(z_0)\quad \lambda_r=\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left(\left(\frac{z-z_0}{\mathfrak{z}}\right)^r.f'(z)\right)_{z=z_0}$$

Im vorliegenden Falle sei

$$f(z)=e^z$$

Weil $z_0 = 0$, so ist

$$\lambda_0 = 1 \quad \lambda_r = \frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}(e^{z(1-ar)})_{z=0} = (1-ar)^{r-1}.$$

Folglich:

$$e^z = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1-ar)^{r-1}}{r!} \mathfrak{z}^r.$$

Setzt man jetzt $e^z = Z$ und $e^{\mathfrak{z}} = \mathfrak{Z}$ und entwickelt man $(\lg \mathfrak{Z})^r$ in eine Reihe, so findet man:

$$Z = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{r=\mu} (-1)^{\mu-r} (1-ar)^{r-1} \cdot C_{\mu-r}^{\mu} \right) \cdot \frac{(\mathfrak{Z}-1)^{\mu}}{\mu!}$$

Der Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dZ} - e^{az}(1+az) \cdot \mathfrak{Z} = 0$$

genügen die Werte

$$\mathfrak{Z}_0 = e^{-\frac{1}{ae}}, \quad \mathfrak{Z}_1 = 0, \quad \mathfrak{Z}_2 = 0.$$

Nach den Convergenzkriterien ist dann Bedingung der Convergenz: $\mathrm{mod}\,(1-\mathfrak{Z}) < \mathrm{mod}\,(1-\mathfrak{Z}_0)$, d. h. die Reihenentwickelung ist erlaubt für alle Punkte $\mathfrak{Z}$, die innerhalb eines Convergenzkreises liegen, um den Punkt Eins mit $\mathrm{mod}\,(1-\mathfrak{Z}_0)$ als Radius geschlagen.

Ist a reell und beschränkt man die Untersuchung auf reelle Werte der Variablen, so ist Bedingung, dass $\mathfrak{Z}$ zwischen den Grenzen $e^{\pm\frac{1}{ae}}$ liegen und für $Z_0 = 1$ den Anfangswert $\mathfrak{Z}_0 = 1$ haben muss.

XVI.

Ueber den Eisenstein'schen Satz.

Von

F. Gomes-Teixeira,

Prof. an der polytechnischen Schule von Oporto,
vorm. Professor an der Universität Coimbra.

Man kennt sehr wol den bemerkenswerten Satz von Eisenstein, nämlich:

Die Reihe

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

wo a_0, a_1, a_2, etc. auf einfachsten Ausdruck reducirte Brüche darstellen, kann nicht die Entwickelung einer Wurzel y einer in x und y algebraischen Gleichung mit ganzen Zahlen als Coefficienten sein, wenn die Nenner der a_0, a_1, a_2, ... eine unendliche Anzahl von Primfactoren enthalten.

Der Zweck der gegenwärtigen Note ist zu zeigen, das man diesen Satz sehr leicht aus der folgenden Formel herleiten kann *):

$$(2) \qquad \Sigma \frac{(y')^\alpha \left(\frac{y''}{2!}\right)^\beta \left(\frac{y'''}{3!}\right)^\gamma \cdots \left(\frac{y^{(n)}}{n!}\right)^\lambda}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\,\dots\,\lambda!\,k!} \frac{\partial^m F}{\partial x^k \partial y^{m-k}} = 0$$

---

*) S. unsere Note „sur les dérivées d'ordre quelconque" in Battaglini Journal, tome XVIII.

welche die $n$te Derivirte einer impliciten Function y, definirt durch die Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

darstellt, von der wir voraussetzen, dass sie ganze Function von x und y, und ihre Coefficienten ganze Zahlen seien.

In dieser Formel bezieht sich das Summenzeichen Σ auf alle ganzen positiven Lösungen der Gleichung

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma + \dots + n\lambda = n - k \tag{3}$$

wo k alle ganzen positiven Werte von 0 bis n annehmen soll, und

$$m = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda + k \tag{4}$$

ist.

Sondert man in der Formel (2) den Term ab, welcher $y^{(n)}$ enthält, so hat man die Gleichung:

$$\Sigma \frac{(y')^\alpha \left(\frac{y''}{2!}\right)^\beta \dots \left(\frac{y^{(n-1)}}{(n-1)!}\right)^\omega}{\alpha! \, \beta! \dots \omega! \, k!} \frac{\partial^m F}{\partial x^{m-k} \partial y^k} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{y^{(n)}}{n!} = 0 \tag{5}$$

die, wenn man $x = 0$ setzt, die Werte von

$$y_0', \quad \frac{y_0''}{2!}, \quad \dots \quad \frac{y_0^{(n)}}{n!}$$

gibt, welche mit den Coefficienten $a_0, a_1, \dots a_n$ der aufgestellten Reihe zusammenfallen müssen.

Man sieht aus dieser Formel, dass der Nenner von

$$\frac{y_0^{(n)}}{n!} \tag{6}$$

nur die folgenden Primfactoren enthalten kann:

1) Diejenigen, welche aus dem Factor

$$\alpha! \, \beta! \, \gamma! \dots \omega! \, k!$$

2) diejenigen, welche aus dem Nenner der Function

$$\left(\frac{\partial^m F}{\partial x^{m-k} \partial y^k}\right)_{x=0} \tag{7}$$

3) diejenigen, welche aus dem Nenner der Function

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x=0} \tag{8}$$

4) diejenigen, welche aus den Nennern von

$$y_0', \quad \frac{y_0''}{2!}, \quad \frac{y_0'''}{3!}, \ldots \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}$$

hervorgehen.

Wir werden sehen, dass die den 3 ersten Fällen entsprechenden Primfactoren nicht mit n ins unendliche wachsen.

Da $F(x, y)$ ganze Function von x und y ist, so sind ihre Derivirten höherer Ordnung als ihr Grad null, folglich kann m nicht ins unendliche wachsen; daher können auch nicht die Grössen $\alpha, \beta, \ldots \omega, k$, und ebensowenig deren Primfactoren ins unendliche wachsen.

Die Derivirte (7), welche ganze Function von y_0, folglich von a_0 ist, kann augenfällig im Nenner nur Primfactoren enthalten, die auch im Nenner von a_0 vorkommen.

Die Derivirte (8), welche ganze Function von y_0 mit ganzen Coefficienten, also ganze Function von a_0 ist, kann im Nenner nur Primfactoren in begrenzter Anzahl haben.

Aus allem Vorstehenden erhellt, dass die Primfactoren des Nenners von (6) oder a_n nicht ins unendliche wachsen können, was wir beweisen wollten.

XVII.

Zur Construction des Krümmungsmittelpunktes bei Kegelschnitten.

Von

Carl Schirek.

A. Mannheim gibt auf pag. 285. seines Cours de Géométrie descriptive de l'École polytechnique, Paris 1880. ein Verfahren an zur Bestimmung des Krümmungsmittelpunktes des ebenen Schnittes C einer beliebigen Fläche F, welches darin besteht, dass man die Curve C als Leitcurve einer Normalenfläche der Fläche F auffasst, welche man mittelst orthogonaler Projection auf die Schnittebene S bezieht. Die Projection des sichtbaren Umrisses der besagten Normalenfläche oder die Contour derselben ist die Enveloppe der Projectionen ihrer sämtlichen Erzeugenden und nachdem jede einzelne Erzeugende normal ist zu der Tangentialebene desjenigen Punktes der Fläche F, für welchen sie eine Normale vorstellt, so ist auch ihre orthogonale Projection normal zur Trace jener Tangentialebene auf der Projectionsebene, d. i. normal zur Tangente der Curve C in jenem Punkte und demnach eine Normale von C, so dass die Contour der Normalenfläche durch die Evolute der Curve C dargestellt wird. Demzufolge ist der Punkt, in welchem die Normale eines Punktes von C die Evolute berührt, oder der diesem Punkt entsprechende Krümmungsmittelpunkt die Projection des Berührungspunktes der Normalenfläche mit einer durch die der Normalen des gedachten Punktes entsprechenden Erzeugenden der Normalfläche gehenden, zur Ebene S senkrechten Ebene und dieser kann, wie in dem citirten Werke

ausgeführt ist, wenn die Hauptkrümmungscentren von F für den betreffenden Punkt bekannt sind, mit Hilfe eines Schmiegungsparaboloides mit Cirkel und Lineal allein gefunden werden.

Dieses Princip ist einer Ausnutzung fähig zur Construction des Krümmungsmittelpunktes einer ebenen Curve überhaupt. Wenn nämlich eine ebene Curve C als gegeben vorliegt, und es soll deren Krümmungsmittelpunkt, welcher einem bestimmten Punkte entspricht, gesucht werden, so kann man durch dieselbe irgend eine krumme Fläche legen, oder man kann sie als Leitlinie einer windschiefen oder aufwickelbaren Kegelfläche betrachten und mit Hilfe einer Normalenfläche, welche die letztere zur Leitfläche und die Curve C zur Leitcurve besitzt, weitere Schlüsse ziehen, wie vor. Von der zweckmässigen Wahl der durch C gelegten Fläche wird die grössere oder geringere Einfachheit der sich ergebenden Krümmungsmittelpunktsconstruction abhängig sein, und wir werden nur dann im Stande sein, dieselbe mit alleiniger Benutzung von Cirkel und Lineal durchzuführen, wenn wir in der Lage sind, aus den die Hilfsnormalen bestimmenden Gebilden in 3 Punkten einer ihrer Erzeugenden sofort die Tangentialebenen angeben zu können.

In den folgenden Zeilen beabsichtigen wir die Construction des Krümmungsmittelpunktes bei Kegelschnitten im Sinne pes Gesagten zur Ausführung zu bringen.

Ist K ein gegebener Kegelschnitt, so ist unter den unendlich vielen Flächen, welche sich durch denselben legen lassen, eine aufwickelbre Rotationsfläche zweiten Grades, also ein Rotationskegel resp. Cylinder, die für unseren Zweck geeignetste. Die Erzeugenden der Normalenfläche eines Rotationskegels längs des auf ihm liegenden Kegelschnittes K müssen dessen Rotationsaxe schneiden einerseits und den Erzeugenden des ihm zugehörigen Ergänzungskegels, d. i. eines Kegels, dessen Erzeugenden normal sind zu den Tangentialebenen des gegebenen Kegels (und der mit demselben concentrisch ist) parallel sein andererseits, so dass wir als neue Bestimmungsstücke der Normalenfläche 3 Leitcurven erhalten, u. zw. die Axe des Rotationskegels als gerade Leitlinie, ferner den Kegelschnitt K und die unendlich ferne Curve des Ergänzungskegels als krumme Leitlinien.

Wir besprechen nun der Reihe nach jeden einzelnen der drei Fälle, wo der Kegelschnitt K eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist.

1. „Der Kegelschnitt" ist eine Ellipse E, gegeben durch die Axen AA_1, BB_1 und m sei derjenige Ellipsenpunkt, dessen Krümmungsmittelpunkt bestimmt werden soll. (Fig. 1.).

Unter den unendlich vielen durch E gehenden Rotationskegeln gibt es zwei, deren Scheitel im Unendlichen liegen, welche also Rotationscylinder sind; eines derselben R, wollen wir uns bedienen. Die Normalenfläche desselben längs der Ellipse E hat die Cylinderaxe zur Leitlinie und eine zu derselben normale Ebene r zur Richtebene.

Nehmen wir die Zeichnungsebene, in welcher E liegt, als horizontale, die durch AA_1 zu derselben senkrecht gelegte Ebene V als verticale Projectionsebene an und bezeichnen wir die horizontalen Projectionen mit Buchstaben ohne Accent und die verticalen Projectionen mit Buchstaben, die mit einem Accent versehen sind. Die Erzeugenden von R sind zur Ebene V parallel und die Richtung ihrer verticalen Projection ist gegeben durch die Gerade, welche einen Endpunkt B der kleinen Axe mit einem Brennpunkte F verbindet. Ziehen wir daher durch den Ellipsenmittelpunkt O eine Parallele a' zu BF, so repräsentirt diese die verticale Projection der Axe von R_1, während die horizontale Projection a mit der Projectionsaxe AA_1 zusammenfällt. Die auf diese Axe in O errichtete senkrechte Ebene d. i. die Richtebene $r_v r_h$ der Normalenfläche ist eine verticalprojicirende. Die durch den Punkt mm' gehende Erzeugende der Normalenfläche hat die Normale von E im Punkte m zur horizontalen, die durch m' zu r_v geführte Parallele zur verticalen Projection, vv' ist ihr Schnittpunkt mit der Axe aa'. Den Berührungspunkt der durch diese Erzeugende gehenden horizontal projicirenden Ebene $e_v e_h$ mit der Normalenfläche finden wir mit Hilfe eines sich ihr längs der Erzeugenden (mv, $m'v'$) anschmiegenden hyperbolischen Paraboloides, dass die Ellipsentangente (tt') im Punkte mm', ferner die Gerade (a, a') zu Leitlinien und die Ebene ($r_v r_h$) zur Richtebene des ersten Systems hat; die Richtebene des zweiten Systems ist zu den Leitlinien des ersten Systems parallel, daher $(x)_v = a'$ ihre verticale, die durch O zu t gezogene Parallele $(x)_h$ ihre horizontale Trace vorstellt. Der fragliche Berührungspunkt ist der Schnittpunkt von der in der Ebene ($e_v e_h$) liegenden Erzeugenden des zweiten Systems des Paraboloids; diese muss alle Erzeugenden des ersten Systems schneiden und zur Richtebene ($(r_v (r)_h)$ des zweiten Systems parallel sein, d. h. parallel zur Schnittlinie (vh, $v'h'$) der Ebenen (r) und e. Eine Erzeugende des ersten Systems ist die in der horizontalen Projectionsebene liegende verticalprojicirende Gerade OB_1; nachdem nun diese von allen Erzeugenden des zweiten Systems getroffen werden muss, und der Punkt O ihre verticale Projection vorstellt, so folgt hieraus, dass die verticale Projection der in der Ebene ($e_v e_h$) liegenden Erzeugenden des zweiten Systems sich als die durch O zu $v'h'$ geführte Parallele ergibt, welche der verticalen Projection

$n'v'$ der Erzeugenden des ersten Systems im Punkte K' begegnet, dessen zugehörige horizontale Projection K als Schnitt von N mit dem aus K' zur Projectionsaxe gefällten Perpendikel resultirt und bereits der gesuchte Krümmungsmittelpunkt ist. Wenn die Punkte h und v nahe an einander fallen, so ist es gut, um die Richtung der Geraden $v'h'$ genauer zu fixiren, die Ebene $((r)_v(r)_h)$ parallel zu sich selbst zu verschieben.

Wollte man auf Grund der für die Construction des Krümmungsmittelpunktes von m erhaltenen Liniencombination den Krümmungsmittelpunkt des Endpunktes B der kleinen Axe BB_1 suchen, so käme man zu keinem bestimmten Resultate, da die Linien mv, $m'v'$, $h'v'$ diesfalls alle mit der Geraden BB_1 zusammenfallen, und man könnte geneigt sein zu vermuten, dass das angegebene Princip auf den Punkt B speciell angewendet kein Resultat ergebe. Hält man sich jedoch an die rämliche Betrachtung, durch welche man zu der vorstehenden Construction geführt wurde, so wird man alsbald zur folgenden, von der allgemeinen scheinbar verschiedenen Construction gelangen: Um den Krümmungsmittelpunkt K von B zu finden (Fig. 1a) nehme man in AA_1 einen beliebigen Punkt δ' an, ziehe durch denselben eine Senkrechte zur Geraden a' und fälle aus ihrem Fusspunkte A' ein Perpendikel zu AA_1, welches letztere Gerade im Punkte Δ schneidet und ebenso aus δ' ein Perpendikel auf die Tangente t des Axenendpunktes B, und heisse δ dessen Fusspunkt; die Verbindungsgerade der Punkte δ, Δ schneidet BB_1 in dem verlangten Punkte K. Der Punkt δ' kann auch als mit dem Brennpunkte F zusammenfallend angenommen werden.

Nimmt man an, dass der Punkt m ein Endpunkt der grossen Axe z. B. A_1 sei, so degenerirt das hyperbolische Paraboloid diesfalls in 2 Ebenen, und man muss daher statt desselben ein anderes Schmiegungsparaboloid anwenden, welches eine von der Tangente des Scheitels A_1 verschiedene Gerade zur [illegible] hat, die in der durch diese Scheiteltangente [illegible] zu (a, a') parallelen Ebene gelegen ist, und mit der [illegible] AA_1 zu [illegible] zusammenfällt.

Die Normale [illegible] und die unendlich [illegible] gerades Kegelschnitt[illegible] Punkt M der [illegible] Geraden [illegible] den wird, deren [illegible] seits durch den [illegible] der Ellipse E sein [illegible] Punkt der Ebene [illegible].

Die Erzeugenden des Konoides, welche durch die Schnittpunkte mit der Geraden $\mathfrak{M}$ gehen, schneiden die Geraden $\mathfrak{M}$, aa', die Ellipse E und sind ferner der Ebene $(r_v r_h)$ parallel; ihre Spuren der Ellipsenebenen können daher auch erhalten werden als Schnittpunkte von E mit einem hyperbolischen Paraboloide, welches $\mathfrak{M}$ und (a,a') zu Leitlinien und $(r_v r_h)$ zur Richtebene hat, oder was dasselbe ist, als Schnittpunkte der Ellipse E mit demjenigen Kegelschnitte, in welchem die Ellipsenebene von dem hyperbolischen Paraboloide geschnitten wird. Man findet nun leicht, dass das Paraboloid ein gleichseitig-hyperbolisches und der letzt genannte Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist, identisch mit derjenigen, welche Chasles zur Lösung des Normalenproblems bei Kegelschnitten überhaupt anwandte, wie wir bereits a. a. O. gezeigt haben.

2. „Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel H, AA_1 die reelle, BB_1 die imaginäre Axe (Fig. 2.), m der Punkt, um dessen Krümmungsmittelpunkt es sich handelt".

In diesem Falle müssen wir von einem durch H gehenden Rotationskegel Gebrauch machen, da nach einem bekannten Satze von Daudelin der Focalkegelschnitt einer Hyperbel, d. i. der Ort der Scheitel aller durch dieselben gehenden Rotationskegel, eine Ellipse, also eine Curve mit nur in Endlichen gelegenen Punkten ist, u. zw. werden wir uns eines solchen bedienen, dessen Scheitel sich in der einfachsten Weise finden lässt.

Wenn wir die im vorigen Artikel getroffene Vorkehrung bezüglich der horizontalen und verticalen Projectionsebene beibehalten, so ist der Punkt, welcher den Hyperbelmittelpunkt O zur horizontalen und den Punkt B zur verticalen Projection hat, der Scheitel eines durch H gehenden Rotationskegels. Die Axe desselben hat $AA_1 \equiv a$ zur horizontalen, die durch B zu AA_1 gezogene Parallele a' zur verticalen Projection. Die durch den Punkt mm' gehende Erzeugende des Rotationskegels ist (Om, Bm'), (die horizontale Projection wurde in der Figur nicht ersichtlich gemacht), die durch mm' gehende Erzeugende der Normalenfläche hat die Normale N von m zur horizontalen, die Gerade $m'v'$ zur verticalen Projection, vv' ist ihr Schnittpunkt mit der Kegelaxe (a, a'); dieselbe ist normal zu der Tangentialebene des Kegels längs der Erzeugenden (Om, Bm'). Die horizontal projicirende Ebene $(e_v e_h)$ durch die Erzeugende $(mv, m'v')$ berührt die Normalenfläche in einem Punkte, dessen horizontale Projection uns den gesuchten Krümmungsmittelpunkt liefern wird, und werden wir diesen Punkt am einfachsten mit Hilfe eines sich anschmiegenden hyperbolischen Paraboloides finden, welches die Hyperbeltangente t im Punkte m, ferner die Axe (a, a') zu Leitlinien

hat, und dessen Richtebene vom ersten System senkrecht ist zur Erzeugenden (Om, Bm'). Die Richtebene des zweiten Systems ist die horizontale Projectionsebene selbst. Wir haben wieder die in der Ebene $e_v e_h$ liegende Erzeugende des zweiten Systems aufzusuchen, welche alle Erzeugende des ersten Systems schneiden und der Richtebene des zweiten Systems, also der Geraden $N \equiv e_h$ parallel sein muss. Eine Erzeugende des ersten Systems finden wir, indem wir durch den Schnittpunkt σ der Geraden t und AA_1 eine zu Bm' senkrechte Gerade führen, d. i. die Gerade r''_1; diese können wir als die verticale Trace einer durch σ zur Richtebene des ersten Systems parallel gelegten Ebene ansehen, und weil diese in der Ebene V liegt, so schneidet sie auch die Axe (a, a') und repräsentirt daher eine Erzeugende vom ersten System, welche die Ebene ($e_v e_h$) im Punkte dd' trifft. Der gesuchte Berührührungspunkt der Ebene e hat von der horizontalen Projectionsebene den Abstand $\overline{dd'}$ und kann daher durch Umlegung der Ebene e um ihre Trace e_h in die horizontale Projectionsebene wie folgt gefunden werden: Im Punkte v wird zu e_h eine Senkrechte errichtet, auf derselben von v aus eine Strecke $= vv'$ aufgetragen, ihr Endpunkt v_0 mit m verbunden, ferner auf der Verlängerung der vv_0 die Strecke $vd_0 = vd'$ gemacht und durch d_0 zu e_h eine Parallele geführt, welche mv_0 im Punkte K_0, dem umgelegten Berührungspunkte trifft; die horizontale Projection K desselben resultirt als Fusspunkt des aus K_0 zu e_h gefällten Perpendikels und ist der gesuchte Krümmungsmittelpunkt. Oder auch: Man verbinde den Punkt m mit dem Punkte v', ziehe durch d' zu e_h eine Parallele, welche die mv' im Punkte K_0' schneidet; die aus K_0' zu AA_1 gefällte Senkrechte schneidet $N \equiv e_h$ ebenfalls im Punkte K.

3. „Der Kegelschnitt ist eine Parabel P, A ihr Scheitel, F der Brennpunkt und m ein Parabelpunkt, dessen Krümmungsmittelpunkt K gesucht werden soll". (Fig. 3.)

Auch hier machen wir Gebrauch von einem Rotationskegel; wir finden den Scheitel AA' eines solchen, indem wir AA' senkr. auf AF und $\overline{AA'} = \overline{2AF}$ machen. Wird weiters $AA_1 = 2AF$ gemacht, so ist $A'A_1 \equiv a'$ die verticale Projection seiner Axe, während die horizontale a in die Parabelaxe fällt. Betreffs der weiteren Erklärungen glauben wir uns wegen der Analogie dieses Falles mit den früheren kürzer fassen zu können. Der Berührungspunkt der Ebene $e_v e_h$ mit der Hilfsnormalenfläche ergibt sich mit Hilfe eines Schmiegungsparaboloides, welches die Tangente t von P im Punkte m, die Axe (aa') zu Leitlinien und eine auf der Geraden (Am, $A'm'$) senkrechte Ebene zur Richtebene hat und nach diesem ergibt sich für K die folgende Construction: Man ziehe durch den Schnittpunkt σ [illegible]

und AF eine Gerade senkr. auf $A'm'$, welche e_v in d' trifft; sodann errichte man in v eine Senkrechte zur Normale N und trage auf derselben vom Punkte v aus nach der einen Seite eine Strecke $vv_0 = vv'$ und nach der andern $vd_0 = vd'$, verbinde den Punkt v_0 mit dem Punkte m, den Punkt d_0 mit dem Punkte h (nachdem man zuvor auf der Seite die Schnittlinie einer zu $e_v e_h$ parallelen Ebene $e^v{}_1 e^h{}_1$ mit einer zur Richtebene des zweiten Systems des Paraboloides parallelen Ebene (r), deren Tracen $(r)_v$, $(r)_h$ beziehungsweise parallel sind mit der Geraden a' und der Parabeltangente t, ermittelt hat); diese Schnittlinie ist in der Figur mit pq, $p'q'$ bezeichnet und durch den Punkt dd' wurde zu derselben eine Parallele gezogen, als deren horizontaler Durchstosspunkt sich hh' ergab), so schneiden sich die Geraden mv_0 und hd_0 in einem Punkte K_0; der Fusspunkt des aus demselben auf die Normale N gefällten Perpendikels ist der Krümmungsmittelpunkt K der Parabel P im Punkte m.

Brünn, 27. November 1883.



XVIII.

Miscellen.

1.

Zur Analyse sehr grosser Zahlen.

In weiterer Ausführung der von mir in T. II. S. 329 des Archivs skizzirten Methode, sehr grosse Zahlen in ihre Factoren aufzulösen, gebe ich zunächst ein Beispiel, bei welchem die verschiedenen Combinationen der für α gefundenen Werte besonders hervorgehoben werden; dann lasse ich diesem in grösserem Umfange entwickelten Beispiel die Anwendung der Methode auf einige andere Zahlen folgen, und es wird sich das Ergebnis herausstellen, „dass dies Ver-„fahren nicht nur dazu dient, um durch Gewinnung einer Anzahl „von Determinanten diejenigen Primzahlen ausscheiden zu können, „welche als Divisoren der gegebenen Zahl unmöglich sind, sondern „dass man vermöge desselben durchweg auf leichte Weise zu zwei „binären quadratischen Darstellungen für dieselbe Determinante und „somit zur unmittelbaren Bestimmung zweier Factoren gelangt. Da-„mit ist denn das Problem, sehr grosse zusammengesetzte Zahlen in „ihre Factoren auf leichte Weise aufzulösen, in einer, wie ich hoffe, „befriedigenden Weise gelöst". Es wird sich zugleich zeigen, dass für den Fall, in welchem die zu untersuchende Zahl eine Primzahl ist, sich gewisse Anzeigen herausstellen, welche zwar nur die Wahrscheinlichkeit nahe legen, dass man es mit einer Primzahl zu tun hat; indes ist diese doch so gross, dass sie Veranlassung genug

bietet, um auf dem Wege $a^{\frac{N-1}{2}} \equiv \pm 1 (N)$ *) die Wahrscheinlichkeit zur Gewissheit zu erheben.

Die Zahlen, welche ich zu Grunde lege, hatte ich bei Gelegenheit einer anderen Untersuchung als vorläufig zu umständlich für eine weitere Prüfung zurückgestellt; nach dieser neuen Methode konnte ich auf dieselben zurückkommen; es sind

$$17.2^{23}+1 = 142\ 606337$$
$$31.2^{24}+1 = 520\ 093697$$
$$17.2^{27}+1 = 2281\ 701377$$
$$7.2^{34}+1 = 120259\ 084289$$

Also zunächst

$$141.606337 = (11941-\alpha)^2+(23882-\alpha)\alpha+18856.$$

Bezeichnet man das zweite und dritte Glied der rechten Seite zusammen mit B, so erhält man durch directe Bestimmung, B teilbar durch 2^3, 2^4 etc., wenn

$\alpha = 2^3u+0, 2, 4, 6;$ $2^4u+4, 6, 12, 14;$ $2^5u+4, 6, 20, 22;$ $2^6u+4, 6, 36, 38;$ $2^7u+36, 38, 100, 102;$ $2^8u+36, 38, 164, 166;$ $2^9u+164, 166, 420, 422;$ $2^{10}u+164, 166, 676, 678;$ $2^{11}u+676, 678, 1700, 1702;$ $2^{12}u+1700, 1702, 3748, 3750:$

$\alpha = 11u+2, 10;$ $11^2u+21, 24$
$= 13u+3, 11;$ $13^2u+102, 102$
$= 17u+6, 8;$ $17^2u+25, 159$
$= 23u+13, 18:$ $23^2u+87, 519$
$= 37u+20, 34;$ $37^2u+626, 1352$ (1369)
$= 47u+24, 29;$ $47^2u+1904, 2097$ (2209)
$= 61u+39, 53;$ $61^2u+2174, 3103$ (3721)
$= 79u+47, 56;$ $79^2u+1074, 4085$ (6241)

Mittelbar findet man auch bei Benutzung der angeführten Werte folgende andere

$\alpha = 103u+39, 50$
$= 113u+50, 102$

---

*) Siehe die folgende Anmerkung.

$$\alpha = 149u + 6,\ 36$$
$$= 179u + 7,\ 68;\quad \text{u. s. w.}$$

Für $u = 0$ findet man

$$\alpha = 68,\quad B = 11.13.179.4^2$$
$$\alpha = 102,\quad B = 2.113.104^2$$
$$\alpha = 6,\quad B = 17.149.8^2$$
$$\alpha = 24,\quad B = 2.13.47.22^2$$
$$\alpha = 36,\quad B = 23.149.16^2$$

Für $u = -1$ (es sind nur die geraden Zahlen berücksichtigt)

$$\alpha = -130,\quad B = -11.61.68^2$$
$$= -10,\quad B = -2.13.92^2$$

Aus der Combination von $11u$, $13u$, 17 etc., für $u_1 = 0$ und -1,

$$\alpha = 76,\quad B = 11.13.17.47.4^2$$
$$\alpha = -166,\quad B = -2.11.13.23.151.2^2$$

Aus der Combination von $11u$, $13u$ etc. mit den Quadraten

$$\alpha = 2174,\quad B = 13.61.244^2$$
$$\alpha = 1904,\quad B = 2.23.103.94^2$$
$$\alpha = -1068,\quad B = -2.13.1012^2$$

Diese Werte mögen genügen.

Aus den beiden Werten für B, erstens $-2.13.92^2$ und $-2.13.1012^2$ ergiebt sich

$$17.2^{23} + 1 = 11951^2 - 2.13.92$$
$$= 13009^2 - 2.13.1012^2$$

und hieraus

$$17.2^{23} + 1 = 142\,606\,337 = 9871.14447.$$

Die zweite Zahl

$$N = 31.2^{24} + 1 = 520\,093\,697 = (22805 - \alpha)^2 + (45610 - \alpha)\alpha + 25672$$

liefert unter anderen folgende Darstellungen

$$\alpha = 8894 \quad 13911^2 + 7.19.83.172^2 = N \qquad (1)$$
$$\alpha = 4910 \quad 17895^2 + 19.83.356^2 = N \qquad (2)$$
$$\alpha = -10 \quad 22815^2 - 7.248^2 = N \qquad (3)$$

Eliminirt man aus (1) und (2) die Factoren 19 und 83 in den Deter-



minanten, und verbindet die gewonnene binäre quadratische Darstellung von $\mu . N$ mit (3), so findet sich

$$5200093697 = 3581 . 145\,237.$$

Für 145237 lässt sich dann noch setzen 311.467.

Die dritte Zahl

$$N = 17 . 2^{27} + 1 = 2281701377 = (47767 - \alpha)^2 + (95534 - \alpha)\alpha + 15088$$

bietet mehrere Zusammenstellungen dar, welche auf zwei Darstellungen nach dem Typus

$$ma^2 + nb^2 = \mu N$$

führen; beide Darstellungen gehören jedoch jedesmal einer und derselben Congruenz

$$(\pm w)^2 \equiv - mn (N)$$

an. Die Vermutung liegt also vor, dass N eine Primzahl ist.

Diese Vermutung wird durch den weiteren Umstand bestärkt, dass eine grössere Anzahl von Darstellungen eine Determinante darbietet, welche nur aus einem Factor besteht. In der Tat erhält man

$$2^{2^{26}} \equiv 1050986483 (17 . 2^{27} + 1)$$

und

$$2^{7 . 2^{26}} \equiv 1 (17 . 2^{27} + 1)$$

Da nun offenbar $\varphi(N)$, wenn φ wie gewöhnlich die Anzahl der relativen Primzahlen bezeichnet, in dem Falle, dass N zusammengesetzt wäre, kein Divisor von $7 . 2^{26}$ sein könnte, so ist eben

$$N = 2281701377$$

eine Primzahl *).

Die letzte Zahl

$$7 . 2^{34} + 1 = 120\,259\,084289 = (346\,783 - \alpha)^2 + (693\,566 - \alpha)\alpha + 635\,200$$

giebt für

$\alpha =$	1950	$344833^2 + 2 . 7 . 11 . 2960^2$
$\alpha =$	143432	$203\,351^2 + 7 . 106\,172^2$
$\alpha =$	-3836	$350\,619^2 - 2 . 11 . 110\,26^2$

und man findet auf ähnliche Weise, wie in dem zweiten Beispiele

$$120\,259\,084\,289 = 379 . 317\,306\,291$$

---

*) Diese zweite Ermittelung lässt sich wol vermeiden, wenn man bei den binären Darstellungen von μr, die Zahl μ vollständig berücksichtigt.

Um zum Schlusse zu kommen, will ich nur noch bemerken, dass es zweckmässig ist, wenn die vorliegende Zahl die Form $8n+3$, 5 oder 7 hat, die Darstellungen $3(a-\alpha)^2+3(2a-\alpha)\alpha+r$, $5(a-\alpha)^2+5(2a-\alpha)\alpha+r$, resp. $7(a-\alpha)^2+7(2a-\alpha)\alpha+r$ zu benutzen, damit man stets die Potenzen von 2 mit verwenden kann.

Bremen, im April 1885. P. Seelhoff.

2.

Der Feuerbach'sche Satz.

Der nachfolgende Beweis ist eine Modification desjenigen, welche Herr Schröter im 7ten Bande der mathematischen Annalen von Clebsch gegeben hat. Er ist rein geometrisch, dabei so einfach, kurz und übersichtlich, dass er sich recht gut den Elementen einreihen und als Schüleraufgabe verwerten lässt.

Im Dreieck ABC seien $A'B'C'$ die Mitten der Seiten, $J_a J_b J_c$ die Fusspunkte der Winkelhalbirenden und $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ die Berührungspunkte des eingeschriebenen Kreises. Man klappe das Dreieck um jede der Linien AJ_a, BJ_b, CJ_c herum, dann kommt es der Reihe nach in die Lage AB_aC_a, A_bBC_b, A_cB_cC, der eingeschriebene Kreis bleibt an seiner Stelle, während $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ auf demselben nach $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ und $A'B'C'$ nach $A_aB_bC_c$ fallen. $A_bA_c\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ ist ein gleichschenkliges Trapez, weil Wkl. $A_b = A_c = A$, folglich ist $\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ parallel und gleichgerichtet mit A_bA_c oder $B'C'$, ebenso $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'$ mit $A'B'$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ mit $A'C'$, parallel und gleichgerichtet, demnach sind die Dreiecke $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$ und $A'B'C'$ ähnlich und ähnlich liegend. Ihr äusserer Aehnlichkeitspunkt ist der Schnittpunkt T der Geraden $A'\mathfrak{A}'$, $B'\mathfrak{B}'$, $C'\mathfrak{C}'$. Die Linien A_bB_a, A_cC_a und B_cC_b sind parallel, denn fällt z. B. durch die Drehung um BJ_b der Punkt B_a nach B'_a, so ist $A_bB_a' = A_cB_c = AB_a$, demnach $B_cB_a' \parallel A_bA_c$, folglich $J_bB_a' : J_bA_b = J_bB_c : J_bC$ oder $J_bB_a : J_bA_b = J_bB_c : J_bC_b$ d. h. $A_bB_a \parallel C_bB_c$, ebenso folgt $A_cC_a \parallel C_bB_c$. Da ferner $\mathfrak{A}A_c = \mathfrak{A}A_b = A\mathfrak{B}$ und $A_aB_a = A_aC_a$ etc., so ist auch $\mathfrak{A}A_a \parallel A_bB_a \parallel \mathfrak{B}B_b \parallel \mathfrak{C}C_c$. Zufolge der Symmetrieaxe AJ_a ist $A'A_a\mathfrak{A}'\mathfrak{A}$ ein gleichschenkliges Trapez, daher Wkl. $\mathfrak{A}A_a\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}A'\mathfrak{A}' = A_cC_aB_a$, ferner $BA'C' = ACB = AC_aB_a$, folglich $TA'C' = AC_aA_c$. Ebenso folgt $TB'C' = BC_bB_c = AC_aA_c = TA'C'$, d. h. T liegt auf dem Kreise $A'B'C'$ und wegen $T\mathfrak{B}'\mathfrak{C}' = T\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'$ auch auf $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$. T ist aber auch für diese beiden Kreise äusserer Aehnlichkeitspunkt,

da er auf beiden liegt, so berührt der eine Kreis den andern einschliessend in T. Für die angeschriebenen Kreise wird der Beweis in ähnlicher Weise geführt.

Berlin, d. 1. December 1855. Dr. J. Lange.

3.

Integration einer Differentialgleichung.

Die Gleichung

$$\left(x-\frac{y}{y'}\right)(x+yy') = \text{Const}$$

erscheint, wie wol wenige, dazu geeignet, ein Bild zu geben von der Vielfachheit der Wege, auf denen die Integration einer Differentialgleichung zustande kommen kann. Denn fast alle die Hilfsmittel, denen sich die (als indirecte Rechnungsart) auf Probiren angewiesene Integration bedient, lassen sich mit Erfolg auf dieselbe anwenden.

I.

Da die Gleichung nicht homogen ist, so suchen wir zunächst die Integrale der entsprechenden Gleichung mit Weglassung des constanten Gliedes, um durch passende Wahl der Constanten in einer Combination derselben auch jene ursprüngliche zu integriren. Aus

$$\left(x-\frac{y}{y'}\right)(x+yy') = 0$$

folgt ohne weiteres

$$y_1 = cx, \quad y_2 = \sqrt{a^2-x^2}.$$

Setzen wir also in die ursprüngliche Gleichung ein

$$y = Ax + B\sqrt{a^2-x^2},$$

so folgt, indem die Constante mit e^2 bezeichnet wird,

$$\left(x-\frac{Ax+B\sqrt{a^2-x^2}}{A-\dfrac{Bx}{\sqrt{a^2-x^2}}}\right)\left[x+(Ax+B\sqrt{a^2-x^2})\left(A-\frac{Bx}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)\right] = e^2.$$

Aus dem Zähler des ersten Factors verschwindet die Variabele, so dass sich folgende Form herstellen lässt:

$$-Ba^2\left\{B-\frac{1}{B}-A\,.\,\frac{\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{B}-\frac{Bx^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+Ax}{Bx-A\sqrt{a^2-x^2}}\right\}=e^2.$$

Setzt man hierin die willkürliche Constante $A=0$, so folgt

$$B^2=\frac{a^2-e^2}{a^2},$$

also

$$y=\sqrt{\frac{a^2-e^2}{e^2}\,(a^2-x^2)}$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-e^2}=1.$$

II.

Löst man die Differentialgleichung nach y' auf, so folgt

$$y'=\frac{1}{2xy}\{e^2+y^2-x^2\pm\sqrt{(e^2+y^2-x^2)^2+4x^2y^2}\}.$$

Hieraus ersieht man als vorteilhaft die Quadrate als neue Variabeln einzuführen, also

$$x^2=\xi,\qquad y^2=\eta,$$

wodurch die Gleichung folgende Form annimmt:

$$\left(\xi-\frac{\eta}{\eta'}\right)(1+\eta')=e^2.$$

Durch dieselbe Operationsfolge, wie zuvor, erhält man das Combinationsintegral

$$\eta=A\xi+B(a-\xi)=\alpha\xi+\beta.$$

Bei Einsetzung desselben fällt die Variabele vollständig fort, indem entsteht:

$$e^2=\left(\xi-\frac{\alpha\xi+\beta}{\alpha}\right)(1+\alpha)=-\frac{1+\alpha}{\alpha}\beta\,;$$

also

$$\eta=\alpha\xi-\frac{1}{1+\alpha}e^2.$$

$$\frac{u\,du}{e^2u^2-1} = \frac{v\,dv}{e^2v^2+1}$$

oder

$$e^2u^2-1 = c(e^2u^2+1)$$

$$\frac{e^2}{c+1}u^2 - \frac{ce^2}{c+1}v^2 = 1.$$

Die Rückübertragung nach Punktcoordinaten ergiebt, wenn $\frac{e^2}{c+1} = a^2$ gesetzt wird,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-e^2} = 1.$$

VI.

Eine Behandlung derselben Differentialgleichung in der allgemeinen Form

$$(yy'-A^2x)(y-xy')-B^2y' = 0$$

mittelst unendlicher Reihen findet sich bei Martin Ohm, Höhere Analysis (Berlin 1831, Kap. XII, § 270, XVIII). In dieser Gleichung wäre, um auf unsere zu kommen, $A = i$, $B = ie$ zu setzen.

Als Resultat ergiebt sich also stets die confocale Schar der Curven zweiter Classe mit den Brennpunkten im Abstande e vom Coordinatenanfang. Letztere liegen auf der x oder y Axe, je nachdem e^2 positiv oder negativ angesetzt wird. Da nun der Vorzeichenwechsel von e^2 in der Endgleichung nur einer Vertauschung der Coordinatenaxen gleich kommt, und die Factoren in der ursprünglichen Differentialgleichung die Abscissen der Schnittpunkte der x Axe mit Tangenten und Normalen der Curve darstellen, so sehen wir: dass durch Tangenten und Normalen einer und derselben confocalen Kegelschnittschar auf ihren beiden Axen involutorische Reihen ausgeschnitten werden [auf der Hauptaxe mit Doppelpunkten, auf der Nebenaxe ohne solche], beide mit demselben Parameter gleich der constanten Excentricität aller Curven der Schar.

Durlach, October 1885.

Dr. Joseph Sachs.

4.

Zwei Kreissätze.

Lehrsatz 1.

Legt man durch einen der Durchschnittspunkte zweier sich schneidenden Kreise zwei Linien; so verhalten sich ihre Abschnitte, welche durch die beiden Kresdurchschnitte gebildet werden, wie die Sinus der Winkel, welche sie mit der gemeinschaftlichen Sehne der Kreise bilden.

Sind also durch den Punkt A der gemeinschaftlichen Sehne AB der Kreise M und M' zwei Linien gelegt, welche M in C und D, M' in C' und D' schneiden, so hat man:

$$CC' : DD' = \sin BAC : \sin BAD$$

Verbindet man nämlich C, C', D, D' mit B, so ist Dreieck CBC' ähnlich DBD' da die Winkel bei C und D, sowie bei C' und D' übereinstimmen, da nun ist

$$BC : BD = \sin BAC : \sin BAD,$$

so ist auch

$$CC' : DD' = \sin BAC : \sin BAD.$$

Das Eigentümliche dieses Satzes liegt darin, dass das Verhältniss jener beiden Abschnitte von den Radien der Kreise unabhängig ist; und dies zeigt sich noch mehr in

Lehrsatz 2.

Legt man durch einen der Durchschnittspunkte zweier sich schneidenden Kreise unter gleichen Winkeln mit der gemeinschaftlichen Sehne zwei Linien, so sind ihre Abschnitte, welche durch die beiden Kreisdurchschnitte gebildet werden, einander gleich.

Es ist also, wenn $BAC = BAD$ auch $CC' = DD'$, weil dann die Dreiecke CBC' und DBD' congruent sind.

In Hinsicht auf die gegenseitige Lage der Punkte C, C', D, D', A lassen sich in Bezug auf Lehrsatz 2. sechs Fälle unterscheiden:

1) C und C' liegen auf derselben Seite von A, ebenso D und D'.

2) C und C' liegen auf derselben Seite von A, D liegt in A. D. h. AD' ist Tangente des Kreises M, der als der grössere aufgefasst wird.

3) C und C' liegen auf derselben Seite von A, D und D' auf verschiedenen Seiten.

4) C' fällt in A, d. h. AC ist Tangente an den Kreis um M'. D und D' liegen auf verschiedenen Seiten von A; der Kreis M' ist alsdann als der kleinere gedacht.

5) C und C' liegen auf verschiedenen Seiten von A, ebenso D und D'.

6) Es ist noch der Fall hervorzuheben, dass Wkl. $ABC = ABD = R$.

Die Fälle No. 2) und 4) geben, da in No. 2) ABC und in No. 4) ABD' gleichschenklig sind:

Lehrsatz 3.

Verbindet man den Mittelpunkt des einen von zwei sich schneidenden Kreisen mit einem ihrer Durchschnittspunkte und zieht vom anderen Durchschnittspunkt eine senkrechte Sehne auf diesen Radius; so bildet diese mit der gemeinschaftlichen Sehne denselben Winkel, den die Tangente im Kreisdurchschnittspunkt bildet; und der von den beiden Kreisen gebildete Abschnitt dieser Sehne ist gleich der Sehne, welche die Tangente im anderen Kreise bildet.

Im Falle No. 6) fällt D in C und C' in D', also fallen die gleichen Abschnitte CC' und DD' in eine Linie. Alsdann ist diese Linie die grösste, welche man durch A so legen kann, dass ihre Endpunkte in die Kreisumfänge fallen. Es ist nämlich in No. 6) CBD' das grösste aller vorkommenden ähnlichen Dreiecke, weil BC und BD' Durchmesser der Kreise sind.

Dr. Adolf Beyssell.

XIX.

Potential einer elliptischen Walze.

Von

Herrn Dr **Ulrich Bigler**,
Privatdocent in Bern.

Erster Teil.

Einleitung.

Nach Heine (Kugelfunctionen II. S. 342) war Lagrange der erste (Oct. 1777), der den Gebrauch der Function $\Sigma\frac{m}{r}$ empfahl, um durch ihre Ableitungen nach x, y, z die Kraftcomponenten auszudrücken. Den Namen Potential für die Function hat Green zuerst (1828) angewandt, dann Gauss (1839). Im Sommersemester 1861 hielt Riemann in Göttingen Vorlesungen über Schwere, Elektricität und Magnetismus und aus derselben ist das Buch von Hattendorf „über Schwere, Elektricität und Magnetismus“ hervorgegangen, welches im Jahre 1880 bereits in 2. Auflage erschienen ist. §. 26. dieses Buches handelt von der Anziehung eines homogenen elliptischen Cylinders. Das Potential derselben wird hier als Unterschied zweier Functionen dargestellt, von welchen Hattendorf aber bemerkt, dass sie durch einfache Integrale nicht darstellbar seien. Demnach wäre also überhaupt die Darstellung des Potentials eines elliptischen Cylinders durch einfache Integrale unmöglich. Diese Behauptung ist um so auffallender, als in §. 28. gezeigt wird, dass die Kraftcomponente in der Richtung der z Axe als Potentialfunction einer Ellipsenfläche aufgefasst werden kann. Wie die Ausdrücke für die Abgeleiteten gefunden wurden, darüber sagt Hattendorf kein Wort. Ob sie von

Riemann oder Dirichlet herrühren, das ist aus der Arbeit nicht zu ersehen. Die auftretenden Formeln sind auch gar nicht die Kraftcomponenten des homogenen, elliptischen Cylinders, was man doch aus der Ueberschrift der Abhandlung erwarten sollte, sondern nur ein Teil davon und somit leidet der Abschnitt auch an dem Mangel dass er keine fertigen Formeln aufweist. Während nun über das Potential und die Kraftcomponenten eines homogenen Ellipsoides eine grosse Litteratur existirt, so ist hingegen dieselbe über den elliptischen Cylinder nur sehr klein. Die erste mir bekannte Arbeit ist die Dissertation des H. Grube in Hamburg aus dem Jahre 1859. In dieser Abdandlg. „de cylindri et coni attractione" werden die 3 Kraftcomponenten des geraden, elliptischen Cylinders durch Einführung von Kugelcoordinaten so weit behandelt, bis die Möglichkeit ihrer Darstellung durch elliptische Integrale eingesehen werden konnte. Der Integrand dieser Formeln ist aber so überladen, dass von einer Durchsichtigkeit keine Rede sein kann, und deswegen wurde auch der Verfasser gezwungen, den allgemeinen Fall zu verlassen und specielle Fälle zu behandeln, bei welchen die Reduction auf elliptische Integrale sich leicht vollziehen liess. Im Jahre 1861 versuchte nun Herr Röthig in Berlin auch das Potential des elliptischen Cylinders durch einfache Integrale auszudrücken, welche für alle Lagen des Bezugspunktes ihre Gültigkeit haben. Seine Arbeit findet sich in Crelle, Bd. 61., S. 180—186. Er geht dabei von dem Pot. eines Parallelepipedes aus, welches er im Jahre 1860 im Journal von Crelle, Bd. 58., S. 249. dargestellt hatte, und findet für dasselbe ein einfaches Integral, dessen Integrand auf rationale Weise aus Logarithmen und Arctg. zusammengesetzt ist, die aber eine verwickelte Form haben und weitere Betrachtungen sehr erschweren. Von sehr grossem Interesse ist die Methode des Herrn Beltrami in Pavia, nach welcher er von dem Potential einer zwischen zwei ähnlichen Ellipsoiden enthaltenen unendlich dünnen Schale aus zum Pot. einer homogenen, elliptischen Scheibe gelangt. Seine Abhandlung „über die Theorie der Anziehung der Ellipsoide" steht im ersten Bande der 4. Reihe der Denkschriften der Akademie der Wissenschaften des Instituts von Bologna und ist im April 1880 vorgetragen worden. Ueber diese Arbeit findet sich eine Recension im Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik (Bd. 12., S. 72.) von Herrn Bruns in Leipzig, welche sagt, dass die Methode neu und interessant sei, aber die Resultate seien doch der Hauptsache nach schon bekannt, oder doch aus bekannten ohne Schwierigkeit herzuleiten. Ob nun Herr Bruns die oben angeführten Arbeiten im Sinne hatte, weiss ich nicht. Meine weiteren Nachforschungen in dieser Beziehung blieben fruchtlos.

Es ist mir nun gelungen, das Pot. eines geraden, homogenen, elliptischen Cylinders auf elementarem Wege, allein durch Integration darzustellen, und die Formeln für dasselbe und die Kraftcomponenten sind so einfach und durchsichtig, dass sie ein Studium im ganzen unendlichen Raume zuliessen. Bei der Ableitung des Pot. eines elliptischen Ringes musste eine biquadratische Gleichung aufgelöst werden. Diese Auflösung erfolgte nach verschiedenen Methoden und das Interesse, welches eine jede darbietet, ist auch der Grund ihrer Veröffentlichung. Immerhin ist aber die Darstellung derselben nach jeder von diesen Methoden mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden, welche in gar keinem Verhältniss mit der Einfachheit des Endresultates stehen. Das Studium der auftretenden eigentümlichen Relationen liess mich deshalb auch schon lange einen viel einfacheren Weg vermuten, das Pot. des elliptischen Ringes darzustellen. Diese Vermutung hat sich denn auch auf das schönste verwirklicht, und die Methode findet sich in dieser Arbeit unter dem Titel: Von allen früheren unabhängige Berechnung des Pot. einer Ellipse, deren Dichtigkeit in jedem Punkte gleich ist dem Abstande des Mittelpunktes von der Tangente. Auch ist es mir gelungen, die gleiche Aufgabe mittelst des discontinuirlichen Factors von Dirichlet zu lösen.

So hoffe ich denn, durch vollständige Behandlung vorliegender Aufgabe, die Schwierigkeiten, die bis dahin einem gründlichen Studium des Pot. der elliptischen Walze im Wege stunden, beseitigt zu haben. Möge die Arbeit wolwollende Aufnahme finden.

Ich kann diese Gelegenheit nicht vorübergehen lassen, ohne noch unserem Altmeister der Mathematik, Herrn Prof. Schläfli in Bern, für seine freundliche Unterstützung in der Arbeit hier öffentlich meinen besten Dank auszusprechen.

I. Potential einer Ellipse, deren Dichtigkeit in jedem Punkte gleich ist dem Abstande des Mittelpunktes von der Tangente.

§. 1. Vorbereitung.

Wenn ein Punkt, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, einen Kreis mit dem Radius $\sqrt{A}$ durchläuft, so ist die Bahn eines andern, dessen Coordinaten X, Y, Z mit denen des ersten durch die Gleichungen

$$X = x, \quad Y = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} y$$

verbunden sind, eine Ellipse mit den Halbaxenquadraten A und B. Denn es ist

$$x^2+y^2 = X^2 + \frac{A}{B} Y^2 = A,$$

also

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1.$$

Die Ellipse entsteht also aus einem Kreise durch Multiplication aller Ordinaten mit dem constanten Verhältniss $\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}$. Ist demnach der Inhalt eines Kreissectors $\frac{A\,d\varphi}{2}$, so ist der Inhalt des entsprechenden Ellipsensectors $\frac{A\,d\varphi}{2} \times \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}} = \frac{\sqrt{AB}}{2}\,d\varphi$. Die Richtigkeit dieses Resultates ergibt sich auch sofort, wenn man bedenkt, dass die Ellipse

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1$$

als die Projection eines Kreises aufgefasst werden kann, welcher um seinen Durchmesser $\sqrt{A}$ soweit aus der Projectionsebene herausgedreht wird, bis seine Ebene mit derselben einen Winkel bildet, dessen Cosinus $\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{A}}$ ist. Wenn ich nun das Curvenelement der Ellipse mit ds und das Perpendikel vom Mittelpunkte auf die Tangente mit p bezeichne, dann ist der Inhalt des Ellipsensectors auch gleich $\frac{p\,ds}{2}$. Die Gleichung einer der vorigen ähnlichen Ellipse hat die Form

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = (1+\varepsilon)^2$$

oder

$$\frac{X^2}{A(1+\varepsilon)^2} + \frac{Y^2}{B(1+\varepsilon)^2} = 1$$

und die Inhalte der Sectoren, welche zwischen denselben Radienvectoren liegen, verhalten sich demnach wie die Quadrate entsprechender Radien. Wenn ich die Sectoren mit S und S' und die zugehörigen Radien mit r und r' bezeichne, so ergibt sich also die Proportion

$$S : S' = r^2 : r'^2$$

Nun aber ist

$$r' = (1+\varepsilon) r$$

folglich

$$S' = (1+\varepsilon)^2 S$$

Das Element des elliptischen Ringes, welcher von den beiden Ellipsen

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=1$$

und

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=(1+\varepsilon)^2$$

begrenzt wird, ist demnach

$$S'-S=(1+\varepsilon)^2S-S=S((1+\varepsilon)^2-1)$$

und für den Fall eines sehr kleinen ε

$$2\varepsilon S=\varepsilon\sqrt{AB}\,.\,d\varphi$$

oder weil

$$\sqrt{AB}\,d\varphi=pds$$

ist, auch gleich

$$\varepsilon p ds$$

Ist dieser Ring nun mit Masse von der constdnten Dichtigkeit ϱ belegt. dann lässt sich das Massenelement derselben durch den Ausdruck

$$\varrho\varepsilon\sqrt{AB}\,d\varphi=\varrho\varepsilon pds$$

darstellen. Derselbe ist also dem Perpendikel aus dem Mittelpunkte auf die Tangente proportional. Wenn nun r den Abstand des Bezugspunktes mit den Coordinaten x, y, z von einem Punkte der Ellipse

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}=1$$

bezeichnet, dann lässt sich das Potential des elliptischen Ringes durch das Integral

$$T=\int_0^{2\pi}\frac{\varrho\varepsilon\sqrt{AB}\,.d\varphi}{r}=\varrho\varepsilon\int\frac{pds}{r}$$

darstellen. Da nun der Factor $\varrho\varepsilon$ für denselben eine constante Grösse ist, so lasse ich ihn vor der Hand weg und betrachte also das Potential einer Ellipse, deren Dichtigkeit in jedem Punkte gleich dem Abstande des Mittelpunktes von der Tangente ist. Dieses Potential sei mit T' bezeichnet. Also

$$T'=\int\frac{pds}{r}=\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{AB}d\varphi}{r}$$

§. 2. Uebersicht der Formeln, die zur Auflösung einer Gleichung 4. Grades dienen.

Das Polynom 4. Grades habe die Form

1. $$p = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0.$$

Um das Glied vom 3. Grade wegzuschaffen, multiplicire ich dasselbe mit a^3, also

1'. $$a^3p = a^4x^4 + 4a^3bx^3 + 6a^3cx^2 + 4a^3dx + a^3e = 0$$

Weil

$$(ax+b)^4 = a^4x^4 + 4a^3bx^3 + 6a^2b^2x^2 + 4ab^3x + b^4$$

ist, so setze man

$$ax + b = y$$

dann folgt

$$a^4x^4 + 4a^3bx^3 = y^4 - (6a^2b^2x^2 + 4ab^3x + b^4)$$

Wird dieses in Gleichung 1'. eingesetzt, so ergibt sich

1''. $$a^3p = y^4 - 6a^2b^2x^2 - 4ab^3x - b^4 + 6a^3cx^2 + 4a^3dx + a^3e = 0$$

Es ist aber

$$-6a^2b^2x^2 + 6a^3cx^2 = (ax)^2(ac - b^2)6$$

ferner

$$-4ab^3x + 4a^3dx = 4ax(a^2d - b^3)$$

und wenn man für ax obigen Wert einsetzt und zugleich die Abkürzungen

$$A' = ac - b^2$$
$$B' = a^2d - 3bac + 2b^3$$
$$C^3 = a^3e - 4a^2bd + ab^2c - 3b^4$$

einführt, so erhält man die Gleichung, in welcher das Glied vom 3. Grade nicht mehr vorhanden, in der Form

2. $$a^3p = y^4 + 6A'y^2 + 4B'y + C'$$

Die Wurzeln dieser Gleichung seien mit $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, $-\delta$ bezeichnet, dann folgt, wenn das Zeichen

$$\Sigma C_n(a, b, \ldots)$$

die Summe aller Combinationen der eingeklammerten Elemente zur n Classe bedeutet

$$\Sigma C_1(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta) = 0$$
$$\Sigma C_2(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta) = 6A'$$
$$\Sigma C_3(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta) = -4B'$$
$$\Sigma C_4(-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta) = C'$$

Man setze nun

$$\alpha+\beta=r;\quad \alpha+\gamma=r';\quad \alpha+\delta=r'';$$

dann folgt

$$\delta+\gamma=-r,\ \beta+\delta=-r',\ \beta+\gamma=-r''$$

ferner

$$\Sigma C_2(-\alpha,-\beta,-\gamma,-\delta)=(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)+\alpha\beta+\gamma\delta=6A'$$
$$=-r^2+\alpha\beta+\gamma\delta=6A'$$

also

$$\text{a.}\quad 6A'+r^2=\alpha\beta+\gamma\delta$$

Ebenso ist

$$\Sigma C_3(-\alpha,-\beta,-\gamma,-\delta)=\alpha\beta(\gamma+\delta)+\gamma\delta(\alpha+\beta)=4B'$$
$$=\alpha\beta(-r)+\gamma\delta r=4B'$$

folglich

$$\text{b.}\quad \frac{4B'}{r}=\gamma\delta-\alpha\beta$$

Werden nun die Werte unter *a* und *b* in die identische Gleichung

$$(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\gamma\delta-\alpha\beta)^2-4\alpha\beta\gamma\delta=0$$

eingesetzt, so folgt

$$(r^2+6A')^2-\frac{16B'^2}{r^2}-4C=0$$

Dieser Gleichung genügt nicht nur r^2, sondern auch, wie leicht gezeigt werden kann, r'^2 und r''^2; ihre Wurzeln sind demnach r^2, r'^2 und r''^2. Durch die Substitution

$$r^2=t$$

geht dieselbe in

$$3.\qquad t^3+12A't^2+4(gA'^2-C)t-16B^2=0$$

über und die Wurzeln der Gleichung 2. werden aus den r durch folgende Wurzeln bestimmt:

$$\alpha=\tfrac{1}{2}(r+r'+r'')$$
$$\beta=\tfrac{1}{2}(r-r'-r'')$$
$$\gamma=\tfrac{1}{2}(-r+r'-r'')$$
$$\delta=\tfrac{1}{2}(-r-r'+r'')$$

Weil

$$r'r''=\alpha^2+\alpha(\gamma+\delta)+\gamma\delta=\alpha(\alpha+\gamma+\delta)+\gamma\delta$$
$$=-\alpha\beta+\gamma\delta$$
$$=\frac{4B'}{r}$$

ist, so hat man für die r die Bedingung

$$rr'r'' = 4B'$$

durch welche das Vorzeichen des dritten r bestimmt wird, wenn diejenigen der zwei ersten willkürlich gewählt werden. In der Gl. 3. soll das Glied vom 2. Grade weggeschafft werden. Es ist

$$(t+4A')^3 = t^3 + 12t^2A' + 48A'^2t + 64A'^3$$

also für

$$t + 4A' = s$$

erhält man

$$t^3 + 12A't^2 = s^3 - (48A'^2t + 64A'^3)$$

Wird dieser Wert in Gleichung 3. eingesetzt, so folgt

$$s^3 - 4(3A'^2 + C')t - 16(B'^2 + 4A'^3) = 0$$

und für

$$t = s - 4A'$$

geht diese letzte Formel in

3'. $$s^3 - 4(3A'^2 + C')s + 16(-A'^3 + A'C' - B'^2) = 0$$

über. Die quadratische Invariante der Gleichung 1. werde mit I und die kubische mit $\varDelta$ bezeichnet, dann erhält man für dieselben folgende Ausdrücke:

$$I = ae - 4bd + 3c^2$$
$$\varDelta = ace - a^2d - c^3 + 2bcd - b^2e$$

oder auch

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix}$$

Zwischen diesen Invarianten und den Coefficienten der aus der Gl. 1. mittelst der Substitution $x = \frac{y-b}{a}$ abgeleiteten Gl. 2., welche in der allgemeinen Form

$$ay^4 + 4b_1y^3 + 6c_1y^2 + 4d_1y + e_1 = 0$$

geschrieben werden kann, bestehen die Relationen

$$a_1e_1 - 4b_1d_1 + 3c_1^2 = \left(\frac{1}{a}\right)^4 a^6 I$$
$$= a^2 I$$

und

$$a_1c_1e_1 - a_1d_1^2 - c_1^3 + 2b_1c_1d_1 - b_1^2c_1 = \left(\frac{1}{a}\right)^6 a^9 \varDelta$$
$$= a^3 \varDelta$$

In unserem Falle ist aber

$$a_1 = 1,\ b_1 = 0,\ c_1 = A',\ d_1 = B',\ e_1 = C'$$

folglich erhält man aus obigen Relationen

$$3A' + C' = a^2 I$$

und

$$A'C' - B'^2 - A'^3 = a^3 \Delta$$

Die Richtigkeit dieser beiden letzten Formeln ergibt sich auch aus den auf Seite 343 für A', B' und C' angegebenen Abkürzungen. Aus Gleichung 3′ geht somit

$$3''. \qquad s^3 - 4a^2 Is + 16a^3\Delta = 0$$

hervor, und setzt man hier

$$s = 2au$$

so geht dieselbe in

$$4. \qquad u^3 - Iu + 2\Delta = 0$$

über.

§. 3. Auflösung der Gleichung $e^{2i\varphi}r^2 = 0$ durch algebraische Betrachtungen.

Da die Coordinaten irgend eines Punktes der Ellipse

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1$$

durch $\sqrt{A}\cos\varphi$ und $\sqrt{B}\sin\varphi$ ausgedrückt werden können, so erhält man für die Entfernung r^2 die Formel

$$r^2 = (\sqrt{A}\cos\varphi - x)^2 + (\sqrt{B}\sin\varphi - y)^2 + z^2$$

oder

$$= x^2 + y^2 + z^2 + A\cos\varphi^2 + B\sin^2\varphi - 2\sqrt{A}\cos\varphi . x - 2\sqrt{B}\sin\varphi . y$$

Setzt man nun in den bekannten Ausdrücken für

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

$$e^{i\varphi} = \Phi$$

also

$$\cos\varphi = \frac{\Phi^2 + 1}{2\Phi} \quad \text{und} \quad \sin\varphi = \frac{\Phi^2 - 1}{2i\Phi}$$

und substituirt diese Werte in die Formel für r^2, so erhält man

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{A(\Phi^2+1)^2}{4\Phi^2} - \frac{B(\Phi^2-1)^2}{4\Phi^2} - 2\sqrt{A}\frac{x(\Phi^2+1)}{2\Phi}$$
$$- 2\sqrt{B}\frac{y(\Phi^2-1)}{2i\Phi}$$

oder

$$4\Phi^2 r^2 = 4(x^2+y^2+z^2)\Phi^2 + A(\Phi^2+1)^2 - B(\Phi^2-1)^2$$
$$- 4\sqrt{A}x(\Phi^2+1)\Phi + 4\sqrt{B}y(\Phi^2-1)\Phi i$$

$$4\Phi^2 r^2 = (A-B)\Phi^4 - 4(\sqrt{A}x - i\sqrt{B}y)\Phi^3 + (4(x^2+y^2+z^2)$$
$$+ 2(A+B))\Phi^2 - 4(\sqrt{A}x + i\sqrt{B}y)\Phi + (A-B)$$

und wenn wir noch auf beiden Seiten mit 3 multipliciren, so bekommt die aufzulösende Gleichung $\Phi^2 r^2 = 0$ die Form

$$5.\quad 3(A-B)\Phi^4 - 12(\sqrt{A}x - i\sqrt{B}y)\Phi^3 + 6(2(x^2+y^2+z^2)$$
$$+ (A+B))\Phi^2 - 12(\sqrt{A}x + i\sqrt{B}y)\Phi + 3(A-B) = 0$$

oder auch, wenn

$$\bar{a} = 3(A-B),\quad \bar{b} = -3(\sqrt{A} - i\sqrt{B}y)$$
$$\bar{c} = 2(x^2+y^2+z^2) + (A+B),\quad \bar{d} = -3(\sqrt{A}x + i\sqrt{B}y)$$
$$\bar{e} = 3(A-B)$$

gesetzt wird

$$5'.\quad \bar{a}\Phi^4 + 4\bar{b}\Phi^3 + 6\bar{c}\Phi^2 + 4\bar{d}\Phi + \bar{e} = 0$$

Die Auflösung dieser Gleichung lässt sich aber nach den Bombellischen Regeln auf die Auflösung einer kubischen Gleichung von der Form

$$u^3 - Iu + 2\Delta = 0$$

zurückführen, wo die beiden Invarianten I und Δ durch die Formeln

$$I = \overline{ae} - 4\overline{bd} + 3\bar{c}^2$$
$$= 3(3(A-B)^2 - 12(Ax^2+By^2) + (2(x^2+y^2+z^2) + (A+B))^2)$$

und

$$\Delta = \overline{ace} - \overline{ad}^2 - \bar{c}^3 + 2\overline{bcd} - \bar{b}^2\bar{e}$$
$$= \bar{c}(g(A-B)^2 + 18(Ax^2+By^2) - \bar{c}^2) - 54(A-B)(Ax^2 - By^2)$$

bestimmt werden.

a. Auflösung der Gleichung $u^3 - Iu + 2\Delta = 0$ durch Betrachtung der beiden Invarianten I und Δ.

Durch den Bezugspunkt gehen drei confocale Flächen mit den dritten Halbaxenquadraten t, t' und t''. Diese Halbaxenquadrate sind die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{A+u} + \frac{y^2}{B+u} + \frac{z^2}{u} = 1$$

oder

6. $u^3-(x^2+y^2+z^2-(A+B))u^2-(B(x^2+z^2)+A(y^2+z^2)-AB)u$
$-ABz^2=0$

und folgenden Bedingungen unterworfen:

$$t>0>t'>-B>t''>A$$

Ferner folgen aus Gleichung (6.) für dieselben die Relationen

$$\Sigma C_1(t,\ t',\ t'') = x^2+y^2+z^2-(A+B)$$
$$\Sigma C_2(t,\ t',\ t'') = AB-(Bx^2+Ay^2)-(A+B)z^2$$

Das Zeichen Σ sei eine Abkürzung für eine Summe, die nach den Buchstaben fortschreitet; findet hingegen ein Fortschritt nach Accenten statt, so werde das Zeichen S angewendet. Mithin ist

$$S(t) = x^2+y^2+z^2-(A+B)$$

oder

$$x^2+y^2+z^2 = (A+t)+(B+t')+t''$$

Da die Elemente auf der rechten Seite dieser Gleichung verschieden gruppirt werden können, so ist in dieser Relation der Satz enthalten, dass die Entfernung des Bezugspunktes vom Mittelpunkte gleich ist der Summe je dreier ungleichnamiger Halbaxenquadrate der durch ihn gehenden confocalen Flächen. Weil

$$Ax^2+By^2 = (A+B)(x^2+y^2+z^2)-Bx^2-Ay^2-(A+B)z^2$$
$$+AB-AB$$

ist, so folgt nach obigen Relationen

$$Ax^2+By^2 = (A+B)(S(t)+(A+B))+S(t't'')-AB$$
$$= (A+B)S(t)+S(t't'')+A^2+B^2+AB$$

und demnach

$$\tfrac{1}{3}I = 3(A-B)^2-12(S(t't'')+(A+B)S(t)+A^2+B^2+AB)$$
$$+(2S(t)+3(s+B))^2$$
$$= 3(A-B)^2-12S(t't'')-12(A+B)S(t)-12(A^2+B^2+AB)$$
$$+4(S(t))^2+12(A+B)S(t)+9(A+B)^2$$

Es ist aber

$$4(S(t))^2 = 4S(t^2)+8S(t't'')$$

und

$$9(A+B)^2+3(A-B)^2 = 12(A^2+B^2+AB)$$

folglich

$$I = 12(S(t^2)-S(t't''))$$

Aus der Theorie der confocalen Flächen folgt ferner

$$x^2 = \frac{(A+t)(A+t')(A+t'')}{A(A-B)},\quad y^2 = \frac{(B+t)(B+t')(B+t'')}{\ldots A)}$$

$$z^2 = \frac{tt't''}{AB}$$

demnach

$$Ax^2 = \frac{1}{A-B}(tt't''+AS(t't'')+A^2S(t)+A^3)$$

und ebenso

$$-By^2 = \frac{1}{A-B}(tt't''+BS(t't'')+B^2S(t)+B^3)$$

folglich

$$Ax^2-By^2 = \frac{1}{A-B}(2tt't''+(A+B)S(t't'')+(A^2+B^2)S(t)+A^3+B^3)$$

$$Ax^2+By^2 = ((A+B)S(t)+S(t't'')+A^2+B^2+AB)$$

ferner ist

$$\bar{c} = 2S(t)+3(A+B)$$

also

$$\bar{c}^2 = 4S(t^2)+8S(t't'')+12(A+B)S(t)+9A^2+9A^2+18AB$$

und demnach

$$9(A-B)^2+18(Ax^2+By^2)-\bar{c}^2 = -4S(t^2)+6(A+B)S(t) \\ +10S(t't'')+18(A^2+B^2-AB)$$

folglich auch

$$\bar{c}(9(A-B)^2+18(Ax^2+By^2)-\bar{c}^2) = (-4S(t^2)+6(A+B)S(t) \\ +10S(t't'')+18(A^2+B^2-AB)(2S(t)+3(A+B))$$

Nun ist

$$S(t't'')S(t) = 3tt't''+S(t^2(t'+t''))$$

und

$$S(t)S(t) = S(t^2)+2S(t't'')$$

ferner

$$S(t^2)S(t) = S(t^3)+S(t^2(t'+t''))$$

demnach

$$\bar{c}(9(A-B)^2+18(Ax^2+By^2)-\bar{c}^2) = 60tt't''+12S(t^2('+t'')) \\ -8S(t^3)+54(A+B)S(t't'')+54(A^2+B^2)S(t)+54(A^3+B^3)$$

und weil

$$54(A-B)(Ax^2-By^2) = 108tt't''+54(A+B)S(t't'') \\ +54(A^2+B^2)S(t)+54(A^3+B^3)$$

ist, so bekommt man für die kubische Invariante die Formel

$$\Delta = 12S(t't''(t'+t''))-8S(t^3)-48tt't''$$

Um diesen Ausdruck in Factoren zerlegen zu können, ordnen wir denselben nach Potenzen von t. Demnach ist

$$\Delta = 4(-9t^3+3t^2(t'+t'')+3t(t'^2+t''^2-4t't'')-2(t'^3+t''^3) \\ +3t't''(t'+t'')$$

Hier kann aber das von t freie Glied leicht in Factoren zerlegt werden, Es ist

$$-2(t'^3+t''^3)+3t't''(t'+t'') = (t'+t'')(-2t'^2+5t't''-2t''^2)$$
$$= (t'+t'')(t'-2t'')(-2t'+t'')$$

mithin

$$\Delta=4(-2t^3+3t^2(t'+t'')+3t(t''^2+t'^2-4t't'')+(t'+t'')(t'-2t'')(-2t'+t'')$$

Die Gleichung $\Delta = 0$ liefert nun für t drei verschiedene Wurzeln, die aus den Coefficienten sogleich abgelesen werden können. Die Werte derselben sind

$$\frac{t'+t''}{2},\quad \frac{2t'-t''}{2},\quad \frac{2t''-t'}{2}$$

folglich ist

$$\Delta = 4\Pi(-2t+t'+t'')$$

und die Gleichung

$$u^3-Iu+2\Delta=0$$

bekommt nun folgende Gestalt

$$u^3-12(S(t^2)-S(t't''))u+8\Pi(-2t+t'+t'') = 0$$

Zum Zwecke der Auffindung der Wurzeln dieser Gleichung zerlege man noch die Invariante I in eine Summe von drei Termen, deren jeder aus zwei Factoren besteht. Weil

$$(t'-t'')^2+(t''-t)^2+(t-t')^2 = 2(S(t^2)-S(t't'')$$

so ist

$$I = 6S(t'-t'')^2$$

und da

$$S(t'-t'') = 0$$

ist, so ist auch

$$S(t'-t'') = -2S(t'-t'')(t''-t)$$

Ferner folgt

$$S(t+t''-2t')(t'+t-2t'') = -(2S(t'-t'')^2+S(t'-t'')(t''-t))$$

also auch

$$= -3/2S(t'-t'')^2$$
$$= -\frac{I}{4}$$

demnach

$$-I = 4S(t+t''-2t')(t'+t-2t'')$$

und somit die aufzulösende Gleichung

$$u^3+4S(t+t''-2t'')(t'+t-2t'')u+8\Pi(-2t+t'+t'') = 0.$$

In dieser Form nun liegen die Wurzelwerte klar vor Augen. Werden dieselben mit u, u' und u'' bezeichnet, so erhält man

$$\begin{aligned} u &= 2(2t - t' - t'') \\ u' &= 2(2t' - t'' - t) \\ u'' &= 2(2t'' - t - t') \end{aligned}$$

Ich setze ferner

$$\alpha = t' - t'', \quad \alpha' = t'' - t, \quad \alpha'' = t - t'$$

also

$$\alpha + \alpha' + \alpha'' = 0,$$

dann ist

$$\begin{aligned} I &= 6(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2) \\ &= 12(\alpha'^2 + \alpha'\alpha'' + \alpha''^2) \\ &= -4S(\alpha' - \alpha'')(\alpha'' - \alpha) \end{aligned}$$

und

$$2\Delta = 8\Pi(\alpha' - \alpha'')$$

folglich

$$u^3 + 4S(\alpha' - \alpha'')(\alpha' - \alpha) + 8\Pi(\alpha' - \alpha'') = 0$$

und

$$\begin{aligned} u &= 2(\alpha'' - \alpha') \\ u' &= 2(\alpha - \alpha'') \\ u'' &= 2(\alpha' - \alpha) \end{aligned}$$

Wird schliesslich

$$\beta = \alpha'' - \alpha', \quad \beta' = \alpha - \alpha'', \quad \beta'' = \alpha' - \alpha$$

gesetzt, dann folgt

$$\begin{aligned} I &= -4S(\beta'\beta'') \\ 2\Delta &= -8\beta\beta'\beta'' \end{aligned}$$

also auch

$$u^3 + 4S(\beta'\beta'')u - 8\beta\beta'\beta'' = 0$$

oder

$$(u - 2\beta)(u - 2\beta')(u - 2\beta'') = 0.$$

b. Auflösung der Gleichung $u^3 - Iu + 2\Delta = 0$ mittelst der Cardanischen Formel.

Ich setze

$$u = p + q$$

also

$$u^3 = 3pq.u + (p^3 + q^3)$$

oder

$$u^3 - 3pqu - (p^3 + q^3) = 0.$$

Soll diese Gleichung nun mit der aufzulösenden Gleichung identisch sein, so muss

$$3pq = I$$

und

$$\frac{p^3+q^3}{2} = -\Delta$$

sein. Es ist nun

$$(p^3+q^3)^2 - 4q^3p^3 = (p^3-q^3)^2$$

also

$$(p^3-q^3)^2 = 4\Delta^2 - 4(\tfrac{1}{3}I)^3$$

oder

$$\left(\frac{p^3-q^3}{2}\right)^2 = \Delta^2 - (\tfrac{1}{3}I)^3$$

demnach

$$\frac{p^3-q^3}{2} = \pm\sqrt{\Delta^2-(\tfrac{1}{3}I)^3}$$

folglich

$$p^3 = -\Delta \pm \sqrt{\Delta^2-(\tfrac{1}{3}I)^3}$$

und

$$q^3 = -\Delta \mp \sqrt{\Delta^2-(\tfrac{1}{3}I)^3}$$

Wir hatten aber gefunden, dass

$$I = 12(\alpha'^2+\alpha'\alpha''+\alpha''^2)$$

und

$$\Delta = 4\Pi(\alpha'-\alpha'')$$

ist. Weil aber

$$\alpha''-\alpha = \alpha'+2\alpha'', \qquad \alpha-\alpha' = -2\alpha'-\alpha''$$

so folgt auch

$$\Delta = -4(2\alpha'^3+2\alpha'^2\alpha''-3\alpha'\alpha''^2-2\alpha''^3)$$

somit ist

$$\Delta^2 = 16(4\alpha'^6+12\alpha'^5\alpha''-3\alpha'^4\alpha''^2-26\alpha'^3\alpha''^3-3\alpha'^2\alpha''^4+12\alpha'\alpha''^5+4\alpha''^6)$$

Ebenso folgt, dass

$$(\tfrac{1}{3}I)^3 = 4^3(\alpha'^2+\alpha'\alpha''+\alpha''^2)^2(\alpha'^2+\alpha'\alpha''+\alpha''^2) = 4^3(\alpha'^4 \text{[illegible]}$$
$$+2\alpha'^3\alpha''+3\alpha'^2\alpha''^2+2\alpha'\alpha''^3+\alpha''^4)(\alpha'^2 \text{[illegible]} \alpha'\alpha''+\alpha''^2)$$
$$= 4^3(\alpha'^6+3\alpha'^5\alpha''+6\alpha'^4\alpha''^2+7\alpha'^3\alpha''^3+6\alpha'^2\alpha''^4+3\alpha'\alpha''^5+\alpha''^6)$$

ist und demnach auch

$$-(\tfrac{1}{3}I)^3 = 4^2(-4\alpha'^6-12\alpha'^5\alpha''-24\alpha'^4\alpha''^2-28\alpha'^3\alpha''^3-24\alpha'^2\alpha''^4-12\alpha'\alpha''^5$$
$$-4\alpha''^6)$$

folglich

$$\Delta^2-(\tfrac{1}{3}I)^3 = 16(-27\alpha'^4\alpha''^2 \text{[illegible]})$$
$$= 16(-27\alpha'^2\alpha''^2 \text{[illegible]})$$
$$= 16(-27\alpha'^2\alpha''^2 \text{[illegible]})^2$$

somit

$$\frac{p^3 - q^3}{2} = \pm 12 i \sqrt{3}\, \alpha' \alpha'' (\alpha' + \alpha'')$$

und

$$\frac{p^3 + q^3}{2} = 4(2\alpha'^3 + 3\alpha'^2 \alpha'' - 3\alpha' \alpha''^2 - 2\alpha''^3)$$

demnach, wenn man in der Formel $\frac{p^3 - q^3}{2}$ nur das pos. Zeichen berücksichtigt,

$$p^3 = 8\alpha'^3 + 12 i \sqrt{3}\alpha'^2\alpha'' + 12\alpha'^2\alpha'' + 12 i \sqrt{3}\alpha'\alpha''^2 - 12\alpha'\alpha''^2 - 8\alpha''^3$$

$$= 8\alpha'^3 - 24\alpha'^2\alpha''\left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) + 24\alpha'\alpha''^2\left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right) - 8\alpha''^3$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 - 1 = 0$$

sind

$$e^{2i\pi}, \quad e^{\frac{2}{3}i\pi}, \quad e^{\frac{4}{3}i\pi}$$

oder

$$1, \quad \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

und wenn man die Abkürzungen

$$\varrho = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{und} \quad \varrho' = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

einführt, so erhält man für dieselben die Relationen

$$1 + \varrho + \varrho' = 0; \quad \varrho + \varrho' + \varrho\varrho' = 0; \quad \varrho\varrho' = 1; \quad \varrho^3 = 1$$

also

$$\frac{1}{\varrho} = \varrho^2; \quad \frac{1}{\varrho'} = \varrho'^2; \quad \varrho^2 = \varrho'; \quad \varrho'^2 = \varrho; \quad \varrho^2 + \varrho + 1 = 0$$

Folglich ergibt sich

$$p^3 = 8(\alpha'^3 - 3\alpha'^2\alpha''\varrho' + 3\alpha'\alpha''^2\varrho - \alpha''^3)$$

oder

$$= 8(\alpha'^3 - 3\alpha'^2\varrho^2\alpha'' + 3\alpha'\alpha''^2\varrho^4 - \varrho^6\alpha''^3)$$

also ist

$$p^3 = 2^3(\alpha' - \varrho^2\alpha'')^3 = 2^3\varrho^3(\alpha'\varrho^2 - \varrho\alpha'')^3$$

demnach

$$p = 2(\alpha'\varrho^2 - \alpha''\varrho)$$

Um den Wert von q für das pos. Zeichen zu erhalten, haben wir nur in der Formel für p i durch $-i$ oder was dasselbe ist, ϱ^2 durch ϱ zu ersetzen. Also ist

$$q = 2(\alpha'\varrho - \alpha''\varrho^2)$$

Bei der Berücksichtigung des neg. Zeichens in der Formel für $\frac{p^3-q^3}{2}$ erhält man auf ganz ähnliche Weise

$$p = 2(\alpha'\varrho'^2 - \alpha''\varrho') = 2(\alpha'\varrho - \alpha''\varrho^2)$$

und

$$q = 2(\alpha'\varrho' - \varrho'^2\alpha'') = 2(\alpha'\varrho^2 - \alpha''\varrho)$$

Es ist demnach ganz gleichgültig, welches Zeichen gewählt wird. Werden nun die Wurzeln der aufzulösenden Gleichung

$$u, \quad u', \quad u''$$

bezeichnet, so erhält man für dieselben

$$\begin{aligned} u &= p+q = 2(\alpha'\varrho^2 - \alpha''\varrho + \alpha'\varrho - \varrho^2\alpha'') = 2(\alpha'(\varrho^2+\varrho) - \alpha''(\varrho^2+\varrho)) \\ &= -2(\alpha'-\alpha'') \\ u' &= p\varrho + q\varrho^2 = 2(\alpha'\varrho^3 - \varrho^2\alpha'' + \alpha'\varrho^3 - \varrho^4\alpha'') = 2(2\alpha' - \alpha''(\varrho^2+\varrho^4)) \\ &= 2(2\alpha'+\alpha'') = -2(\alpha-\alpha') \\ u'' &= p\varrho^2 + q\varrho = 2(\alpha'\varrho^4 - \alpha''\varrho^3 + \alpha'\varrho^2 - \alpha''\varrho^3) = -2(\alpha''-\alpha) \end{aligned}$$

oder

$$u = 2(\alpha''-\alpha'); \quad u' = 2(\alpha-\alpha''); \quad u'' = 2(\alpha'-\alpha)$$

c. Wurzeln der Gleichung $r^2\Phi^2 = 0$.

Die gefundenen Wurzelwerte der Gleichung

$$u^3 - Iu + 2\Delta = 0$$

sind nach den gemachten Substitutionen mit denen der Gleichung 3. des §. 2. durch die Relation

$$r^2 = 2\bar{a}u - 4A''$$

verbunden. Zur Vereinfachung der auftretenden Formeln führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\lambda = \sqrt{A+t}; \quad \mu = \sqrt{B+t}; \quad \lambda' = \sqrt{A+t'}; \quad \mu' = \sqrt{B+t'};$$
$$\lambda'' = \sqrt{A+t''}; \quad \mu'' = \sqrt{B+t''}$$

(μ'' ist nördlich lateral verstanden). Es ist demnach

$$\begin{aligned} t - t' &= \lambda^2 - \lambda'^2 = \mu^2 - \mu'^2 \\ t' - t'' &= \lambda'^2 - \lambda''^2 = \mu'^2 - \mu''^2 \\ t'' - t &= \lambda''^2 - \lambda^2 = \mu''^2 - \mu^2 \end{aligned}$$

ferner

$$x^2 = \frac{(A+t)(A+t')(A+t'')}{A(A-B)} = \frac{\lambda^2\lambda'^2\lambda''^2}{A(A-B)}$$

und

$$y^2 = \frac{(B+t)(B+t')(B+t'')}{B(B-A)} = \frac{\mu^2\mu'^2\mu''^2}{B(B-A)}$$

demnach

$$x = \frac{\lambda\lambda'\lambda''}{\sqrt{A}\sqrt{(A-B)}}; \quad iy = \frac{\mu\mu'\mu''}{\sqrt{B}\sqrt{(A-B)}}$$

Mittelst dieser Abkürzungen lassen sich nun die auf Seite 346. angegebenen Coefficienten der aufzulösenden Gleichung auf folgende Weise darstellen:

$$\bar{a} = 3(A-B) = 3(\lambda^2 - \mu^2)$$

$$\bar{b} = -3(\sqrt{A}x - i\sqrt{B}y) = -\frac{3(\lambda\lambda'\lambda'' - \mu\mu'\mu'')}{\sqrt{(A-B)}}$$

$$\begin{aligned}\bar{c} &= 2(x^2+y^2+z^2)+(A+B) = 2S(t)+3(A+B)\\ &= S(\lambda'^2+\mu'^2)\end{aligned}$$

$$\bar{d} = -3(\sqrt{A}x + i\sqrt{B}y) = -\frac{3(\lambda\lambda'\lambda'' + \mu\mu'\mu'')}{\sqrt{(A-B)}}$$

$$\bar{e} = 3(A-B) = 3(\lambda^2 - \mu^2)$$

Ferner ist

$$A'' = \bar{a}\,\bar{c} - \bar{b}^2$$

$$B'' = \bar{a}^2\bar{d} - 3\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} + 2\bar{b}^3$$

$$C'' = \bar{a}^3\bar{e} - 4\bar{a}^2\bar{b}\,\bar{d} + 6\bar{a}\,\bar{b}^2\bar{c} - 3\bar{b}^4$$

Weil

$$A - B = \lambda^2 - \mu^2 = \lambda'^2 - \mu'^2 = \lambda''^2 - \mu''^2$$

ist, so lässt sich $(A-B)^2$ auf die verschiedensten Weisen darstellen, was uns ein Mittel an die Hand gibt, in den auftretenden Formeln die Symmetrie herzustellen.

Es ist

$$\begin{aligned}A'' &= 3(A-B)(2S(t)+3(A+B)) - \frac{9}{A-B}(\lambda\lambda'\lambda'' - \mu\mu'\mu'')^2\\ &= \frac{3}{A-B}((A-B)^2 S(\lambda^2+\mu^2) - 3(\lambda\lambda'\lambda'' - \mu\mu'\mu'')^2)\end{aligned}$$

ferner

$$(A-B)^2 S(\lambda^2+\mu^2) = (A-B)^2(\lambda^2+\mu^2)+(A-B)^2(\lambda'^2+\mu'^2)$$
$$+(A-B)^2(\lambda''^2+\mu''^2)$$

$$(A-B)^2(\lambda^2+\mu^2) = (\lambda^2+\mu^2)(\lambda'^2-\mu'^2)(\lambda''^2-\mu''^2)$$

$$(A-B)^2(\lambda'^2+\mu'^2) = (\lambda'^2+\mu'^2)(\lambda^2-\mu^2)(\lambda''^2-\mu''^2)$$

$$(A-B)^2(\lambda''^2+\mu''^2) = (\lambda''^2+\mu''^2)(\lambda^2-\mu^2)(\lambda'^2-\mu'^2)$$

und weil

$$(A-B)^2((\lambda'^2+\mu'^2)+(\lambda''^2+\mu''^2)) = (\lambda^2-\mu^2)((\lambda'^2+\mu'^2)(\lambda''^2-\mu''^2)$$
$$-(\lambda''^2+\mu''^2)(\lambda'^2-\mu'^2))$$
$$= 2(\lambda^2-\mu^2)(\lambda'^2\lambda''^2-\mu'^2\mu''^2)$$

so erhalten wir für A'' die Formel:

$$A'' = \frac{3}{A-B}[(\lambda^2+\mu^2)(\lambda'^2-\mu'^2)(\lambda''^2-\mu''^2)+2(\lambda^2-\mu^2)(\lambda'^2\lambda''^2-\mu'^2\mu''^2)$$
$$-3(\lambda\lambda'\lambda''-\mu\mu'\mu'')^2]$$

welche auch zeigt, dass ihr Wert durch Accentenfortschritt nicht geändert wird. Für die erste Wurzel der Gleichung 3. des §. 2. erhalten wir den Ausdruck

$$r^2 = \frac{12}{B-B}((A-B)^2(2t-t'-t'')-A''')$$

wo A''' den in der Formel für A'' eingeklammerten Ausdruck bedeutet. Die andern Wurzeln ergeben sich dann einfach durch Accentenfortschritt. Es ist nun

$$2t-t'-t'' = (\lambda^2+\mu^2)-\tfrac{1}{2}(\lambda'^2+\mu'^2)-\tfrac{1}{2}(\lambda''^2+\mu''^2)$$

demnach

$$(A-B)^2(2t-t'-t'') = (\lambda^2+\mu^2)(\lambda'^2-\mu'^2)(\lambda''^2-\mu''^2)$$
$$-\tfrac{1}{2}(\lambda'^2+\mu'^2)(\lambda^2-\mu^2)(\lambda''^2-\mu''^2)-\tfrac{1}{2}(\lambda''^2+\mu''^2)(\lambda^2-\mu^2)(\lambda'^2-\mu'^2)$$
$$= (\lambda^2+\mu^2)(\lambda'^2-\mu'^2)(\lambda''^2-\mu''^2)-(\lambda^2-\mu^2)(\lambda'^2\lambda''^2-\mu'^2\mu''^2)$$

folglich

$$r^2 = \frac{36}{A-B}((\lambda\lambda'\lambda''-\mu\mu'\mu'')^2-(\lambda^2-\mu^2)(\lambda'^2\lambda''^2-\mu'^2\mu''^2))$$

und nach Entwicklung des Quadrates in der Klammer

$$r^2 = \frac{36}{A-B}(\lambda'\lambda''\mu-\lambda\mu'\mu'')^2$$

somit auch

$$r'^2 = \frac{36}{A-B}(\lambda''\lambda\mu' - \lambda'\mu''\mu)^2$$

$$r''^2 = \frac{36}{A-B}(\lambda\lambda'\mu'' - \lambda''\mu\mu')^2$$

d. Probe für $rr'r'' = 4B''$.

B'' wurde früher durch den Ausdruck

$$B'' = \bar{a}^2\bar{d} - \overline{abc} + \bar{b}^3$$

definirt. Wenn wir nun hier für die Elemente die auf Seite 354 angegebenen Werte einsetzen, so erhält man

$$B'' = -27(A-B)^{\frac{3}{2}}(\lambda\lambda'\lambda'' + \mu\mu'\mu'') + 27\sqrt{(A-B)}(\lambda\lambda'\lambda'' - \mu\mu'\mu'')S(\lambda^2+\mu^2)$$
$$- \frac{54}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}(\lambda\lambda'\lambda'' - \mu\mu'\mu'')^3$$

oder

$$= \frac{27}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}(L\lambda\lambda'\lambda'' + M\mu\mu'\mu'')$$

wo

$$L = -(A-B)^3 + (A-B)^2 S(\lambda^2+\mu^2) - 2(\lambda^2\lambda'^2\lambda''^2 + 3\mu^2\mu'^2\mu''^2)$$

und

$$M = -(A-B)^3 - (A-B)^2 S(\lambda^2+\mu^2) + 2(3\lambda^2\lambda'^2\lambda''^2 + \mu^2\mu'^2\mu''^2)$$

ist. Vertauscht man in der Formel für L die λ mit den μ, also auch A mit B, so geht dieselbe in den neg. Wert von M über.

Wir hatten früher gefunden, dass

$$(A-B)^2 S(\lambda^2+\mu^2) = (\lambda^2+\mu^2)(\lambda'^2-\mu'^2)(\lambda''^2-\mu''^2)$$
$$+ 2(\lambda^2-\mu^2)(\lambda'^2\lambda''^2 - \mu'^2\mu''^2)$$

ist; folglich

$$L = -(\lambda^2-\mu^2)(\lambda'^2-\mu'^2)(\lambda''^2-\mu''^2) + (\lambda^2+\mu^2)(\lambda'^2-\mu'^2)(\lambda''^2-\mu''^2)$$
$$+ 2(\lambda^2-\mu^2)(\lambda'^2\lambda''^2 - \mu'^2\mu''^2) - 2(\lambda^2\lambda'^2\lambda''^2 + 3\mu^2\mu'^2\mu''^2)$$
$$= -2(\mu^2\mu'^2\mu''^2 + S(\lambda^2\mu'^2\mu''^2))$$

und demnach auch

$$M = 2(\lambda^2\lambda'^2\lambda''^2 + S(\mu^2\lambda'^2\lambda''^2))$$

mithin

$$\frac{54}{\left(\sqrt{(A-B)}\right)^3}(\lambda^2\lambda'^2\lambda''^2\mu\mu'\mu'' - \lambda\lambda'\lambda''\mu^2\mu'^2\mu''^2 + \mu\mu'\mu'' S(\mu^2\lambda'^2\lambda''^2)$$
$$- \lambda'\lambda''\lambda S(\lambda^2\mu'^2\mu''^2))$$

Der eingeklammerte Ausdruck verrät nun sogleich seine Factoren, und man erhält

$$B'' = \frac{54}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}(\lambda'\lambda''\mu - \lambda\mu'\mu'')(\lambda''\lambda\mu' - \lambda'\mu''\mu)(\lambda\lambda'\mu'' - \lambda''\mu\mu')$$

oder

$$= \frac{54}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} P(\lambda'\lambda''\mu - \lambda\mu'\mu'')$$

wenn P ein Product, fortschreitend nach den Accenten, bezeichnet.

Es ist also

$$4B'' = \frac{216}{(A-B)^{\frac{3}{2}}} P(\lambda'\lambda''\mu - \lambda\mu'\mu'')$$

was eine vollständige Uebereinstimmung mit dem Product

$$r\,r'\,r''$$

offenbart.

Die Wurzeln der Gleichung $r^2\Phi^2 = 0$ werden nun schliesslich durch die Formel

$$\bar{a}\Phi + \bar{b} = -\tfrac{1}{2}(r + r' + r'')$$

bestimmt, in welcher für die r die auf Seite 343. angegebenen Zeichencombinationen zu setzen sind. Löst mau nun dieselbe nach Φ auf und setzt die abkürzenden Elemente ein, so sieht man sogleich, dass sich die drei andern Wurzeln durch Entgegensetzung je zweier μ ableiten lassen.

Es ist nun

$$\bar{a} = 3(A-B)$$

und

$$\bar{b} = -\frac{3(\lambda\lambda'\lambda'' - \mu\mu'\mu'')}{\sqrt{(A-B)}}$$

demnach

$$3(A-B)\Phi = \frac{3}{\sqrt{(A-B)}}(\lambda\lambda'\lambda'' - \mu\mu'\mu'') - \frac{3}{\sqrt{(A-B)}} \times$$

$$\times\, (\lambda'\lambda''\mu - \lambda\mu'\mu'' + \lambda''\lambda\mu' - \lambda'\mu''\mu + \lambda\lambda'\mu'' - \lambda''\mu\mu')$$

$$= \frac{3}{\sqrt{(A-B)}}(\lambda\lambda'\lambda'' - S(\lambda'\lambda''\mu) + S(\lambda\mu'\mu'') - \mu\mu'\mu'')$$

$$= \frac{3}{\sqrt{(A-B)}}(\lambda-\mu)(\lambda'-\mu')(\lambda''-\mu'')$$

folglich ist die erste Wurzel der Gleichung $r^2\Phi^2 = 0$

$$\Phi = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda' - \mu')(\lambda'' - \mu'')}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}$$

und also nach der obigen Bemerkung die drei andern

$$\Phi' = \frac{(\lambda + \mu)(\lambda' + \mu')(\lambda'' - \mu'')}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Phi'' = \frac{(\lambda + \mu)(\lambda' - \mu')(\lambda'' + \mu'')}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Phi''' = \frac{(\lambda - \mu)(\lambda' + \mu')(\lambda'' + \mu'')}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}.$$

§. 4. Directe Auflösung der Gleichung $\Phi^2 r^2 = 0$.

Wir haben gefunden, dass die aufzulösende Gleichung in der Form

$$\Phi^4 - \frac{4(\sqrt{A}x - i\sqrt{B}y)}{A-B}\Phi^3 + \frac{(4(x^2+y^2+z^2)+2(A+B))}{A-B}\Phi^2 - \frac{4(\sqrt{A}x + i\sqrt{B}y)}{A-B}\Phi + 1 = 0$$

geschrieben werden kann.

Mittelst der Abkürzungen

$$\frac{A+t}{A-B} = \cos^2\varepsilon; \quad \frac{B+t}{A-B} = \sin^2\varepsilon; \quad \frac{A+t'}{A-B} = \cos^2\zeta;$$

$$\frac{B+t'}{A-B} = \sin^2\zeta; \quad \frac{A+t''}{A-B} = \cos^2\eta; \quad \frac{B+t''}{A-B} = -\sin^2\eta$$

lassen sich nun die Coordinaten des Bezugspunktes auf folgende Weise schreiben

$$x = \frac{(A-B)}{\sqrt{A}}\cos\varepsilon\cos\zeta\cos\eta; \quad y = \frac{A-B}{\sqrt{B}}\sin\varepsilon\sin\zeta\sin\eta$$

Ferner ist also

$$t - t' = (\cos^2\varepsilon - \cos^2\zeta)(A-B)$$
$$t' - t'' = (\cos^2\zeta - \cos^2\eta)(A-B)$$
$$t'' - t = (\cos^2\eta - \cos^2\varepsilon)(A-B)$$

und weil $t - t'$ pos. ist, so folgt

$$\varepsilon > \zeta$$

Wenn nun die Wurzeln der aufzulösenden Gleichung mit $\Theta, \Theta', \Theta''$, Θ''' bezeichnet werden, so hat man zur Bestimmung derselben die Gleichungen

$$\Sigma C_1(\Phi, \Phi', \Phi'', \Phi''') = \frac{4(\sqrt{A}x - i\sqrt{B}y)}{(A-B)} = P_1$$

$$\Sigma C_2(\Phi, \Phi', \Phi'', \Phi''') = \frac{4(x^2+y^2+z^2)+2(A+B)}{(A-B)} = P_2$$

$$\Sigma C_3(\Phi, \Phi', \Phi'', \Phi''') = \frac{4(\sqrt{A}x + i\sqrt{B}y)}{(A-B)} = P_3$$

$$\Sigma C_4(\Phi, \Phi', \Phi'', \Phi''') = 1 \qquad\qquad = P_4$$

welche nach Einsetzung obiger Abkürzungen folgende Formen annehmen:

$$P_1 = 4(\cos\varepsilon\cos\zeta\cos\eta - i\sin\varepsilon\sin\zeta\sin\eta)$$
$$P_2 = 2(\cos^2\varepsilon + \sin^2\varepsilon + \cos^2\zeta + \sin^2\zeta + \cos^2\eta - \sin^2\eta)$$
$$P_3 = 4(\cos\varepsilon\cos\zeta\cos\eta + i\sin\varepsilon\sin\zeta\sin\eta)$$
$$P_4 = 1.$$

Wir führen weiter folgende Abkürzungen ein:

$$a = e^{\varepsilon i} = \cos\varepsilon + i\sin\varepsilon; \quad a' = e^{\zeta i} = \cos\zeta + i\sin\zeta;$$
$$a'' = e^{\eta i} = \cos\eta + i\sin\eta$$

also

$$\cos\varepsilon = \tfrac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right); \quad \cos\zeta = \tfrac{1}{2}\left(a' + \frac{1}{a'}\right); \quad \cos\eta = \tfrac{1}{2}\left(a'' + \frac{1}{a''}\right)$$

und

$$\sin\varepsilon = \tfrac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right); \quad \sin\zeta = \tfrac{1}{2}\left(a' - \frac{1}{a'}\right); \quad \sin\eta = \tfrac{1}{2i}\left(a'' - \frac{1}{a''}\right)$$

folglich

$$P_1 = \tfrac{1}{2}\left(\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a' + \frac{1}{a'}\right)\left(a'' + \frac{1}{a''}\right) - \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a' - \frac{1}{a'}\right)\left(a'' - \frac{1}{a''}\right)\right)$$

$$= \frac{aa'}{a''} + \frac{aa''}{a'} + \frac{a'a''}{a} + \frac{1}{aa'a''}$$

$$P_2 = [illegible]$$

$$P_3 = aa'a'' + \frac{a}{a'a''} + \frac{a'}{aa''} + \frac{a''}{aa'}$$

$$P_4 = 1.$$

Diese Gleichungen nun offenbaren die Wurzelwerte sehr deutlich. Dieselben sind:

$$\Phi = \frac{a a'}{a''} = e^{\varepsilon+\zeta-i\eta}$$

$$\Phi' = \frac{a' a''}{a} = e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta}$$

$$\Phi'' = \frac{a'' a}{a'} = e^{\varepsilon+i\eta-\zeta}$$

$$\Phi''' = \frac{1}{a a' a''} = e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta}$$

Weil

$$\frac{\lambda}{\sqrt{A-B}} = \cos\varepsilon; \quad \frac{\mu}{\sqrt{A-B}} = \sin\varepsilon; \quad \frac{\lambda'}{\sqrt{A-B}} = \cos\zeta;$$

$$\frac{\mu'}{\sqrt{A-B}} = \sin\zeta; \quad \frac{\lambda''}{\sqrt{A-B}} = \cos\eta; \quad \frac{\mu''}{\sqrt{A-B}} = i\sin\eta$$

also

$$\frac{\lambda-\mu}{\sqrt{A-B}} = \cos\varepsilon - \sin\varepsilon = e^{-\varepsilon}; \quad \frac{\lambda'-\mu'}{\sqrt{A-B}} = \cos\zeta - \sin\zeta = e^{-\zeta}$$

$$\frac{\lambda''-\mu''}{\sqrt{A-B}} = \cos\eta - i\sin\eta = e^{-i\eta}$$

ist, so stimmen die erhaltenen Wurzelwerte mit den auf Seite 358 angegebenen überein.

§. 5. Auflösung der Gleichung $r^2\Phi^2 = 0$ durch geometrische Betrachtungen.

p, p' und p'' seien die Abstände des Mittelpunktes von den drei Berührungsebenen der durch den Bezugspunkt (x, y, z) gehenden confocalen Flächen mit den dritten Halbaxenquadraten t, t' und t''. Die Richtungscosinusse dieser drei Perpendikel seien α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ''. Aus der Theorie der confocalen Flächen folgt aber, dass

$$\alpha = \frac{px}{A+t}; \quad \beta = \frac{py}{B+t}; \quad \gamma = \frac{pz}{t}$$

$$\alpha' = \frac{p'x}{A+t'}; \quad \beta' = \frac{p'y}{B+t'}; \quad \gamma' = \frac{p'z}{t'}$$

$$\alpha'' = \frac{p''x}{A+t''}; \quad \beta'' = \frac{p''y}{B+t''}; \quad \gamma'' = \frac{p''z}{t''}$$

ist. Durch den Bezugspunkt werde ein neues Axensystem gelegt, dessen Axen den Perpendikeln aus dem Mittelpunkte auf die Berührungsebenen entgegengesetzt parallel sind, und nun soll die Gleichung

$$\frac{X^2}{A+u}+\frac{Y^2}{B+u}+\frac{Z^2}{u}=1$$

in den neuen Coordinaten, welche mit s, s' und s'' bezeichnet werden sollen, dargestellt werden. Wenn nun X, Y und Z die Coordinaten eines freien Punktes, bezogen auf das alte Systen, sind, dann hat man für dieselben

$$X=x-(\alpha s+\alpha' s'+\alpha'' s'')$$
$$Y=y-(\beta s+\beta' s'+\beta'' s'')$$
$$Z=z-(\gamma s+\gamma' s'+\gamma'' s'')$$

demnach ist

$$X^2=x^2+S(\alpha^2 s^2)-2x\,S(\alpha s)+2S\,\alpha\alpha' s s'$$

und ebenso

$$Y^2=y^2+S(\beta^2 s^2)-2y\,S(\beta s)+2S(\beta\beta' s s')$$
$$Z^2=z^2+S(\gamma^2 s^2)-2z\,S(\gamma s)+2S(\gamma\gamma' s s')$$

Werden diese Werte in die obige Gleichung, welche in den neuen Coordinaten mit Ω bezeichnet werden soll, eingesetzt, dann erhält man

$$\Omega=\Sigma\frac{x^2}{A+u}-1+S\left(s^2\Sigma\frac{\alpha^2}{A+u}\right)-2S\left(s\,\Sigma\frac{\alpha x}{B+u}\right)+2S\left(ss'\Sigma\frac{\alpha\alpha'}{A+u}\right)$$

Es ist aber

$$\Sigma\frac{\alpha^2}{A+u}=p^2\Sigma\frac{x^2}{(A+t)^2(A+u)}$$

ferner sei

$$\frac{x^2}{(A+t)^2(A+u)}=\frac{F}{(A+t)}+\frac{G}{(A+t)^2}+\frac{H}{(A+u)}$$

also

$$\frac{x^2}{A+u}=F(A+t)+G+\frac{H}{(A+u)}(A+t)^2$$

und für

$$A=-t+v$$

ist

$$\frac{x^2}{A+u}=\frac{x^2}{u-t+v}=\frac{x^2}{u-t}\left(\frac{1}{1+\frac{v}{u-t}}\right)$$

$$=\frac{x^2}{u-t}-\frac{x^2 v}{(u-t)^2}+\frac{x^2 v^2}{(u-t)^3}+\cdots$$

ferner

$$F(A+t)+G+\frac{H}{(A+u)}(A+t)^2 = G+I\cdot v+\frac{Hv^2}{u-t}-\frac{Hv^3}{(u-t)^2}+\ldots$$

folglich ist

$$G=\frac{x^2}{u-t}; \quad F=-\frac{x^2}{(u-t)^2}; \quad H=\frac{x^2}{(u-t)^2}$$

demnach

$$\frac{x^2}{(A+t)^2(A+u)}=\frac{x^2}{(A+t)^2(u-t)}-\frac{x^2}{(A+t)(u-t)^2}+\frac{x^2}{(A+u)(u-t)^2}$$

somit

$$\Sigma\frac{x^2}{(A+t)^2(A+u)}=\Sigma\frac{x^2}{(A+u)(u-t)^2}+\Sigma\frac{x^2}{(A+t)^2(u-t)}-\Sigma\frac{x^2}{(A+t)(u-t)^2}$$

$$=\frac{1}{(u-t)^2}\Sigma\frac{x^2}{(A+u)}+\frac{1}{u-t}\Sigma\frac{x^2}{(A+t)^2}-\frac{1}{(u-t)^2}\Sigma\frac{x^2}{(A+t)}$$

$$=\frac{1}{(u-t)^2}\Sigma\frac{x^2}{(A+u)}+\frac{1}{u-t}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{(u-t)^2}$$

also

$$p^2\Sigma\frac{x^2}{(A+t)^2(A+u)}=\frac{p^2}{(u-t)^2}\Sigma\frac{x^2}{A+u}+\frac{1}{u-t}-\frac{p^2}{(u-t)^2}$$

$$=\frac{1}{u-t}-E\left(\frac{p}{u-t}\right)^2$$

wo demnach

$$E=1-\Sigma\frac{x^2}{(A+u)}$$

ist. Wenn das Zeichen [| den Coefficienten des eingeklammerten Elementes bedeutet, so hat man

$$\left[s^2\right|=\frac{1}{u-t}-E\frac{p^2}{(u-t)^2}; \quad \left[s'^2\right|=\frac{1}{u-t'}-E\frac{p'^2}{(u-t')^2}$$

$$\left[s''^2\right|=\frac{1}{u-t''}-E\frac{p''^2}{(u-t'')^2}$$

Ferner ist

$$-2\Sigma\frac{x\alpha}{A+u}=-2\Sigma\frac{x^2p}{(A+u)(A+t)}$$

und setzt man

$$\frac{x^2}{(A+u)(A+t)}=\frac{F}{(A+u)}+\frac{G}{(A+t)}$$

so ergibt sich

$$F=-\frac{x^2}{u-t} \quad \text{und} \quad G=\frac{x^2}{u-t}$$

also

$$\frac{x^2}{(A+u)(A+t)} = \frac{x^2}{(A+t)(u-t)} - \frac{x^2}{(A+u)(u-t)}$$
$$= \frac{1}{u-t}\left(\frac{x^2}{A+t} - \frac{x^2}{(A+u)}\right)$$

folglich

$$-2\Sigma\frac{x\alpha}{A+u} = -\frac{2p}{u-t}\left(\Sigma\ \frac{x^2}{A+t} - E\ \frac{x^2}{A+u}\right)$$
$$= -\frac{2p}{u-t}\left(1 - \Sigma\frac{x^2}{A+u}\right)$$
$$= -\frac{2p}{u-t}E$$

demnach

$$\left[s\ \right| = -\frac{2p}{u-t}E$$
$$\left[s'\ \right| = -\frac{2p'}{u-t'}E$$
$$\left[s''\ \right| = -\frac{2p''}{u-t''}E$$

Schliesslich suchen wir noch die Coefficienten der Producte zweier s

Es ist

$$\Sigma\frac{\alpha'\alpha''}{A+u} = p'p''\Sigma\frac{x^2}{(A+t')(A+t'')(A+u)}$$

und

$$\Sigma\frac{x^2}{(A+t')(A+t'')(A+u)} = \frac{1}{u-t'}\left(\Sigma\frac{x^2}{(A+t')(A+t'')} - \Sigma\frac{x^2}{(A+t'')(A+u)}\right)$$

weil aber

$$\Sigma\frac{x^2}{(A+t')(A+t'')} = 0$$

ist, so erhalten wir auch

$$\Sigma\frac{x^2}{(A+t')(A+t'')(A+u)} = -\frac{1}{u-t'}\Sigma\frac{x^2}{(A+t'')(A+u)}$$

oder

$$= -\frac{1}{u-t'}\frac{1}{u-t''}E$$

folglich

$$\Sigma\frac{\alpha'\alpha''}{A+u} = -\frac{p'}{u-t'}\cdot\frac{p''}{u-t''}$$

und somit

$$\left[s' s''\right| = -2 . \frac{p'}{u-t'} \frac{p''}{u-t''} E$$

$$\left[s'' s\right| = -2 . \frac{p''}{u-t''} \cdot \frac{p}{u-t} E$$

$$\left[s s'\right| = -2 . \frac{p}{u-t} \cdot \frac{p'}{u-t'} E$$

Die Gleichung, in den neuen Coordinaten ausgedrückt, erhält somit die Form

$$\Omega = S\frac{s^2}{u-t} - E\left(4+S\left(\frac{p^2 s^2}{(u-t)^2}\right)+2S\left(\frac{ps}{u-t}\right)\right.$$
$$\left.+2S\left(\frac{pp'}{(u-t)(u-t')}ss'\right)\right)$$

odce auch, weil der eingeklammerte Ausdruck ein vollständiges Quadrat ist

$$\Omega = S\left(\frac{s^2}{u-t}\right) - E\left(1+\frac{ps}{u-t}+\frac{p's'}{u-t'}+\frac{p''s''}{u-t''}\right)^2$$

Setzen wir diesen Ausdruck gleich null, so erhalten wir je nach dem Werte von u die Gleichung eines Ellipsoides, eines einschaligen oder zweischaligen Hyperboloides. Die Gleichung

$$\frac{s^2}{u-t}+\frac{s'^2}{u-t'}+\frac{s''^2}{u-t''}=0$$

ist die Gleichung eines Kegels, dessen Spitze im Ursprung, also im Bezugspunkte liegt, während das Polynom

$$1+\frac{ps}{u-t}+\frac{p's'}{u-t'}+\frac{p''s''}{u-t''}=0$$

eine Ebene darstellt. Die Fläche $\Omega = 0$ berührt somit den Kegel in seinem Durchschnitte mit dieser Ebene. Derselbe ist demnach Tangentenkegel der Fläche und die Ebene ist die Polarebene des Bezugspunktes. Für $u = 0$ stellt aber die Gleichung $\Omega = 0$ das abgeplattete Ellipsoid dar, dessen Coordinaten den Bedingungen

$$\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}<1; \quad Z=0$$

genügen; folglich ist die Gleichung des Kegels, dessen Spitze im Bezugspunkte liegt, und dessen Directrix die Focalellipse ist,

$$\frac{s^2}{t}+\frac{s'^2}{t'}+\frac{s''^2}{t''}=0$$

und die Polarebene, welche in diesem Falle mit der Ebene $Z=0$ zusammenfällt, hat die Form

$$\frac{ps}{t}+\frac{p's'}{t'}+\frac{p''s''}{t''}=1$$

Für die neuen Coordinaten eines Punktes der Focalellipse gelten demnach die Gleichungen

$$1)\qquad s^2+s'^2+s''^2=p^2$$

$$2)\qquad \frac{s^2}{t}+\frac{s'^2}{t'}+\frac{s''^2}{t''}=0$$

$$3)\qquad \frac{ps}{t}+\frac{p's'}{t'}+\frac{p''s''}{t''}=1$$

Weil

$$r^2=(\sqrt{A}\cos\varphi-x)^2+(\sqrt{B}\sin\varphi-y)^2+z^2$$

und

$$X=\sqrt{A}\cos\varphi=x-S(\alpha s);\quad Y=\sqrt{B}\sin\varphi=y-S(\beta s)$$

ist, so ist demnach

$$r^2=f(s,\ s',\ s'')$$

und nun sollen solche Werte von s. s' und s'' gesucht werden, welche die Function $f(s,\ s',\ s'')$ zu null machen. Dieselben bestimmen dann auch die Werte von φ, welche der Gleichung

$$r^2=0$$

genügen, mithin auch die Wurzeln der Gleichung

$$\Phi^2r^2=0.$$

Wir erhalten somit zur Bestimmung der Wurzeln der aufzulösenden Gleichung

$$\Phi^2r^2=0$$

die Formel

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi=\frac{X}{\sqrt{A}}+i\frac{Y}{\sqrt{B}}$$

in welcher diejenigen Werte von $(s,\ s',\ s'')$ zu substituiren sind, die der Gleichung

$$f(s,\ s',\ s'')=0$$

genügen. Für dieselben haben wir aber folgende Gleichungen:

$$1')\qquad s^2+s'^2+s''^2=0$$

$$2')\qquad \frac{s^2}{t}+\frac{s'^2}{t'}+\frac{s''^2}{t''}=0$$

$$3')\qquad \frac{ps}{t}+\frac{p's'}{t'}+\frac{p's''}{t''}=1.$$

Weil sich nun 2 Kegel zweiter Ordnung in einer Curve von doppelter Krümmung schneiden, die von einer Ebene also in 4 Punkten geschnitten wird, so sieht man sogleich, dass das System der drei Gleichungen 4 verschiedene Lösungen hat.

Es ist

$$X = x - \alpha s - \alpha' s' - \alpha'' s''$$

oder nach Einsetzung der Werte für die Richtungscosinusse

$$X = x\left(1 - S\left(\frac{ps}{A+t}\right)\right)$$

und weil

$$1 = S\left(\frac{ps}{t}\right)$$

also auch

$$X = x\left(S\left(\frac{ps}{t}\right) - S\left(\frac{ps}{A+t}\right)\right) = xS\left(\frac{ps}{t} - \frac{ps}{A+t}\right)$$

somit

$$= AxS\left(\frac{ps}{(A+t).t}\right)$$

und es entsteht nun die Aufgabe, die Werte für $\frac{ps}{t}$, $\frac{p's'}{t'}$, $\frac{p''s''}{t''}$ aus dem System der Gleichungen darzustellen.

Aus den beiden Gleichungen

$$t.\frac{s^2}{t^2} + t'\frac{s'^2}{t'} + t''\frac{s''^2}{t''} = 0$$

$$\frac{s^2}{t} + \frac{s'^2}{t'} + \frac{s''^2}{t''} = 0$$

folgt, dass

$$\frac{s^2}{t} = f^2(t' - t''); \quad \frac{s'^2}{t'} = f^2(t'' - t); \quad \frac{s''^2}{t''} = f^2(t - t')$$

ist, und demnach

$$\left(\frac{ps}{t}\right)^2 = \frac{p^2}{t}(t' - t'').f^2; \quad \left(\frac{p's'}{t'}\right)^2 = \frac{p'^2}{t'}(t'' - t).f^2$$

$$\left(\frac{p''s''}{t''}\right)^2 = \frac{p''^2}{t''}(t - t')f^2,$$

wo f^2 einen noch zu bestimmenden Factor bedeutet.

Nun ist

$$p^2 = \frac{(A+t)(B+t).t}{(t-t')(t-t'')}\,; \quad p'^2 = \frac{(A+t')(B+t').t'}{(t'-t'')(t'-t)}$$

$$p''^2 = \frac{(A+t'')(B+t'').t''}{(t''-t)(t''-t')}$$

oder, wenn man die Abkürzungen

$$\alpha = t'-t''; \quad \alpha' = t''-t; \quad \alpha'' = t-t'; \quad A+t = \lambda^2;$$
$$B+t = \mu^2; \quad A+t' = \lambda'^2;$$
$$B+t' = \mu'^2; \quad A+t'' = \lambda''^2; \quad B+t'' = \mu''^2$$

gebraucht,

$$p^2 = -\frac{\lambda^2\mu^2 t.}{\alpha'\alpha''}\,; \quad \mu'^2 = -\frac{\lambda'^2\mu'^2 t'}{\alpha''\alpha}\,; \quad p''^2 = -\frac{\lambda''^2\mu''^2 t''}{\alpha\alpha'}$$

folglich

$$\frac{p^2 s^2}{t^2} = -\frac{\lambda^2\mu^2}{\alpha'\alpha''}(t'-t'')f^2 = -\frac{\lambda^2\mu^2\alpha^2}{\alpha\alpha'\alpha''}f^2$$

$$\frac{p'^2 s'^2}{t'^2} = -\frac{\lambda'^2\mu'^2\alpha'^2}{\alpha\alpha'\alpha''}f^2$$

$$\frac{p''^2 s''^2}{t''^2} = -\frac{\lambda''^2\mu''^2\alpha''^2}{\alpha\alpha'\alpha''}f^2$$

Unsere Aufgabe verlangt aber nur die ersten Potenzen von $\frac{ps}{t}$ und für dieselben sind nun folgende Zeichencombinationen möglich:

	$\frac{ps}{t}$	$\frac{p's'}{t'}$	$\frac{p''s''}{t''}$
1	+	+	+
2	+	+	−
3	+	−	+
4	+	−	−
5	−	+	+
6	−	+	−
7	−	−	+
8	−	−	−

Alle diese Combinationen müssen aber auch der Gleichung 3′ genügen, durch welche auch der Factor f bestimmt wird. Für die 1. Combination erhält man

$$1-\frac{f}{\sqrt{-\alpha\alpha'\alpha''}}(\alpha\lambda\mu+\alpha'\lambda'\mu'+\alpha''\lambda''\mu'')=0$$

oder

$$f=\frac{\sqrt{-\alpha\alpha'\alpha''}}{h},$$

wo

$$h=S(\alpha\lambda\mu)$$

ist, und für die 8.

$$f=-\frac{\sqrt{-\alpha\alpha'\alpha''}}{h}$$

also gleich dem entgegengesetzten Werte der 1. Combination. Demnach liefern diese beiden Comb. für die ersten Potenzen von $\frac{ps}{t}$ dieselben Werte. Ebenso kann man zeigen, dass 2 mit 7, 3 mit 6 und 4 mit 5 zusammenfällt, so dass es im ganzen nur 4 verschiedene Combinationen geben kann, welche nun die 4 Wurzeln der Gl. $\Phi^2 r^2=0$ liefern. Diese 4 Comb. sind:

1'	+	+	+
2'	−	−	+
3'	−	+	−
4'	+	−	−

Man sieht ferner sogleich ein, dass die zweite, dritte und vierte aus der ersten durch Entgegensetzung je zweier μ abgeleitet werden kann. Wir suchen deshalb nur die Wurzel, welche die erste Combination liefert, und leiten aus derselben durch Entgegensetzung je zweier μ die Werte für die andern ab.

Es war

$$X=Ax\,S\frac{ps}{(A+t).t}$$

ferner ist

$$x=\frac{\lambda\lambda'\lambda''}{\sqrt{A}\sqrt{(A-B)}}$$

demnach

$$X=A\frac{\lambda\lambda'\lambda''}{\sqrt{A}\sqrt{(A-B)}}S\frac{\lambda\mu\alpha}{h\lambda^2}$$

oder

$$\frac{X}{\sqrt{A}}=\frac{1}{h\sqrt{(A-B)}}S(\alpha\lambda'\lambda''\mu)$$

Um den Wert von Y zu bekommen, hat man nur A mit B zu vertauschen, folglich auch die λ mit den μ. Demnach ist

$$\frac{iY}{\sqrt{B}} = \frac{1}{h\sqrt{(A-B)}}\,S(\alpha\mu'\mu''\lambda)$$

und also

$$e^{i\varphi} = \frac{1}{h\sqrt{(A-B)}}\,S(t'-t'')(\lambda\mu'\mu''+\lambda'\lambda''\mu).$$

Weil

$$t'-t'' = -(t''-t)-(t-t')$$

ist, so folgt

$$\begin{aligned} S(t'-t'')(\lambda\mu'\mu''+\lambda'\lambda''\mu) &= (t''-t)((\lambda'\mu''\mu+\lambda''\lambda\mu')-(\lambda\mu'\mu''+\lambda'\lambda''\mu)) \\ &\quad+(t-t')((\lambda''\mu\mu'+\lambda\lambda'\mu'')-(\lambda\mu'\mu''+\lambda'\lambda''\mu)) \\ &= (t''-t)(\lambda\mu'-\lambda'\mu)(\lambda''-\mu'')-(t-t')(\lambda'-\mu')(\lambda''\mu-\lambda\mu'') \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{vmatrix} A+t'' . A+t \\ B+t'' . B+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda''^2 . \lambda^2 \\ \mu''^2 . \mu^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A-B . A-B \\ B+t'' . B+t \end{vmatrix} = (A-B)\begin{vmatrix} 1 & . & 1 \\ B+t'' & . & B+t \end{vmatrix}$$

$$= (A-B)\begin{vmatrix} 1 & . & 0 \\ B+t'' & . & t-t'' \end{vmatrix} = (t-t'')(A-B)$$

also

$$(A-B)(t-t'') = (\lambda''^2\mu^2-\lambda^2\mu''^2) = (\lambda''\mu+\lambda\mu'')(\lambda''\mu-\lambda\mu'')$$

und ebenso

$$(A-B)(t'-t) = (\lambda^2\mu'^2-\lambda'^2\mu^2) = (\lambda\mu'+\lambda'\mu)(\lambda\mu'-\lambda'\mu)$$

folglich

$$-(t-t')(\lambda'-\mu')(\lambda''\mu-\lambda\mu'') = \frac{(\lambda\mu'+\lambda'\mu)(\lambda\mu'-\lambda'\mu)(\lambda'-\mu')(\lambda''\mu-\lambda\mu'')}{(A-B)}$$

und

$$(t''-t)(\lambda\mu'-\lambda'\mu)(\lambda''-\mu'') = -\frac{(\lambda''\mu-\mu''\lambda)(\lambda''\mu+\mu''\lambda)(\lambda''-\mu'')(\lambda\mu'-\lambda'\mu)}{(A-B)}$$

demnach ist

$$h(A-B)^{\frac{3}{2}}e^{i\varphi}$$

$$=(\lambda''\mu-\lambda\mu'')(\lambda\mu'-\lambda'\mu)[(\lambda'-\mu')(\lambda\mu'+\lambda'\mu)-(\lambda''-\mu'')(\lambda''\mu+\lambda\mu'')]$$

Wenn man in dem Ausdrucke

$$(\lambda'-\mu')(\lambda\mu'+\lambda'\mu)-(\lambda''-\mu'')(\lambda''\mu+\lambda\mu'')$$

$$= [illegible]$$

beachtet, dass

$$\mu'^2-\mu''^2 = \lambda'^2-\lambda''^2$$

ist, so ist derselbe

$$= [illegible]$$

und weil ferner

$$\lambda'^2 - \lambda''^2 = \mu'^2 - \mu''^2 = \tfrac{1}{2}(\lambda'^2 - \lambda''^2) + \tfrac{1}{2}(\mu'^2 - \mu''^2)$$

so ist

$$\lambda'\mu' - \lambda''\mu'' - (\lambda'^2 - \lambda''^2) = \tfrac{1}{2}(\lambda''^2 - 2\lambda''\mu'' + \mu''^2 - \lambda'^2 + 2\lambda'\mu' - \mu'^2)$$

demnach

$$h(A-B)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi} = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)(\lambda''\mu - \lambda\mu'')(\lambda - \mu)\,\tfrac{1}{2}((\lambda'' - \mu'')^2 - (\lambda' - \mu')^2)$$

oder auch, da

$$A - B = \lambda'^2 - \mu'^2 = \lambda''^2 - \mu''^2$$

ist

$$h(A-B)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi} = (\lambda\mu' - \lambda'\mu)(\lambda''\mu - \lambda\mu'')(\lambda - \mu)\,\tfrac{1}{2}((\lambda'' - \mu'')^2(\lambda'^2 - \mu'^2) \\ - (\lambda' - \mu')^2(\lambda''^2 - \mu''^2))$$

und wenn wir noch den Factor $(\lambda'' - \mu'')(\lambda' - \mu')$ aus der Klammer herausnehmen, so ergibt sich

$$h(A-B)^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi} = -(\lambda\mu' - \lambda'\mu)(\lambda''\mu - \lambda\mu'')(\lambda'\mu'' - \lambda''\mu')(\lambda - \mu)(\lambda' - \mu')(\lambda'' - \mu'')$$

Es ist aber

$$h = S(\alpha\lambda\mu)$$

und weil

$$\alpha = t' - t'' = (A + t') - (A + t'') = \lambda'^2 - \lambda''^2;$$
$$\alpha' = \lambda''^2 - \lambda^2: \quad \alpha'' = \lambda^2 - \lambda'^2$$

so ist auch

$$h = (\lambda'^2 - \lambda''^2)\lambda\mu + (\lambda''^2 - \lambda^2)\lambda'\mu' + (\lambda^2 - \lambda'^2)\lambda''\mu''$$

folglich

$$(A-B)h = (\lambda'^2 - \lambda''^2)(\lambda''^2 - \mu''^2)\lambda\mu + (\lambda''^2 - \lambda^2)(\lambda^2 - \mu^2)\lambda'\mu' \\ + (\lambda^2 - \lambda'^2)(\lambda'^2 - \mu'^2)\lambda''\mu''$$

ferner ist

$$(\lambda'^2 - \lambda''^2)(\lambda''^2 - \mu''^2) = \begin{vmatrix} \lambda'^2, & \lambda''^2 \\ \lambda''^2 - \mu''^2, & \lambda''^2 - \mu''^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda'^2, & \lambda''^2 \\ \lambda'^2 - \mu'^2, & \lambda''^2 - \mu''^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda'^2, & \lambda''^2 \\ -\mu'^2, & -\mu''^2 \end{vmatrix}$$

demnach

$$(A-B)h = \begin{vmatrix} \lambda^2, & \lambda\mu, & \mu^2 \\ \lambda'^2, & \lambda'\mu', & \mu'^2 \\ \lambda''^2, & \lambda''\mu'', & \mu''^2 \end{vmatrix}$$

oder auch

$$= \begin{vmatrix} \lambda^2-(a+b)\lambda\mu+ab\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2 \\ \lambda'^2-(a+b)\lambda'\mu'+ab\mu'^2 & \lambda'\mu' & \mu'^2 \\ \lambda''^2-(a+b)\lambda''\mu''+ab\mu''^2 & \lambda''\mu'' & \mu''^2 \end{vmatrix}$$

Weil

$$\lambda^2-(a+b)\lambda\mu+ab\,\mu^2 = (\lambda-a\mu)(\lambda-b\mu)$$
$$\lambda'^2-(a+b)\lambda'\mu'+ab\,\mu'^2 = (\lambda'-a\mu')(\lambda'-b\mu')$$
$$\lambda''^2-(a+b)\lambda''\mu''+ab\,\mu''^2 = (\lambda''-a\mu'')(\lambda''-b\mu'')$$

ist, so können a und b so bestimmt werden, dass das zweite und dritte Glied der ersten Spalte verschwindet. Das ist der Fall für

$$a = \frac{\lambda'}{\mu'} \quad \text{und} \quad b = \frac{\lambda''}{\mu''}$$

und für diese Werte bekommt man

$$h(A-B) = \frac{1}{\mu'\mu''}\begin{vmatrix} (\lambda\mu'-\mu\lambda')(\lambda\mu''-\lambda''\mu), & \lambda\mu, & \mu^2 \\ 0 & \lambda'\mu', & \mu'^2 \\ 0 & \lambda''\mu'', & \mu''^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda\mu'-\mu\lambda')(\lambda\mu''-\lambda''\mu)\begin{vmatrix} \lambda', & \mu' \\ \lambda'', & \mu'' \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda'. & \mu' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda', & \mu' \\ \lambda'', & \mu'' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \lambda'', & \mu'' \\ \lambda, & \mu \end{vmatrix}$$

Die erste Wurzel der Gleichung

$$\Phi^2 r^2 = 0$$

ist demnach, und dem zufolge die drei andern

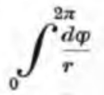
$$e^{i\varphi} = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda'-\mu')(\lambda''-\mu'')}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}; \qquad e^{i\varphi''} = \frac{(\lambda+\mu)(\lambda'-\mu')(\lambda''+\mu'')}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}$$

$$e^{i\varphi'} = \frac{(\lambda+\mu)(\lambda'+\mu')(\lambda''-\mu'')}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}; \qquad e^{i\varphi'''} = \frac{(\lambda-\mu)(\lambda'+\mu')(\lambda''+\mu'')}{(A-B)^{\frac{3}{2}}}$$

Wie in §. 4. Seite 360 werden wir die Abkürzungen $\frac{\lambda+\mu}{\sqrt{A-B}} = e^{\varepsilon}\ldots$ gebrauchen und schicken uns nun an, die Kenntniss der Wurzeln $e^{\varepsilon+\zeta-i\eta}$ der Gleichung

$$4\Phi^2 r^2 = 0$$

zur Reduction des Potentials



$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{r}$$

auf eine in Bezug auf t, t', t'' symmetrische Form, die wir Normalform heissen wollen, zu verwenden.

§. 6. Herstellung des Potentials der Ellipse nach der ersten Methode.

Nach dem Vorhergehenden ist

$$4\Phi^2 r^2 = (A-B)(\Phi - e^{\varepsilon-\zeta+i\eta})(\Phi - e^{\zeta-\varepsilon+i\eta})(\Phi - e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta})(\Phi - e^{\varepsilon+\zeta-i\eta})$$

oder auch, wenn wir

$$\Omega^2 = (\Phi - e^{\varepsilon-\zeta+i\eta})(\Phi - e^{\zeta-\varepsilon+i\eta})(\Phi - e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta})(\Phi - e^{\varepsilon+\zeta-i\eta})$$

setzen

$$4\Phi^2 r^2 = (A-B)\Omega^2$$

also

$$r^2 = \frac{A-B}{4} \cdot \frac{\Omega^2}{\Phi^2}$$

Wenn nun φ von 0 bis 2π läuft, so durchläuft $\Phi = e^{i\varphi}$ in pos. Richtung den Einheitskreis, und weil r als Function von φ auf dem ganzen Wege pos. ist, so muss auch $\frac{\Omega}{\Phi}$ dem Einheitskreise entlang pos. sein, was sich auf folgende Weise zeigen lässt.

Es ist

$$i\varphi = \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \zeta + i(\varphi + \eta)) - \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \zeta - i(\varphi - \eta))$$

also

$$\Phi - e^{\varepsilon-\zeta+i\eta} = e^{\frac{1}{2}(\varepsilon-\zeta+i(\varphi+\eta))-\frac{1}{2}(\varepsilon-\zeta-i(\varphi-\eta))} - e^{\varepsilon-\zeta+i\eta}$$

$$= e^{\frac{1}{2}(\varepsilon-\zeta+i(\varphi+\eta))}\left(e^{-\frac{1}{2}(\varepsilon-\zeta-i(\varphi-\eta))} - e^{\frac{1}{2}(\varepsilon-\zeta-i(\varphi-\eta))}\right)$$

$$= -2e^{\frac{\varepsilon-\zeta}{2}+i\frac{\varphi+\eta}{2}} \sin\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2} - i\,\frac{\varphi-\eta}{2}\right)$$

$$= -2e^{\frac{\varepsilon-\zeta}{2}+i\frac{\varphi+\eta}{2}} \sin A.$$

Ebenso ist

$$\Phi - e^{\zeta-\varepsilon+i\eta} = 2e^{-\frac{\varepsilon-\zeta}{2}+i\frac{\varphi+\eta}{2}} \sin\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2} + i\,\frac{\varphi-\eta}{2}\right)$$

$$= 2e^{-\frac{\varepsilon-\zeta}{2}+i\frac{\varphi+\eta}{2}} \sin A'$$

$$\Phi - e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta} = 2e^{-\frac{\varepsilon+\zeta}{2}+i\frac{\varphi-\eta}{2}}\sin\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}+i\frac{\varphi+\eta}{2}\right)$$

$$= 2e^{-\frac{\varepsilon+\zeta}{2}+i\frac{\varphi+\eta}{2}}\sin B.$$

$$\Phi - e^{\varepsilon+\zeta-i\eta} = -2e^{\frac{\varepsilon+\zeta}{2}+i\frac{\varphi-\eta}{2}}\sin\left(\frac{\varepsilon+\zeta}{2}-i\frac{\varphi+\eta}{2}\right)$$

$$= -2e^{\frac{\varepsilon+\zeta}{2}+i\frac{\varphi-\eta}{2}}\sin B'$$

und demnach

$$\Omega^2 = 16e^{i2\varphi}\sin A\sin A'\sin B\sin B'$$

oder

$$\frac{\Omega^2}{\Phi^2} = 16\sin A\sin A'\sin B\sin B'.$$

Weil nun A und A' und ebenso B und B' conjugirt sind, so ist der Ausdruck rechter Hand sicher pos., also auch $\frac{\Omega^2}{\Phi^2}\cdot\frac{\Omega}{\Phi}$ kann nun pos. oder neg. sein; allein da r pos. aufzufassen ist, so muss auch $\frac{\Omega}{\Phi}$ pos. aufgefasst werden, und es ist also

$$r = \frac{\sqrt{A-B}}{2}\cdot\frac{\Omega}{\Phi}$$

ferner

$$e^{i\varphi} = \Phi, \quad i\varphi = \log\Phi, \quad d\varphi = \frac{d\Phi}{i\Phi}$$

also

$$V = \sqrt{AB}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{r} = \frac{2\sqrt{AB}}{\sqrt{A-B}}\cdot\frac{1}{i}\int\frac{d\Phi}{\Omega}$$

wo nun die Variable Φ den Einheitskreis in pos. Richtung durchläuft, also wegen $\varepsilon > \zeta$ die beiden Wurzeln $e^{-\varepsilon-i\eta}$ und $e^{-\zeta-i\eta}$ rechtläufig umschliesst und $e^{\zeta-i\eta}$, $e^{\varepsilon-i\eta}$ ausschliesst.

In den Ausdruck 25) führt man die neue Variable y durch folgende Substitution ein:

$$\Phi = \text{[illegible]}$$

also

$$y = \text{[illegible]}$$

Es ist nun

$$\Phi - e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta} = \left(-\frac{p-i}{p+i} - e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta}\right)$$

$$= -\frac{1}{p+i}\left(p(1+e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta}) - i(1-e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta})\right)$$

$$= -\frac{1+e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta}}{p+i}\left(p - i\frac{1-e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta}}{1+e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta}}\right)$$

$$= -\frac{1+e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta}}{p+i}\left(p + i\frac{1-e^{\varepsilon-\zeta-i\eta}}{1+e^{\varepsilon-\zeta-i\eta}}\right)$$

und ebenso

$$\Phi - e^{\varepsilon-\zeta+i\eta} = -\frac{1+e^{\varepsilon-\zeta+i\eta}}{p+i}\left(p - i\frac{1-e^{\varepsilon-\zeta+i\eta}}{1+e^{\varepsilon-\zeta+i\eta}}\right)$$

$$\Phi - e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta} = -\frac{1+e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta}}{p+i}\left(p - i\frac{1-e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta}}{1+e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta}}\right)$$

$$\Phi - e^{\varepsilon+\zeta-i\eta} = -\frac{1+e^{\varepsilon+\zeta-i\eta}}{p+i}\left(p + i\frac{1-e^{-\varepsilon-\zeta+i\eta}}{1+e^{-\varepsilon-\zeta+i\eta}}\right)$$

und wenn man nun das Product

$$(1+e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta})(1+e^{\varepsilon-\zeta+i\eta})(1+e^{\varepsilon+\zeta-i\eta})(1+e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta})$$

abkürzend mit

$$\Pi(1+e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta})$$

bezeichnet und

$$a = -i\frac{1-e^{\varepsilon-\zeta-i\eta}}{1+e^{\varepsilon-\zeta-i\eta}} = \quad i\,\mathrm{tang}\left(\frac{\varepsilon-\zeta-i\eta}{2}\right)$$

$$a' = \quad i\frac{1-e^{\varepsilon-\zeta+i\eta}}{1+e^{\varepsilon-\zeta+i\eta}} = -i\,\mathrm{tang}\left(\frac{\varepsilon-\zeta+i\eta}{2}\right)$$

$$b = \quad i\frac{1-e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta}}{1+e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta}} = \quad i\,\mathrm{tang}\left(\frac{\varepsilon+\zeta+i\eta}{2}\right)$$

$$b' = -i\frac{1-e^{-\varepsilon-\zeta+i\eta}}{1+e^{-\varepsilon-\zeta+i\eta}} = -i\,\mathrm{tang}\left(\frac{\varepsilon+\zeta-i\eta}{2}\right)$$

setzt, so folgt

$$\Omega^2 = \frac{\Pi(1+e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta})}{(p+i)^4}P^2,$$

wenn

$$P^2 = (p-a)(p-a')(p-b)(p-b').$$

Die 4 Wurzeln der Gleichung $P^2 = 0$ sollen im Folgenden noch näher untersucht werden.

$$a = i \operatorname{tang}\left(\frac{\varepsilon-\zeta-i\eta}{2}\right)$$

$$= i\,\frac{\text{ſin}\left(\frac{\varepsilon-\zeta-i\eta}{2}\right)}{\text{coſ}\left(\frac{\varepsilon-\zeta-i\eta}{2}\right)} = \frac{\text{coſ}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\sin\frac{\eta}{2} + i\,\text{ſin}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\cos\frac{\eta}{2}}{\text{coſ}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\cos\frac{\eta}{2} - i\,\text{ſin}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\sin\frac{\eta}{2}}$$

Ich multiplicire nun Zähler und Nenner dieses Bruches mit

$$\text{coſ}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\cos\frac{\eta}{2} + i\,\text{ſin}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\sin\frac{\eta}{2};$$

dann ist der Zähler

$$Z = \begin{vmatrix} \text{coſ}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right), & -i\,\text{ſin}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right) \\ \cos\frac{\eta}{2}, & \sin\frac{\eta}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \text{coſ}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right), & -i\,\text{ſin}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right) \\ \sin\frac{\eta}{2}, & \cos\frac{\eta}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \text{coſ}^2\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right) - \text{ſin}^2\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right), & \text{coſ}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\sin\frac{\eta}{2} - i\,\text{ſin}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\cos\frac{\eta}{2} \\ \text{coſ}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\cos\frac{\eta}{2} - i\,\text{ſin}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\sin\frac{\eta}{2}, & 2\sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{\eta}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 2\sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{\eta}{2} - \sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{\eta}{2}\left(\text{coſ}^2\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right) - \text{ſin}^2\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\right)$$

$$+ i\,\text{ſin}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\text{coſ}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\left(\sin^2\frac{\eta}{2} + \cos^2\frac{\eta}{2}\right)$$

$$= \sin\frac{\eta}{2}\cos\frac{\eta}{2} + i\,\text{ſin}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\text{coſ}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\sin\eta + i\,\text{ſin}(\varepsilon-\zeta)),$$

und der Nenner

$$N = \left(\text{coſ}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\cos\frac{\eta}{2} - i\,\text{ſin}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\sin\frac{\eta}{2}\right)$$

$$\times \left(\text{coſ}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\cos\frac{\eta}{2} + i\,\text{ſin}\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\sin\frac{\eta}{2}\right)$$

$$= \text{coſ}^2\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\cos^2\frac{\eta}{2} + \text{ſin}^2\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\sin^2\frac{\eta}{2}$$

$$= \text{coſ}^2\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right) - \sin^2\frac{\eta}{2}\left(\text{coſ}^2\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right) - \text{ſin}^2\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right)\right)$$

$$= \text{coſ}^2\left(\frac{\varepsilon-\zeta}{2}\right) - \sin^2\frac{\eta}{2} \ldots$$

folglich

$$a = \frac{\sin\eta + i\,\mathrm{Sin}(\varepsilon - \zeta)}{\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta)}$$

und demnach

$$a' = \frac{\sin\eta - i\,\mathrm{Sin}(\varepsilon - \zeta)}{\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta)}$$

und weil sich die Wurzel b aus der Wurzel a durch Vertauschung von ζ und η mit $-\zeta$ und $-\eta$ ableiten lässt, so ist auch

$$b = -\frac{\sin\eta + i\,\mathrm{Sin}(\varepsilon + \xi)}{\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon + \zeta)}$$

und

$$b' = -\frac{\sin\eta + i\,\mathrm{Sin}(\varepsilon + \zeta)}{\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon + \zeta)}$$

Aus diesen Formeln ergibt sich, dass $\mathrm{mod}\,(\mathrm{recp}\,a) > \mathrm{mod}\,(\mathrm{recp}\,b)$ und weil

$$\frac{\mathrm{Sin}(\varepsilon + \zeta)}{\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon + \zeta)} - \frac{\mathrm{Sin}(\varepsilon - \zeta)}{\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta)}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}(\varepsilon + \zeta)\,\mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta) - \mathrm{Cos}(\varepsilon + \zeta)\,\mathrm{Sin}(\varepsilon - \zeta)}{(\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon + \zeta))(\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta))} +$$

$$+ \frac{\cos\eta\,(\mathrm{Sin}(\varepsilon + \zeta) - \mathrm{Sin}(\varepsilon - \zeta))}{(\ldots\ldots\ldots)}$$

$$\frac{\mathrm{Sin}(\varepsilon + \zeta)}{\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon + \zeta)} - \frac{\mathrm{Sin}(\varepsilon - \zeta)}{\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta)}$$

$$= \frac{\mathrm{Sin}\,2\zeta + 2\,\mathrm{Cos}\,\varepsilon\,\mathrm{Sin}\,\zeta\cos\eta}{(\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon + \zeta))(\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta))}$$

also positiv ist, so folgt auch

$$\mathrm{imcp}\,a < \mathrm{imcp}\,b$$

Ferner ist

$$1 - \frac{\sin^2\eta + \mathrm{Sin}^2(\varepsilon - \zeta)}{(\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta))^2} = \frac{\cos 2\eta + 2\cos\eta\,\mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta) + 1}{(\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta))^2}$$

$$= \frac{2\cos\eta\,(\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta))}{(\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta))^2}$$

$$= \frac{2\cos\eta}{\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta)}$$

und weil

$$\frac{\cos\eta}{\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon - \zeta)} > \frac{\cos\eta}{\cos\eta + \mathrm{Cos}(\varepsilon + \zeta)}$$

so folgt

$$\mathrm{mod}\,a < \mathrm{mod}\,b < 1$$

und somit liegen alle 4 Wurzeln innerhalb des *E. K.* Der Radius des Kreises durch die 4 Wurzeln werde mit n und der Mittelpunkt mit m bezeichnet; dann hat man

$$ne^{i\alpha} = a - m$$

und

$$ne^{-i\alpha} = a' - m$$

also

$$n^2 = (a - m)(a' - m);$$

ferner

$$n^2 = (b - m)(b' - m)$$

demnach

$$(a - m)(a' - m) = (b - m)(b' - m)$$

$$aa' - bb' = (a + a' - b - b')\, m$$

folglich

$$m = \frac{aa' - bb'}{a + a' - b - b'} = \frac{aa' - bb'}{L}$$

wo also

$$L = a + a' - b - b'$$

Nun ist

$$a + a' = 2.\operatorname{recp} a = 2\,\frac{\sin\eta}{\cos\eta + \operatorname{cof}(\varepsilon - \zeta)}$$

und

$$b + b' = 2.\operatorname{recp} b = -2\,\frac{\sin\eta}{\cos\eta + \operatorname{cof}(\varepsilon + \zeta)}$$

demnach

$$L = 2\sin\eta\left(\frac{1}{\operatorname{cof}(\varepsilon - \zeta) + \cos\eta} + \frac{1}{\operatorname{cof}(\varepsilon + \zeta) + \cos\eta}\right)$$

$$= \frac{2\sin\eta\,(\operatorname{cof}(\varepsilon + \zeta) + \operatorname{cof}(\varepsilon - \zeta) + 2\cos\eta)}{(\operatorname{cof}(\varepsilon - \zeta) + \cos\eta)(\operatorname{cof}(\varepsilon + \zeta) + \cos\eta)}$$

$$= \frac{4\sin\eta\,(\operatorname{cof}\varepsilon\operatorname{cof}\zeta + \cos\eta)}{(\operatorname{cof}\varepsilon\operatorname{cof}\zeta + \cos\eta - \operatorname{fin}\varepsilon\operatorname{fin}\zeta)(\operatorname{cof}\varepsilon\operatorname{cof}\zeta + \cos\eta + \operatorname{fin}\varepsilon\operatorname{fin}\zeta)}$$

$$= \frac{4\sin\eta\,(\operatorname{cof}\varepsilon\operatorname{cof}\zeta + \cos\eta)}{(\operatorname{cof}\varepsilon\operatorname{cof}\zeta + \cos\eta)^2 - \operatorname{fin}^2\varepsilon\operatorname{fin}^2\zeta}$$

$$= \frac{4\sin\eta\,(\operatorname{cof}\varepsilon\operatorname{cof}\zeta + \cos\eta)}{\frac{1}{2}(\operatorname{cof}2\varepsilon + \operatorname{cof}2\zeta) + 2\cos\eta\operatorname{cof}\varepsilon\operatorname{cof}\zeta + \cos^2\eta}$$

also ist L positiv. Ferner ist

$$aa' = \operatorname{tang}\left(\frac{\varepsilon - \zeta - i\eta}{2}\right)\operatorname{tang}\left(\frac{\varepsilon - \zeta + i\eta}{2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{fin}\left(\frac{\varepsilon - \zeta + i\eta}{2}\right)\cdot\operatorname{fin}\left(\frac{\varepsilon - \zeta + i\eta}{2}\right)}{\operatorname{cof}\left(\frac{\varepsilon - \zeta - i\eta}{2}\right)\operatorname{cof}\left(\frac{\varepsilon - \zeta + i\eta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\operatorname{cof}(\varepsilon - \zeta) - \cos\eta}{\operatorname{cof}(\varepsilon - \zeta) + \cos\eta}$$

und durch Vertauschung von η und ζ mit $-\eta$ und $-\zeta$ erhält man hieraus

$$bb' = \frac{\operatorname{cos}(\varepsilon+\zeta) - \cos\eta}{\operatorname{cos}(\varepsilon+\zeta)+\cos\eta}$$

folglich

$$aa'-bb' = \frac{1}{(\operatorname{cos}\varepsilon\operatorname{cos}\zeta+\cos\eta)^2 - \operatorname{sin}^2\varepsilon\operatorname{sin}^2\zeta} \times \begin{vmatrix} \operatorname{cos}(\varepsilon-\zeta)-\cos\eta . \operatorname{cos}(\varepsilon-\zeta)+\cos\eta \\ \operatorname{cos}(\varepsilon+\zeta)-\cos\eta . \operatorname{cos}(\varepsilon+\zeta)+\cos\eta \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{(\operatorname{cos}\varepsilon\operatorname{cos}\zeta+\cos\eta)^2 - \operatorname{sin}^2\varepsilon\operatorname{sin}^2\zeta} \times \begin{vmatrix} \operatorname{cos}(\varepsilon-\zeta).\cos\eta \\ \operatorname{cos}(\varepsilon+\zeta).\cos\eta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1. & -1 \\ 1. & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{4\operatorname{sin}\varepsilon\operatorname{sin}\zeta\cos\eta}{(\operatorname{cos}\varepsilon\operatorname{cos}\zeta+\cos\eta)^2 - \operatorname{sin}^2\varepsilon\operatorname{sin}^2\zeta}$$

Der Mittelpunkt des Kreises durch die 4 Wurzeln wird demnach durch die Gleichung

$$m = -\frac{\operatorname{sin}\varepsilon\operatorname{sin}\zeta\cos\eta}{(\operatorname{cos}\varepsilon\operatorname{cos}\zeta+\cos\eta)\sin\eta}$$

bestimmt. Derselbe liegt also auf der *R. L.*, westlich vom Ursprunge.

Um einen richtigen Einblick in das Wesen der Substitution $p = -i\frac{\Phi-1}{\Phi+1}$ zu erhalten und um aus derselben unmittelbar, also ohne Hülfe von $\tang\frac{\varphi}{2}$, den neuen Integrationsweg zu erkennen und um auch dem Verständniss der zweiten Art der Behandlung der Reduction des Integrals $\sqrt{AB}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{r}$ in die Normalform entgegen zu kommen, stelle ich noch folgende Betrachtung an.

1. Abbildung der innerhalb und ausserhalb eines beliebigen Kreises liegenden Teile des x Feldes durch die Function $\frac{1}{x-a}$

Die Strecke, welche den Pol a (Fig. 2.) mit dem Punkte x verbindet, wird nach Grösse und Richtung durch die Zahl $x-a$ dargestellt. Die Zahl $\frac{1}{x-a}$, welche mit y bezeichnet werden soll, kann

durch einen Strahl dargestellt werden, dessen Länge gleich dem reciproken Werte von $\mod(x-a)$ ist, und welcher unter dem Azimute $-\varphi$ vom Ursprunge abgeht, wenn die Phase von $x-a$ mit φ bezeichnet wird. Der Punkt x durchlaufe nun einen beliebigen Kreis. Um auf der y Ebene das Bild dieses Kreises zu erhalten, ziehe ich vom Ursprunge aus unter den Azimuten der Phasen von $(x-a)$ Strahlen und trage auf denselben die umgekehrten abs. Werte von $(x-a)$ ab.

Es sei also

$$oq' = \frac{1}{aq}, \quad op' = \frac{1}{ap}, \quad oq'' = \frac{1}{ax'''}, \quad op'' = \frac{1}{ax}$$

u. s. f. Weil nun

$$ap\,.\,aq = ax\,.\,ax'''$$

so ist auch

$$\frac{1}{ap\,.\,aq} = \frac{1}{ax\,.\,ax'''}$$

oder

$$oq'\,.\,op' = op''\,.\,oq''$$

die 4 Punkte p', q', p'', q'' liegen demnach auf einem Kreise. Es ist nun leicht zu zeigen, dass auch alle andern Bildpunkte auf dem y Felde auf diesem Kreise liegen müssen. Durchläuft x den Kreis von p aus in pos. Richtung, so durchläuft y einen andern von p' aus in neg. Richtung. Diese so erhaltene Figur I auf dem y Felde lege ich um die $R.$ $L.$ um, und erhalte so einen Kreis I', der von der Variablen y in demselben Sinne durchlaufen wird, in welchem x den gegebenen Punkt durchläuft. Mittelpunkt und Radius lassen sich auf folgende Weise bestimmen.

Der Radius des gegebenen Kreises sei n und die Strecke vom Pole a bis zum Mittelpunkte werde mit m bezeichnet. Demnach ist

$$\frac{1}{q-a} = \frac{1}{m-n}e^{-i\alpha}, \quad \frac{1}{p-a} = \frac{1}{m+n}e^{-i\alpha}$$

also Mittelpunkt

$$= \frac{1}{2e^{i\alpha}}\left(\frac{1}{m-n} + \frac{1}{m+n}\right) = \frac{m}{m^2-n^2}e^{-i\alpha}$$

und Radius

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-n} - \frac{1}{m+n}\right) = \frac{n}{m^2-n^2}$$

Man denke sich nun die x Ebene mit Kreisen belegt, welche mit dem gegebenen den Mittelpunkt gemein haben und wende auf dieselben die erhaltenen Formeln für Mittelpunkt und Radius an. α und m sind für alle Kreise constant und nur n ist unveränderlich. Weil nun

$$\frac{d\dfrac{n}{m^2-n^2}}{dn}=\frac{m^2+n^2}{(m^2-n^2)^2}, \qquad \frac{d\dfrac{m}{m^2-n^2}}{dn}=\frac{2mn}{(m^2-n^2)^2}$$

so nimmt sowohl der Radius, als auch der abs. Wert des Mittelpunktes mit wachsendem n zu und weil

$$\frac{m^2+n^2}{(m^2-n^2)^2}-\frac{2mn}{(m^2-n^2)^2}=\frac{(m-n)^2}{(m^2-n^2)^2}=\frac{1}{(m+n)^2}$$

so ist die Zunahme des Radius grösser. Alle Kreise auf dem x Felde, welche innerhalb des gegebenen liegen, geben auf dem y Felde wieder Kreise, die aber alle innerhalb des Kreises I' liegen; somit ist das Innere von I' Bild des Inneren des gegebenen Kreises und der Mittelpunkt b bildet sich im Punkte $\frac{e^{-i\alpha}}{m}$ ab. Mit wachsendem n entfernt sich der Mittelpunkt des Bildkreises immer mehr vom Ursprunge, bis er für $n=m$ in unendlicher Ferne liegt und weil für diesen Wert von n auch der Radius unendlich gross geworden ist, so geht der Kreis in eine Gerade AB über, welche in der Entfernnug $\frac{1}{2m}$ auf der Linie der Mittelpunkte senkrecht steht. Der Teil des y Feldes, welcher zwischen dieser Geraden nnd dem Kreise I' liegt, ist also Bild des Kreisringes, welcher von dem gegebenen und dem durch den Pol a gehenden Kreise gebildet wird. Die Mittelpunkte derjenigen Kreise nun, deren Radien grösser als m sind, werden durch die Formel

$$M=\frac{m}{n^2-m^2}e^{-i(\alpha+\pi)}$$

bestimmt. Sie liegen auf einer Geraden, die unter dem Azimute $-(\alpha+\pi)$ vom Ursprunge abgeht, also auf der Rückverlängerung der Linie $\overline{oA}$. Der Kreis II z. B. ist Bild des Kreises durch r auf dem x Felde. Weil $\frac{n}{n^2-m^2}>\frac{m}{n^2-m^2}$, so schliessen alle diese Kreise den Ursprung ein, welcher selbst Bild des Horizontes wird. Der Teil des x Feldes, welcher ausserhalb des Kreises durch r liegt, bildet sich in das Innere des Kreises II ab. Diese Betrachtungsweise schliesst die Abbildung des x Feldes für alle Lagen des Poles a in sich, derselbe mag also ausserhalb, innerhalb oder auf dem gegebenen Kreise liegen. Liegt der Pol a ausserhalb des gegebenen Kreises, so bildet sich derselbe wieder als Kreis ab, und das Innere desselben ist Bild des Inneren des gegebenen Kreises, während das Aeussere Bild des übrigen Teiles des x Feldes ist. Liegt der Pol a auf der Peripherie des Kreises, so ist eine Gerade Bild desselben, und das

Innere bildet sich auf der einen, und das Aeussere auf der andern Seite derselben ab. Liegt der Pol a schliesslich im Innern eines Kreises, so ist das Bild desselben wieder ein Kreis, und der Teil des x Feldes, welcher ausserhalb des gegebenen Kreises liegt, bildet sich in das Innere desselben ab, während das Innere sich ausserhalb abbildet. In allen Fällen ist der Horizont des y Feldes Bild des Poles, während der Horizont des x Feldes sich im Ursprunge abbildet. Wir wollen noch einen analytischen Ausdruck ableiten, welcher die Bilder auf der y Ebene ebenfalls offenbart. Der Pol werde mit a bezeichnet, der Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius n sei b und seine Entfernung vom Pole m. Wenn nun irgend ein Punkt dieses Kreises, bezogen auf den Mittelpunkt als Ursprung, mit x bezeichnet wird, dann ist

$$y = \frac{1}{x+b-a} = \frac{1}{ne^{i(\alpha+\varphi)}+me^{i\alpha}} = \frac{e^{-i\alpha}}{m+ne^{i\varphi}}$$

also

$$y - \frac{me^{-i\alpha}}{m^2-n^2} = \frac{e^{-i\alpha}}{m+ne^{i\varphi}} - \frac{me^{-i\alpha}}{m^2-n^2} = \frac{e^{-i\alpha}}{m^2-n^2}\left(\frac{-n^2-mne^{i\varphi}}{m+ne^{i\varphi}}\right)$$

$$= -\frac{ne^{-i\alpha}}{m^2-n^2}\left(\frac{n+me^{i\varphi}}{m+ne^{i\varphi}}\right)$$

$$= -\frac{ne^{-i(\alpha+\varphi)}}{m^2-n^2}\cdot\left(\frac{m+ne^{-i\varphi}}{m+ne^{i\varphi}}\right)$$

folglich

$$y = \frac{me^{-i\alpha}}{m^2-n^2} - \frac{ne^{-i(\alpha+\varphi)}}{m^2-n^2}\left(\frac{m+ne^{-i\varphi}}{m+ne^{i\varphi}}\right)$$

Weil nun der abs. Wert des eingeklammerten Bruches 1 ist, so durchläuft nach dieser Formel y einen Kreis um den Mittelpunkt $\frac{me^{-i\alpha}}{m^2-n^2}$ mit dem Radius $\frac{n}{m^2-n^2}$, wenn φ von o bis 2π läuft. Liegt der Punkt a auf der Peripherie des Kreises, so ziehe man durch denselben einen Durchmesser, und der Winkel, den irgend ein Strahl, dessen Länge r sei, mit demselben bildet, werde mit φ bezeichnet; dann ist

$$y = \frac{1}{re^{i(\alpha+\varphi)}} = \frac{1}{re^{i\alpha}}e^{-i\varphi} = \frac{1}{re^{i\alpha}}(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

Nun ist

$$r = 2n\cos\varphi$$

also

$$y = \frac{e^{-i\alpha}}{2n} 1 - i\operatorname{tang}\varphi)$$

Diese Formel stellt nun aber eine Gerade dar, welche auf einer andern Geraden, die unter dem Azimute $-\alpha$ vom Ursprunge abgeht, in der Entfernung $\frac{1}{2n}$ senkrecht steht.

2. Abbildung der innerhalb und ausserhalb des Einheitskreises liegenden Teile des x Feldes mittelst der Formel

$$-i\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Zum Zwecke der Abbildung gebe ich dem Ausdrucke $-i\frac{x-1}{x+1}$ die Form $-i\left(1-\frac{2}{1+x}\right)=-i+i\frac{2}{1+x}$. Liegt nun x auf dem Einheitskreise, so wird $x+1$ durch einen Strahl dargestellt, welcher den Ursprung mit einem Punkte des Kreises verbindet, welcher mit dem Radius 1 um den Punkt 1 beschrieben wird. Durchläuft nun x vom Punkte 1 aus den innern Rand des Einheitskreises rechtläufig, so durchläuft nach dem Vorhergehenden $\frac{2}{x+1}$ die Südhälfte einer Geraden, welche auf der Realitätslinie in der Entfernung 1 senkrecht steht, in südlicher Richtung, durchläuft dann die Osthälfte des Horizontes rechtläufig und kehrt über die Nordhälfte der Geraden zur Realitätslinie zurück. $i\frac{2}{x+1}$ umläuft dann in pos. Richtung das ganze Gebiet, welches nördlich der Geraden liegt, die in der Entfernung i auf der lateralen Axe senkrecht steht und schliesslich umkreist $-i+i\frac{2}{x+1}$ oder $-i\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ vom Ursprunge aus in pos. Richtung das ganze Gebiet nördlich der Realitätslinie. Das x Feld wird nun durch den Einheitskreis, die Realitätslinie und die laterale Axe in verschiedene Teile geteilt, die einzeln abgebildet werden sollen.

Kreis I des x Feldes stelle den Horizont dar, Kreis II sei der Einheitskreis, und III der Kreis durch die 4 Wurzeln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, etc. Ebenso sei IV der Horizont des y Feldes, V der Einheitskreis und IV der Kreis durch die 4 Wurzeln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, etc. Die entsprechenden Wege beider Variablen x und y seien mit den kleinen Buchstaben a, b, c, etc. und die entsprechenden Gebiete beider Felder mit den grossen Buchstaben A, B, C etc. bezeichnet. Durchläuft x den innern Rand des Einheitskreises vom Punkte 1 aus in pos. Richtung, so umläuft die Variable y vom Nullpunkte aus die ganze Nordhälfte des y Feldes in pos. Richtung. Ferner ist der Rand der Südhälfte des y Feldes Bild des äusseren Randes des Einheitskreises. Der Horizont des y Feldes ist das Bild eines unendlich kleinen rückläufigen Kreises um den Punkt -1. Denn für einen solchen Punkt ist $x=-1+\varrho e^{i\varphi}$, also

$$y=+\frac{2}{\varrho}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$$

wo φ von $\frac{\pi}{2}$ bis $-\frac{3\pi}{2}$ abnimmt. Die pos. Hälfte der Realitätslinie des x Feldes bildet sich auf der lateralen Axe zwischen $+i$ und $-i$ ab, und der nördliche Horizont, in pos. Richtung durchlaufen, gibt als Bild einen unendlich kleinen neg. Halbkreis um den Punkt $-i$. Denn für einen Punkt desselben ist

$$y = -i\left(\frac{Re^{i\varphi}-1}{Re^{i\varphi}+1}\right) = -i + \frac{2}{R}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}$$

wo φ von 0 bis π läuft. Ferner wird die neg. Realitätslinie vom Westpunkte bis zum Punkte -1 auf die neg. laterale Axe zwischen $-i$ und dem Südpunkte geworfen, während der östl. Horizont Bild eines kleinen neg. Halbkreises um -1 ist. Das Stück der Realitätslinie zwischen -1 und 0 bildet sich auf der nördl. Hälfte der lateralen Axe zwischen dem Nordpunkte und $+i$ ab. Durchläuft demnach x den Rand der Nordhälfte oder Südhälfte des x Feldes, so durchläuft y den Rand der Ost- oder Westhälfte des y Feldes. Durchläuft schliesslich x vom Ursprunge aus die laterale Axe in nördlicher Richtung, so durchläuft y vom Punkte $+i$ aus den Einheitskreis in neg. Richtung. Denn es ist

$$y = -i\left(\frac{ai-1}{ai+1}\right) = i\left(\frac{1-ai}{1+ai}\right)$$

hat also beständig den abs. Wert 1. Der innere Rand des Einheitskreises auf dem y Felde ist also Bild des Randes der Osthälfte des x Feldes, während der äussere Rand Bild des Randes der Westhälfte ist. Wenn nun

$$\mathfrak{a} = e^{\varepsilon-\xi+i\eta}, \quad \mathfrak{b} = e^{\xi-\varepsilon+i\eta}, \quad \mathfrak{c} = e^{-\varepsilon-\xi-i\eta}, \quad \mathfrak{d} = e^{\varepsilon+\xi-i\eta}$$

die Wurzeln der Gleichung $\Omega^2 = 0$ sind, so ist $\mathrm{mod}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathrm{mod}(\mathfrak{d}\mathfrak{c}) = 1$ und demnach liegen dieselben auf einem Kreise, der von dem Einheitskreise rechtwinklig geschnitten wird. Weil nun derselbe ganz in der Osthälfte des x Feldes liegt, also der Pol 0 der Abbildung ausserhalb desselben, so ist sein Bild ein Kreis, der ganz innerhalb des Einheitskreises liegt, und dessen Mittelpunkt wegen der conformen Abbildung auf der Realitätslinie liegt. Die Abbildung zeigt also, dass durch die Substitution

$$y = -i\left(\frac{\Phi-1}{\Phi+1}\right)$$

alle Wurzeln der neuen Gleichung in das Innere des E. K. verlegt werden und wieder auf einem Kreise liegen.

Es war

$$\Omega^2 = \frac{\Pi(1+e^{-\varepsilon+\zeta+i\eta})}{(p+i)^4} P^2$$

wo

$$P^2 = (p-a)(p-a')(p-b)(p-b')$$

Für die Wurzeln der Gleichung

$$\Omega^2 = \Phi^4 - \frac{4(\sqrt{A}x - i\sqrt{B}y)}{A-B}\Phi^3 + \frac{(4(x^2+y^2+z^2)+2(A+B))}{A-B}\Phi^2 - 4\frac{(\sqrt{A}x+i\sqrt{B}y)}{A-B}\Phi + 1 = 0$$

die wir mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ bezeichnet haben, gelten nun die Relationen

$$\Sigma C_1(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d} = \frac{4}{A-B}(\sqrt{A}x - i\sqrt{B}y)$$

$$\Sigma C_2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{c}+\mathfrak{d}) + \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\mathfrak{d} = \frac{4(x^2+y^2+z^2)+2(A-B)}{A-B}$$

$$\Sigma C_3(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{d}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} = \frac{4}{A-B}(\sqrt{A}x + i\sqrt{B}y)$$

$$\Sigma C_4(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} = 1$$

Nun ist auch

$$1+\Sigma C_1+\Sigma C_2+\Sigma C_3+\Sigma C_4 = (1+\mathfrak{a})(1+\mathfrak{b})(1+\mathfrak{c})(1+\mathfrak{d})$$

also

$$2+\Sigma C_1+\Sigma C_2+\Sigma C_3 = \Pi(1+e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta})$$

und demnach

$$\Pi(1+e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta}) = 2+\frac{8\sqrt{A}x}{A-B}+\frac{4(x^2+y^2+z^2)}{A-B}+2\frac{A+B}{A-B}$$

$$= \frac{4}{A-B}(A+2\sqrt{A}x+x^2+y^2+z^2)$$

$$= \frac{4}{A-B}((\sqrt{A}+x)^2+y^2+z^2)$$

$$= \frac{4}{A-B}H^2$$

wenn wir mit H die Entfernung des Bezugspunktes vom neg. Ende der x Axe bezeichnen.

Somit ist

$$\Omega^2 = \frac{4}{(p+i)^4}\cdot\frac{H^2}{A-B}P^2$$

Um das Vorzeichen der Quadratwurzel zu bestimmen, dividire ich mit Φ^2; also ist

$$\frac{\Omega^2}{\Phi^2} = \frac{4H^2}{A-B} \cdot \frac{1}{(p+i)^2(p+i)^2} P^2 = \frac{4H^2}{A-B} \cdot \frac{1}{(p^2+1)^2} P^2$$

Weil nun $\frac{\Omega}{\Phi}$ pos. sein muss, so ist

$$\frac{\Omega}{\Phi} = \frac{2H}{A-B} \cdot \frac{1}{p^2+1} P = \frac{2}{(p-i)(p+i)} \cdot \frac{H}{A-B} P$$

also

$$\Omega = -\frac{2}{(p+i)^2} \cdot \frac{H}{\sqrt{A-B}} P$$

Aus

$$\Phi = \frac{1+ip}{1-ip} = -\frac{p-i}{p+i} = -1 + \frac{2i}{p+i}$$

folgt

$$d\Phi = -\frac{2i\,dp}{(p+i)^2}$$

somit

$$T' = \frac{2\sqrt{AB}}{H} \int \frac{dp}{P}$$

Durchläuft Φ den innern Rand des *E. K.* von 1 aus in pos. Richtung, so durchläuft p vom Ursprunge aus in pos. Richtung den Rand der Nordhälfte des Zahlenfeldes. Weil aber der Integrand im Horizonte verschwindet, so ist

$$T' = \frac{2\sqrt{AB}}{H} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{P}$$

Die Pole dieses Integrals sind die Wurzeln der Gleichung $P^2 = 0$. Da dieselben aber complex sind, so kann die Realitätslinie ungehindert passirt werden und das Integral hat einen endlichen pos. Wert.

Das Polynom P^2 soll nun durch eine neue Substitution in ein anderes verwandelt werden, dessen Wurzeln sämtlich auf dem Einheitskreise liegen. Während also die alte Variable p den Kreis durch die 4 Wurzeln der Gleichung $P^2 = 0$ passirt, muss die neue Variable den *E. K.* durchlaufen. Wir setzen demnach

$$p = m + nq$$

wo m Mittelpunkt des Wurzelkreises und n dessen Radius ist.

Es ist also

$$p - a = n\left(q - \frac{a-m}{n}\right)$$

demnach

$$P^2 = n^4\left(q - \frac{a-m}{n}\right)\left(q - \frac{a'-m}{n}\right)\left(q - \frac{b-m}{n}\right)\left(q - \frac{b'-m}{n}\right)$$

$$= n^4\,\Pi\left(q - \frac{a-m}{n}\right)$$

Ferner ist

$$\frac{a-m}{n} = \frac{L(a-m)}{Ln}$$

und weil

$$Lm = aa' - bb'$$

so ist auch

$$L(a-m) = a^2 - a(b+b') + bb' = (a-b)(a-b')$$

und ebenso

$$L(a'-m) = (a'-b)(a'-b')$$

$$L(b-m) = -(b-a)(b-a')$$

$$L(b'-m) = -(b'-a)(b'-a')$$

somit

$$L^2(a-m)(a'-m) = (a-b)(a-b')(a'-b)(a'-b')$$

oder, weil

$$n^2 = (a-m)(a'-m)$$

$$(Ln)^2 = (a-b)(a-b')(a'-b)(a'-b')$$

Da nun die Factoren $(a-b)$ und $(a'-b')$ und ebenso $(a-b')$ und $(a'-b)$ conjugirt sind, so ist $(Ln)^2$ positiv, und weil nach früherem L und n positiv sind, so hat man in der Gleichung

$$Ln = \sqrt{(a-b)(a-b')(a'-b)(a'-b')}$$

die rechte Seite positiv zu verstehen.

Wir führen nun folgende Abkürzungen ein:

$$\alpha^2 = a-b;\quad \alpha'^2 = a'-b';\quad \beta^2 = a-b';\quad \beta'^2 = a'-b$$

und verstehen unter α, α', β und β' diejenigen Wurzeln aus diesen Ausdrücken, deren reelle Componenten positiv sind.

Die Wurzeln der Gleichung $P^2 = 0$ sind nun

$$\frac{a-m}{n} = \frac{L(a-m)}{Ln} = \frac{\alpha\,\beta}{\alpha'.\beta'}$$

$$\frac{a'-m}{n} = \frac{L(a'-m)}{Ln} = \frac{\alpha'.\beta'}{\alpha\,\beta}$$

—eil

$$L(b-m) = -\alpha^2\beta'^2, \quad Ln = \alpha\alpha'\beta\beta'$$

so ist

$$\frac{b-m}{n} = \frac{L(b-m)}{Ln} = \frac{\alpha\ \beta'}{\alpha'.\beta}$$

und ebenso

$$\frac{b'-m}{n} = \frac{L(b'-m)}{Ln} = \frac{\alpha'.\beta}{\alpha\ .\beta'}.$$

Weil

$$\bmod\frac{\alpha\ \beta}{\alpha'\beta'} = \bmod\frac{\alpha'\beta'}{\alpha\ \beta} = \bmod\frac{\alpha\ \beta'}{\alpha'\beta} = \bmod\frac{\alpha'\ \beta'}{\alpha\ \beta'}$$

so liegen dieselben auf dem Einheitskreise. Es ist nun

$$P^2 = \frac{n^4}{\alpha^2\beta^2\alpha'^2\beta'^2}(\alpha\beta q - \alpha'\beta')(\alpha'\beta' q - \alpha\beta)(\alpha'\beta q + \alpha\beta')(\alpha\beta' q + \alpha'\beta)$$

$$= \frac{n^2}{L^2}\Pi(\alpha\beta q - \alpha'\beta')$$

und weil nun die Factoren des Productes Π conjugirt sind, so ist der Ausdruck rechter Hand für alle reellen Werte von q positiv. Für reelle q sind aber auch die p reell und weil dann P positiv sein muss, so folgt

$$P = \frac{n}{L}\sqrt{\Pi(\alpha\beta q - \alpha'\beta')}$$

folglich

$$T' = \frac{2\sqrt{AB}}{H} L \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{\sqrt{\Pi(\alpha\beta q - \alpha'\beta')}}$$

Es soll nun eine Substitution gesucht werden, durch welche der Ausdruck $\Pi(\alpha\beta q - \alpha'\beta')$ so verwandelt wird, dass die Wurzeln des neuen Polynoms auf der lateralen Axe liegen. Durchläuft also die Variable q den Einheitskreis, so muss die neue die laterale Axe durchlaufen. Wir wissen nun aus dem früheren, dass in diesem Falle der Ausdruck $\frac{2}{q+1}$ eine Gerade in südlicher Richtung durchläuft, welche auf der *R. L.* in der Entfernung 1 senkrecht steht. Der Weg von $\frac{2}{q+1}$ ist demnach eine in der Entfernung -1 vom Ursprunge auf der *R. L.* senkrecht stehende Gerade, die in nördlicher Richtung durchlaufen wird. Soll nun aber die laterale Axe durchmessen werden, so müssen wir noch 1 dazu setzen, und die neue Variable ist demnach

$$s = 1 - \frac{2}{q+1} = \frac{q-1}{q+1}, \quad q = \frac{1+s}{1-s}.$$

Da nun

$$(\alpha'\beta'q-\alpha\beta) = \left(\alpha'\beta'\frac{1+s}{1-s} - \alpha\beta\right) = \frac{1}{1-s}((\alpha\beta+\alpha'\beta')s-(\alpha\beta-\alpha'\beta')),$$

und

$$(\alpha\beta q-\alpha'\beta') = \left(\alpha\beta\frac{1+s}{1-s} - \alpha\beta\right) = \frac{1}{1-s}((\alpha\beta+\alpha'\beta')s-(\alpha'\beta'-\alpha\beta)),$$

$$(\alpha\beta'q+\alpha'\beta) = \left(\alpha\beta'\frac{1+s}{1-s} - \alpha'\beta\right) = \frac{1}{1-s}((\alpha\beta'+\alpha'\beta)+s(\alpha\beta'-\beta\alpha'))$$

$$(\alpha'\beta q+\alpha\beta') = \left(\alpha'\beta\frac{1-s}{1+s} - \alpha\beta'\right) = \frac{1}{1-s}((\alpha'\beta+\alpha\beta')+s(\alpha'\beta-\alpha\beta'))$$

so folgt

$$\Pi(\alpha\beta q-\alpha'\beta' = \frac{1}{(1-s)^4}\Pi((\alpha\beta+\alpha'\beta')s-(\alpha'\beta'-\alpha\beta)),$$

ein Ausdruck, der durch Einführung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} f &= \alpha\beta + \alpha'\beta' \\ ig &= \alpha\beta - \alpha'\beta' \\ h &= \alpha\beta' + \alpha'\beta \\ ij &= \alpha\beta' - \alpha'\beta \end{aligned}$$

wo also f, g, h und j reelle Grössen sind, folgende Form annimmt:

$$\begin{aligned} \Pi(\alpha\beta q-\alpha'\beta') &= \frac{1}{(1-s)^4}(fs-ig)(fs+ig)(h+isj)(h-isj) \\ &= \frac{1}{(1-s)^4}(f^2s^2+g^2)h^2+j^2s^2) \\ &= \frac{1}{(1-s)^4}S^2 \end{aligned}$$

Die Wurzeln $S^2=0$ sind nun $i\frac{g}{f}$, $-i\frac{g}{f}$, $i\frac{h}{j}$, $-i\frac{h}{j}$, liegen also auf der lateralen Axe. Weil $\sqrt{\Pi}$ auf dem ganzen Wege pos. ist, so muss S auch pos. sein, folglich ist

$$\sqrt{\Pi} = \frac{1}{(1-s)^2}S.$$

Es war

$$q = -\frac{s+1}{s-1} = -1+\frac{2}{1-s},$$

also

$$dq = \frac{2\,ds}{(1-s)^2}.$$

Läuft die Variable q auf der *R. L.* vom Westpunkte aus über -1, 0, $+1$ bis zum Ostpunkte, so passirt s ebenfalls die *R. L.* und zwar vom Punkte 1 aus bis zum Ostpunkte, dann vom Westpunkte über -1 und 0 zum Punkte 1 zurück, also die ganze *R. L.* vom Westpunkte bis zum Ostpunkte. Das Potential bekommt nun folgende Form:

$$T' = \frac{4\sqrt{AB}}{H} L \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{S}$$

oder auch

$$T' = \frac{8\sqrt{AB}}{H} L \int_{0}^{\infty} \frac{ds}{S}$$

Das Polynom S^2 soll nun durch eine neue Substitution in ein anderes verwandelt werden, welches nur noch 2 verschiedene reelle Wurzeln mehr hat. Eine solche Substitution ist

$$s^2 = -\frac{gh}{fj} u$$

und die Wurzeln des neuen Polynoms sind $\frac{gj}{fh}$ und $\frac{fh}{gj}$. Wir setzten

$$f = \alpha\beta + \alpha'\beta' \quad \text{und} \quad h = \alpha\beta' + \alpha'\beta,$$

also

$$\begin{aligned} hf &= \alpha\alpha'(\beta^2 + \beta'^2) + \beta\beta'(\alpha^2 + \alpha'^2) \\ &= \alpha\alpha'(a + a' - b - b') + \beta\beta'(a + a' - b - b') \\ &= L(\alpha\alpha' + \beta\beta'). \end{aligned}$$

Weil nun sowol L, als auch $\alpha\alpha'$ und $\beta\beta'$ pos. sind, so ist auch hf pos. Ferner ist

$$g = \frac{1}{i}(\alpha\beta - \alpha'\beta'), \qquad j = \frac{1}{i}(\alpha\beta' - \alpha'\beta)$$

also

$$\begin{aligned} -gj &= \beta\beta'(\alpha^2 + \alpha'^2) - \alpha\alpha'(\beta^2 + \beta'^2) \\ &= \beta\beta'(a + a' - b - b') - \alpha\alpha'(a + a' - b - b') \\ &= L(\beta\beta' - \alpha\alpha') \end{aligned}$$

folglich

$$fk . gj = L^2(\alpha\alpha' - \beta\beta')(\alpha\alpha' + \beta\beta') = L^2(\alpha^2\alpha'^2 - \beta^2\beta'^2).$$

Nun ist

$$\alpha^2 = a - b = i\left(\operatorname{tang}\left(\frac{\varepsilon-\zeta-i\eta}{2}\right) - \operatorname{tang}\left(\frac{\varepsilon+\zeta+i\eta}{2}\right)\right)$$

$$= i\left(\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon-\zeta-i\eta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varepsilon-\zeta-i\eta}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\varepsilon+\zeta+i\eta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varepsilon+\zeta+i\eta}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{i}{\cos\left(\frac{\varepsilon-\zeta-i\eta}{2}\right)\cos\left(\frac{\varepsilon+\zeta+i\eta}{2}\right)} \times$$

$$\times\left(\sin\left(\frac{\varepsilon-\zeta-i\eta}{2}\right)\cos\left(\frac{\varepsilon+\zeta+i\eta}{2}\right)\right.$$

$$\left. - \cos\left(\frac{\varepsilon-\zeta-i\eta}{2}\right)\sin\left(\frac{\varepsilon+\zeta+i\eta}{2}\right)\right)$$

$$= -\frac{2i\sin(\zeta+i\eta)}{\cos(\zeta+i\eta)+\cos\varepsilon}$$

cbenso

$$\alpha'^2 = \frac{2i\sin(\zeta-i\eta)}{\cos(\zeta-i\eta)+\cos\varepsilon},$$

demnach

$$(\alpha\alpha')^2 = \frac{4\sin(\zeta+i\eta)\sin(\zeta-i\eta)}{(\cos(\zeta+i\eta)+\cos\varepsilon)(\cos(\zeta-i\eta)+\cos\varepsilon)}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist aber

$$Z = 4\sin(\zeta+i\eta)\sin(\zeta-i\eta) = 2(\cos 2\zeta - \cos 2\eta)$$
$$= 2(\cos^2\zeta + \sin^2\zeta - \cos^2\eta + \sin^2\eta)$$
$$= 2(1 + 2\sin^2\zeta - 1 + 2\sin^2\eta) = 4(\sin^2\zeta + \sin^2\eta)$$
$$= \frac{4}{A-B}(B+t'-B-t'') = \frac{4}{A-B}(t'-t'')$$

und der Nenner

$$N = (\cos\zeta\cos\eta + \cos\zeta + i\sin\zeta\sin\eta)(\cos\zeta\cos\eta + \cos\varepsilon - i\sin\zeta\sin\eta)$$
$$= \cos^2\zeta\cos^2\eta + \cos^2\varepsilon + 2\cos\zeta\cos\varepsilon\cos\eta + \sin^2\zeta\sin^2\eta$$
$$= \cos^2\varepsilon + \cos^2\zeta + \cos^2\eta - 1 + 2\cos\varepsilon\cos\zeta\cos\eta$$

und weil

$$x^2 = \frac{(A+t)(A+t')(A+t'')}{A(A-B)},$$

also

$$x = \frac{A-B}{\sqrt{A}}\cos\varepsilon\cos\zeta\cos\eta,$$

so ist

$$N = \left(\frac{A+t}{A-B} + \frac{A+t'}{A-B} + \frac{A+t''}{A-B} - 1 + \frac{2\sqrt{Ax}}{A-B}\right)$$
$$= \frac{1}{A-B}(2A+B+(t+t'+t'')+\sqrt{Ax}).$$

Wir haben aber gefunden, dass

$$\Sigma C_1(t,t',t'') = x^2+y^2+z^2-(A+B)$$

also

$$N = \frac{1}{A-B}(A+x^2+y^2+z^2+2\sqrt{Ax})$$
$$= \frac{H^2}{A-B}$$

folglich

$$(\alpha\alpha')^2 = 4\frac{t'-t''}{H^2}.$$

Wenn man ε mit ζ vertauscht, so gehen a und a' in einander über, und b und b' bleiben unverändert. Dann gehn also α und β' und α' in β über. Man braucht folglich nur t mit t' zu vertauschen um $(\beta\beta')^2$ zu bekommen, also

$$(\beta\beta')^2 = 4\frac{t-t''}{H^2}$$

somit

$$\alpha^2\alpha'^2 - \beta^2\beta'^2 = (\alpha\alpha'+\beta\beta')(\alpha\alpha'-\beta\beta') = \frac{4}{H^2}(t'-t),$$

also neg. Weil nun $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ pos. ist, so muss $\alpha\alpha'-\beta\beta'$ neg. sein, also auch

$$gj = L(\alpha\alpha'-\beta\beta')$$

und die beiden Wurzeln $\frac{gj}{fh}$, $\frac{fh}{gj}$ sind daher negativ.

Weil

$$-\frac{gh}{fj} = -\frac{fghj}{(fj)^2}$$

pos. ist, so setze ich

$$-\frac{gh}{fj} = \gamma^2$$

und verstehe unter γ die pos. Quadratwurzel; dann wird

$$S^2 = \gamma^2(fhu-gj)(fh-gju)$$
$$= \gamma^2 R^2.$$

Ferner ist

$$s = \gamma u^{\frac{1}{2}}, \quad \text{also} \quad ds = \tfrac{1}{2}\gamma u^{-\frac{1}{2}}$$

demnach

$$T' = \frac{4\sqrt{AB}}{H^2} L \int_0^\infty \frac{du}{u^{\frac{1}{2}} . R}.$$

Wenn wir nun in dem Ausdrucke für R^2 für fk und gj die früher erhaltenen Werte einsetzen, so erhält man

$$\begin{aligned} R^2 &= L^2((\alpha\alpha' + \beta\beta')u - (\alpha\alpha' - \beta\beta'))((\alpha\alpha' + \beta\beta') - (\alpha\alpha' - \beta\beta')u) \\ &= L^2(\beta\beta'(1+u) - \alpha\alpha'(1-u))(\beta\beta'(1+u) + \alpha\alpha'(1-u)) \\ &= L^2(\beta^2\beta'^2(1+u)^2 - \alpha^2\alpha'^2(1-u)^2) \\ &= \frac{4L^2}{H^2}((t-t'')(1+u)^2 - (t'-t'')(1-u)^2) \\ &= \frac{4L^2}{H^2} . U^2, \end{aligned}$$

wo U^2 auf der ganzen *R. L.* pos. ist; also

$$R = \frac{2L}{H} U$$

und demnach

$$T' = 2\sqrt{AB} \int_0^\infty \frac{du}{u^{\frac{1}{2}} U},$$

ein Integral, welches sowol an der untern, wie an der obern Grenze convergirt. Es ist nun leicht, dieses Integral in ein anderes zu verwandeln, welches sich nur von 0 bis 1 ausdehnt. Ich schreibe deshalb

$$T' = 2\sqrt{AB} \int_0^1 \frac{du}{u^{\frac{1}{2}} U} + 2\sqrt{AB} \int_1^\infty \frac{du}{u^{\frac{1}{2}} U}$$

und ersetze im zweiten Integrale u durch $\frac{1}{u'}$; dann wird

$$T' = 4\sqrt{AB} \int_0^1 \frac{du}{u^{\frac{1}{2}} U}.$$

In dem Ausdrucke

$$U^2 = (1-u)^2 . \left((t-t'')\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2 + t'' - t'\right)$$

setze man nun

$$(t-t'') . \left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2 + t'' = v;$$

dann umfasst der neue Integrationsweg das Stück der *R. L.* von …os. Werte t an bis zum Ostpunkte.

$$dv = 2(t-t'')\frac{1+u}{1-u}d\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2(t-t'')\frac{1+u}{1-u}d\left(\frac{2}{1-u}-1\right)$$

$$= 4(t-t'')\frac{1+u}{(1-u)^3}du$$

also

$$du = \frac{(1-u)^3}{4(t-t'')(1+u)}dv$$

Ferner ist

$$4u = (1+u)^2-(1-u)^2 = (1-u)^2\left(\frac{(1+u)^2}{(1-u)^2}-1\right)$$

also

$$2\sqrt{u} = (-u)\sqrt{\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2-1}$$

und aus der Substitution folgt

$$\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2 = \frac{v-t''}{t-t''}$$

also

$$\frac{1+u}{1-u} = \sqrt{\frac{v-t''}{t-t''}}$$

demnach

$$\frac{du}{\sqrt{uU}} = \frac{dv}{2\frac{1+u}{1-u}(t-t'')\sqrt{\frac{v-t}{t-t''}}\sqrt{(v-t')}}$$

$$= \frac{dv}{2\sqrt{(v-t)(v-t')(v-t'')}}$$

folglich

$$T' = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{dv}{\sqrt{(v-t)(v-t')(v-t'')}}$$

§ 7. Herstellung der Normalform nach der zweiten Methode.

Weil $\operatorname{mod}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \operatorname{mod}(\mathfrak{c}\mathfrak{d}) = 1$ ist, so liegen die 4 Wurzeln der Gleichung $\Omega^2 = 0$ auf einem Kreise, welcher von dem Einheitskreise rechtwinklig geschnitten wird. Es war

$$\mathfrak{a} = e^{\xi-\zeta+i\eta} = \frac{aa''}{a'}$$

$$\mathfrak{b} = e^{[illegible]\zeta+i\eta} = \frac{a'a''}{a}$$

$$\mathfrak{c} = e^{-\varepsilon-\zeta-i\eta} = \frac{1}{aa'a''},$$

$$\mathfrak{d} = e^{\varepsilon+\zeta-i\eta} = \frac{aa'}{a''}$$

Die Mitte f der Sehne, welche die beiden Punkte $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ verbindet, ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a'a''}{a} + \frac{aa''}{a'}\right) = \frac{a''}{2} \cdot \frac{a'^2 + a^2}{aa'}$$

Die Länge der Strecke $\overline{fm}$, wenn m der Mittelpunkt des Kreises durch die 4 Wurzeln ist, werde mit h bezeichnet; ihr entspricht also nach Richtung und Grösse die imaginäre Zahl $he^{i\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)}$; dann stellt $\overline{om}$ nach Richtung und Grösse die Zahl

$$m = \frac{a''}{2}\frac{a^2 + a'^2}{aa'} + he^{i\left(\eta - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{a''}{2} \cdot \frac{a^2 + a'^2}{aa'} - iha''$$

dar. Die Strecke $\overline{gm}$ werde mit j bezeichnet und wird nach Richtung und Grösse durch $je^{i\left(\frac{\pi}{2} - \eta\right)}$ dargestellt, hat also das Azimut $\frac{\pi}{2} - \eta$. Nun entspricht der Strecke $\overline{og}$ die Zahl

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{aa'a''} + \frac{aa'}{a''}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + a^2a'^2}{aa'a''}\right)$$

somit der Strecke $\overline{om}$ die Zahl

$$m = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2a'^2 + 1}{aa'a''} + \frac{i}{a''}j$$

Die zwei reellen Unbekannten h und j sind demnach durch die zwei Gleichungen

$$1. \qquad \frac{a''}{2} \cdot \frac{a^2 + a'^2}{aa'} - ia''h = \frac{1}{2}\frac{a^2a'^2 + 1}{aa'a''} + \frac{i}{a''}j$$

$$2. \qquad \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + a'^2}{aa'a''} + \frac{ih}{a''} = \frac{a''}{2} \cdot \frac{a^2a'^2 + 1}{aa'} - ia''j$$

mit einander verbunden. Multiplicire man, um j zu eliminiren, die erste Gleichung mit a'' und die zweite mit $\frac{1}{a''}$, so bekommt man

$$3. \qquad -i\left(a''^2 - \frac{1}{a''^2}\right)h = \frac{a^2a'^2 + 1}{aa'} - \frac{1}{2}\frac{a^2 + a'^2}{aa'}\left(a''^2 + \frac{1}{a''^2}\right)$$

Multiplicirt man ferner die erste Gleichung für den Mittelpunkt m mit $\left(a''^2-\frac{1}{a''^2}\right)$, also

$$\left(a''^2-\frac{1}{a''^2}\right)m=a''\left[\frac{a^2+a'^2}{2aa'}\left(a''^2-\frac{1}{a''^2}\right)-i\left(a''^2-\frac{1}{a''^2}\right)h\right]$$

und setzt den Wert für $-i\left(a''^2-\frac{1}{a''^2}\right)h$ hier ein, so folgt

$$4.\qquad \left(a''^2-\frac{1}{a''^2}\right)m=aa'a''+\frac{a''}{aa'}-\frac{a}{a'a''}-\frac{a'}{aa''}$$

$$=a''\left(aa'+\frac{1}{aa'}\right)-\frac{1}{a''}\left(\frac{a}{a'}+\frac{a'}{a}\right)$$

oder

$$4i\sin\eta\cos\eta\,.\,m=e^{i\eta}\left(e^{\varepsilon+\zeta}+e^{-(\varepsilon+\zeta)}\right)-e^{-i\eta}\left(e^{\varepsilon-\zeta}+e^{-(\varepsilon-\zeta)}\right)$$

$$=e^{i\eta}\,2\,\mathfrak{cos}(\varepsilon+\zeta)-e^{-i\eta}\,2\,\mathfrak{cos}(\varepsilon-\zeta)$$

$$=2(\cos\eta+i\sin\eta)\,\mathfrak{cos}(\varepsilon+\zeta)$$
$$-2(\cos\eta-i\sin\eta)\,\mathfrak{cos}(\varepsilon-\zeta)$$

$$=4(\cos\eta\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\zeta+i\sin\eta\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\zeta)$$

also

$$m=\frac{\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\zeta}{\cos\eta}-i\frac{\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\zeta}{\sin\eta}$$

aus welcher Gleichung folgt, dass der Mittelpunkt des Wurzelkreises östlich der lateralen Axe und südlich der *R. L.* liegt. Aus der Gleichung 4. folgt

$$\left(a''^2-\frac{1}{a''^2}\right)\left(\frac{aa''}{a'}-m\right)=-a''\left(\frac{a'}{a''}-\frac{a''}{a'}\right)\left(aa''-\frac{1}{aa''}\right)$$

wo die Zahl $\frac{aa''}{a'}-m$ den vom Mittelpunkte m nach dem Punkte a gehenden Radius nach Richtung und Grösse darstellt. Das Product dieser Zahl mit der ihr conjugirten ist das Quadrat des Radius selber. Also

$$-\left(a''^2-\frac{1}{a''^2}\right)^2R^2=\left(\frac{a'}{a''}-\frac{a''}{a'}\right)\left(a'a''-\frac{1}{a'a''}\right)\left(aa''-\frac{1}{aa''}\right)\left(\frac{a}{a''}-\frac{a''}{a}\right)$$

oder

$$16\sin^2\eta\cos^2\eta\,.\,R^2=4\,.\,2\,\mathfrak{sin}(\zeta-i\eta)\,\mathfrak{sin}(\zeta+i\eta)\,.\,2\,\mathfrak{sin}(\varepsilon+i\eta)\,\mathfrak{sin}(\varepsilon-i\eta)$$

$$=4\,.\,(\mathfrak{cos}\,2\zeta-\cos2\eta)(\mathfrak{cos}\,2\varepsilon-\cos2\eta)$$

$$=16\,.\,(\mathfrak{sin}^2\zeta+\sin^2\eta)(\mathfrak{sin}^2\varepsilon+\sin^2\eta)$$

also

$$R^2 = \frac{(\mathfrak{sin}^2\zeta + \sin^2\eta)(\mathfrak{sin}^2\varepsilon + \sin^2\eta)}{\sin^2\eta\cos^2\eta}$$

Das Polynom Ω^2 soll nun durch eine neue Substitution in ein anderes verwandelt werden, dessen Wurzeln sämtlich auf einer Geraden liegen. Die neue Variable muss also so eingerichtet werden, dass sie eine Gerade durchläuft, während die alte den Kreis durch die 4 Wurzeln der Gleichung $\Omega^2 = 0$ passirt. Wir haben nun früher gesehen, dass, wenn eine Variable einen Kreis passirt, die Zahl, welche die umgekehrte Distanz von irgend einem Pole aus nach Richtung und Grösse darstellt, entweder einen Kreis oder eine Gerade durchläuft, je nachdem der Pol auf dem Kreise selber liegt oder nicht. In unserem Falle muss also der Pol, den wir mit x bezeichnen, auf dem Wurzelkreise selbst (wir verlegen ihn in den Bogen $\mathfrak{bc}$) liegen.

Wir unterwerfen den Pol ferner der Bedingung, dass die durch die Strahlenpaare ($x\mathfrak{a}$, $x\mathfrak{b}$), ($x\mathfrak{b}$, $x\mathfrak{c}$) bestimmte Involution die Tangente in x und den von x ausgehenden Durchmesser zu Doppelstrahlen habe, damit die durch die Punktpaare

$$\left(\frac{1}{\mathfrak{a}-x}, \frac{1}{\mathfrak{b}-x}\right), \left(\frac{1}{\mathfrak{b}-x}, \frac{1}{\mathfrak{c}-x}\right)$$

bestimmte Involution den unendlich fernen Punkt der Geraden (welcher der Tangente in x entspricht) zum einen Doppelpunkt bekomme, weshalb dann der andere Doppelpunkt die gemeinschaftliche Mitte beider Punktpaare sein wird. Das letzte wird durch die Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{a}-x} + \frac{1}{\mathfrak{b}-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{b}-x} + \frac{1}{\mathfrak{c}-x}\right)$$

oder, was dasselbe ist, durch die Gleichung

$$\frac{1}{\mathfrak{a}-x} - \frac{1}{\mathfrak{b}-x} = \frac{1}{\mathfrak{c}-x} - \frac{1}{\mathfrak{b}-x}$$

ausgedrückt. Diese Gleichung besagt freilich blos, dass die vier neuen Punkte die Ecken eines Parallelogramms seien, das allerdings auch in eine Gerade zusammen gedrückt sein kann. Da aber, wenn der Punkt x irgendwo ausserhalb der Peripherie liegt, die vier neuen Punkte in einem Kreise liegen, so kann das Parallelogramm nur ein Rechteck sein. Man kann diese Möglichkeit vor der Hand nicht abwehren. Aber der Erfolg der Rechnung wird zeigen, dass die andere Möglichkeit, wo das Parallelogramm in eine Gerade zusammengedrückt ... [illegible]tt hat. Aus obiger Gleichung folgt

$$(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{c}-x)(\mathfrak{d}-x)-(\mathfrak{c}-\mathfrak{d})(\mathfrak{a}-x)(\mathfrak{b}-x)=0$$
$$(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{c}\mathfrak{d}-(\mathfrak{c}+\mathfrak{d})x+x^2)-(\mathfrak{c}-\mathfrak{d})(\mathfrak{a}\mathfrak{b}-(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})x+x^2)=0$$

oder

$$x^2(\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}+\mathfrak{d})+x((\mathfrak{c}-\mathfrak{d})(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})-(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{c}+\mathfrak{d}))+\mathfrak{a}\mathfrak{c}(\mathfrak{d}-\mathfrak{b})-\mathfrak{b}\mathfrak{d}(\mathfrak{c}-\mathfrak{a})=0$$

Wenn

$$N=\mathfrak{a}+\mathfrak{d}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c},\quad R^2=(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{a}-\mathfrak{c})(\mathfrak{d}-\mathfrak{b})(\mathfrak{d}-\mathfrak{c}),$$

wo R die pos. Wurzel bedeutet, dann ist

$$Nx=\mathfrak{a}\mathfrak{d}-\mathfrak{b}\mathfrak{c}-R,$$

eine Lösung der Gleichung, woraus folgt

$$\begin{aligned}
N(\mathfrak{a}-x)&=\mathfrak{a}^2-(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}+R\\
&=(\mathfrak{a}-\mathfrak{c})(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})+R,\\
N(\mathfrak{b}-x)&=-(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{d}-\mathfrak{b})+R,\\
N(\mathfrak{c}-x)&=-(\mathfrak{a}-\mathfrak{c})(\mathfrak{d}-\mathfrak{c})+R,\\
N(\mathfrak{d}-x)&=(\mathfrak{d}-\mathfrak{b})(\mathfrak{d}-\mathfrak{c})+R.
\end{aligned}$$

Ich führe nun folgende Abkürzungen ein:

$$\lambda^2=\mathfrak{a}-\mathfrak{b},\quad \mu^2=\mathfrak{a}-\mathfrak{c},\quad \nu^2=\mathfrak{d}-\mathfrak{b},\quad \xi^2=\mathfrak{d}-\mathfrak{c}$$

und verstehe unter λ, μ, ν, ξ diejenigen Wurzeln dieser Ausdrücke, deren reelle Componenten positiv sind.

Obige Formeln lassen sich nun auch so schreiben:

$$\begin{aligned}
N(\mathfrak{a}-x)&=\lambda\mu(\lambda\mu+\nu\xi)\\
N(\mathfrak{b}-x)&=\lambda\nu(\mu\xi-\lambda\nu)\\
N(\mathfrak{c}-x)&=-\mu\xi(\mu\xi-\lambda\nu)\\
N(\mathfrak{d}-x)&=\nu\xi(\lambda\mu+\nu\xi).
\end{aligned}$$

Ferner sei

$$\begin{aligned}
f^2&=\mathfrak{sin}(\varepsilon+i\eta)\,\mathfrak{sin}(\varepsilon-i\eta)=\mathfrak{sin}^2\varepsilon+\sin^2\eta\\
g^2&=\mathfrak{sin}(\zeta+i\eta)\,\mathfrak{sin}(\zeta-i\eta)=\mathfrak{sin}^2\zeta+\sin^2\eta\\
h^2&=\mathfrak{sin}(\varepsilon+\zeta)\,\mathfrak{sin}(\varepsilon-\zeta)=\mathfrak{sin}^2\varepsilon-\mathfrak{sin}^2\zeta
\end{aligned}$$

wo f, g und h pos. verstanden werden. Aus dieser Gleichung folgt, dass

$$f^2=g^2+h^2$$

und weil

$$\mathfrak{a}-\mathfrak{b}=e^{i\eta}(e^{\varepsilon-\zeta}-e^{-(\varepsilon-\zeta)})=e^{i\eta}.2\,\mathfrak{sin}(\varepsilon-\zeta)$$
$$\mathfrak{d}-\mathfrak{c}=\text{[illegible]}-e^{-(\varepsilon+\zeta)})=e^{-i\eta}.2\,\mathfrak{sin}(\varepsilon+\zeta)$$

$$\mathfrak{a}-\mathfrak{c} = e^{-\zeta}(e^{\varepsilon+i\eta} - e^{-(\varepsilon+i\eta)}) = e^{-\zeta}.2\,\mathfrak{Sin}(\varepsilon+i\eta)$$
$$\mathfrak{d}-\mathfrak{b} = e^{\zeta}(e^{\varepsilon-i\eta} - e^{-(\varepsilon-i\eta)}) = e^{\zeta}.\,2\,\mathfrak{Sin}(\varepsilon-i\eta)$$

also

$$(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})(\mathfrak{d}-\mathfrak{c}) = 4\,\mathfrak{Sin}(\varepsilon-\zeta)\,\mathfrak{Sin}(\varepsilon+\zeta) = 4h^2,$$
$$(\mathfrak{a}-\mathfrak{c})(\mathfrak{d}-\mathfrak{b}) = 4\,\mathfrak{Sin}(\varepsilon+i\eta)\,\mathfrak{Sin}(\varepsilon-i\eta) = 4f^2;$$

so folgt ferner

$$\lambda\xi = 2h, \quad \mu\nu = 2f$$

also

$$R = \lambda\mu\nu\xi = 4hf$$

und somit R positiv.

Ferner ist

$$N = (\mathfrak{a}-\mathfrak{b})+(\mathfrak{d}-\mathfrak{c}) = \lambda^2+\xi^2$$
$$= 2\,\mathfrak{Sin}(\varepsilon-\zeta)e^{i\eta} + 2\,\mathfrak{Sin}(\varepsilon+\zeta)\,e^{-i\eta}$$
$$= 2((\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{Cos}\,\zeta - \mathfrak{Cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\zeta)e^{i\eta} + (\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{Cos}\,\zeta + \mathfrak{Sin}\,\zeta)e^{-i\eta})$$
$$= 4(\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{Cos}\,\zeta\cos\eta - i\,\mathfrak{Cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\sin\eta)$$

folglich

$$(\operatorname{mod} N)^2 = 16(\mathfrak{Sin}^2\varepsilon\,\mathfrak{Cos}^2\zeta\cos^2\eta + \mathfrak{Cos}^2\varepsilon\,\mathfrak{Sin}^2\zeta\sin^2\eta)$$
$$= 16(\mathfrak{Sin}^2\varepsilon\,\mathfrak{Cos}^2\zeta + \sin^2\eta(\mathfrak{Sin}^2\zeta - \mathfrak{Sin}^2\varepsilon))$$
$$= 16(\mathfrak{Sin}^2\varepsilon\,\mathfrak{Cos}^2\varepsilon - \mathfrak{Sin}^2\varepsilon - \mathfrak{Sin}^4\varepsilon + \mathfrak{Sin}^2\varepsilon\,\mathfrak{Cos}^2\zeta + \sin^2\eta(\mathfrak{Sin}^2\xi - \mathfrak{Sin}^2\varepsilon))$$
$$= 16(\mathfrak{Sin}^2\varepsilon\,\mathfrak{Cos}^2\varepsilon - (\mathfrak{Sin}^4\varepsilon + \mathfrak{Sin}^2\varepsilon(\sin^2\eta - \mathfrak{Sin}^2\zeta) - \sin^2\eta\,\mathfrak{Sin}^2\zeta))$$
$$= 16(\mathfrak{Sin}^2\varepsilon\,\mathfrak{Cos}^2\varepsilon - (\mathfrak{Sin}^2\varepsilon + \sin^2\eta)(\mathfrak{Sin}^2\varepsilon - \mathfrak{Sin}^2\zeta))$$
$$= 16(\mathfrak{Sin}^2.\,\mathfrak{Cos}^2\varepsilon - f^2.h^2)$$
$$= 16(\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{Cos}\,\varepsilon + fh)(\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{Cos}\,\varepsilon - fh)$$
$$= 16\alpha^2\beta^2$$

wenn $\alpha^2 = \mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{Cos}\,\varepsilon + hf$ und $\beta^2 = \mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{Cos}\,\varepsilon - fh$ gesetzt wird. α und β sollen beide pos. verstanden werden. Ferner ist auch $\alpha > \beta$. Demnach ist

$$\operatorname{mod} N = 4\alpha\beta.$$

Die Amplitude von N, welche negativ ist und mit γ bezeichnet werden soll, wird durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{imcp} N}{\operatorname{reecp} N} = \frac{\mathfrak{Cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{Sin}\,\zeta\sin\eta}{\mathfrak{Sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{Cos}\,\zeta\cos\eta} = \frac{\operatorname{tang}\zeta}{\operatorname{tang}\varepsilon}\operatorname{tang}\eta$$

bestimmt, und weil $\varepsilon > \zeta$, so folgt

$$0 < \gamma < \eta < \frac{\pi}{2};$$

mithin, weil die $\operatorname{imcp} N$ neg. ist

$$N = 4\alpha\beta e^{-i\gamma}$$

nun

$$
\begin{aligned}
[illegible] &= [illegible] - [illegible] - R \\
&= e^{2x} - e^{-2x} - 4 f\lambda \\
&= 2 \sin 2x - 4 f\lambda \\
&= 4(\sin x \cos x - f\lambda) = 4\beta^2
\end{aligned}
$$

folglich

$$x = \frac{\beta}{\alpha} e^{i\gamma}.$$

Der Punkt x liegt also innerhalb des Einheitskreises auf dem Stücke des Wurzelkreises zwischen der *R. L.* und der Secante $\overline{o a}$. Das Potential der Ellipse ist nun

$$T' = \frac{2\sqrt{AB}}{A-B} \frac{1}{i} \int \frac{d\Phi}{\Omega}$$

also ein Integral, in welchem Φ den Einheitskreis rechtläufig durchläuft. Weil nun aber der Pol α innerhalb dieses Kreises liegt, so durchläuft $\frac{1}{\Phi - x}$ wieder einen Kreis, dessen Mittelpunkt und Radius nach Früherem durch die Formeln

$$\frac{m}{m^2 - n^2} e^{-i\alpha}, \quad \frac{n}{m^2 - n^2}$$

bestimmt werden.

In unserem Falle ist

$$m = \frac{\beta}{\alpha}, \quad n = 1, \quad u = \pi + \gamma$$

also

$$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n) = \frac{\beta + \alpha}{\alpha} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} = -\frac{2 f \lambda}{\alpha^2}$$

demnach

$$[illegible] = \frac{\alpha\beta}{2 f \lambda} e^{-i\gamma}$$

und

$$[illegible] = \frac{\alpha^2}{2 f \lambda}$$

Weil sich nun [illegible] innerhalb [illegible] des Einheitskreises liegt, innerhalb und [illegible] Kreises [illegible] abbildet, so liegen die [illegible] und $\frac{1}{\beta - x}$ [illegible] $\frac{1}{\beta - x}$ und [illegible] [illegible], wie aus Fig. [illegible] zu ersehen ist.

Kreis I auf dem Φ Felde ist der Einheitskreis und II der Kreis durch die 4 Wurzeln der Gleichung $\Omega^2 = 0$. Auf dem y Felde ist die Linie α das Bild des Wurzelkreises und der Kreis III ist das Bild des Einheitskreises. Die Strecke, welche auf dem y Felde den Ursprung mit der Mitte der Verbindungslinie der beiden Wurzeln $\frac{1}{\mathfrak{b}-x}$ und $\frac{1}{\mathfrak{c}-x}$ verbindet, wird nach Richtung und Grösse durch die Zahl

$$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{b}-x} + \frac{1}{\mathfrak{c}-x}\right)$$

dargestellt. Wenn wir nun hier für $\frac{1}{\mathfrak{b}-x}$ und $\frac{1}{\mathfrak{c}-x}$ die früher erhaltenen Werte einsetzen, so bekommt man

$$M = \frac{N}{2}\left(\frac{\mu\xi - \lambda\nu}{\lambda\mu\nu\xi(\mu\xi - \lambda\nu)}\right) = \frac{N}{2R} = \frac{\alpha\beta}{2fh}e^{-i\gamma},$$

das heisst, die Mitte der beiden Wurzeln $\frac{1}{\mathfrak{b}-x}$ und $\frac{1}{\mathfrak{c}-x}$, folglich auch die Mitte von $\frac{1}{\mathfrak{a}-x}$ und $\frac{1}{\mathfrak{b}-x}$, fällt mit dem Mittelpunkte des Kreises III auf dem y Felde zusammen. Dass dem so sein muss, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Der Einheitskreis und der Kreis II schneiden sich rechtwinklig, folglich müssen sich auch ihre Bilder rechtwinklig schneiden. Die Gerade α, welche Bild des Kreises II ist, muss demnach durch den Mittelpunkt des Kreises III gehen. Ferner ist

$$\overline{0x}\,.\,\overline{0F} = \overline{0A}^2 = \overline{0F}\,.\,\overline{0G};$$

also liegen die Punkte G, x, A und F harmonisch und G und A sind einander zugeordnet. Durchläuft nun Φ eine Gerade, welche durch x und 0 geht, so durchläuft $\frac{1}{\Phi - x}$ eine Gerade, welche durch 0 und m geht, und die Bilder der Punkte G, x, A, F sind wieder harmonische Punkte, von welchen diejenigen von G und A auf dem Kreise III liegen. Weil nun aber das Bild von x im Horizonte liegt, so muss sein zugeordneter Punkt, welcher Bild von F ist, in die Mitte der beiden andern zugeordneten Punkte liegen, das heisst, er fällt mit dem Punkte m zusammen. Es ist auch

$$\overline{0x}\,.\,\overline{0F} = \overline{0A}^2 = 1;\quad \overline{xF} = \overline{0F} - \overline{0x}$$

oder wegen

$$\overline{xF} = \frac{1}{\overline{0x}} - \overline{0x} = \frac{1 - \overline{0x}^2}{\overline{0x}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta},$$

$$\frac{1}{xF} = \frac{\alpha\beta}{2fh}$$

und demnach

$$\frac{1}{F-x} = \frac{\alpha\beta}{2fh}e^{-i\gamma};$$

dieser Punkt liegt aber in der Mitte von B und E.

Den Mittelpunkt m des Kreises III wähle ich nun als neuen Ursprung, so dass die neue Variable s einen Kreis mit dem Radius $\frac{\alpha^2}{2fh}$ in neg. Richtung um denselben beschreibt, während Φ den Einheitskreis passirt, und dass eine Gerade durch den Ursprung Bild des Wurzelkreises wird. Diese Variable s soll dann noch durch Multipliciren mit einem constanten Factor so verändert werden, dass die Realitätslinie Bild des Wurzelkreises wird. Durch eine solche Substitution wird dann das Polynom Ω^2 so verwandelt, dass die neuen Wurzeln sämtlich reell werden. Eine solche Substitution ist

$$\frac{1}{\Phi - x} - \frac{\alpha\beta}{2fh}e^{-i\gamma}.$$

die Strecke, welche den Mittelpunkt m mit $\frac{1}{a-x}$ verbindet, wird nach Grösse und Richtung durch die Zahl

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a-x} - \frac{\alpha\beta}{2fh}e^{-i\gamma} &= \frac{N}{\lambda\mu\,(\lambda\mu+\nu\xi)} - \frac{\alpha\beta}{2fh}e^{-i\gamma} \\
&= \frac{4\alpha\beta}{\lambda\mu\,(\lambda\mu+\nu\xi)}e^{-i\gamma} - \frac{\alpha\beta}{2fh}e^{-i\gamma} \\
&= \frac{\alpha\beta}{2fh}e^{-i\gamma}\left(\frac{8fh}{\lambda\mu\,(\lambda\mu+\nu\xi)} - 1\right) \\
&= \frac{\alpha\beta e^{-i\gamma}}{2fh}\left(\frac{2\lambda\xi\mu\nu - \lambda\mu\,(\lambda\mu+\nu\xi)}{\lambda\mu\,(\lambda\mu+\nu\xi)}\right) \\
&= \frac{\alpha\beta e^{-i\gamma}}{2fh}\left(\frac{\nu\xi-\lambda\mu}{\nu\xi+\lambda\mu}\right) = \frac{\alpha\beta e^{-i\gamma}}{2fh}P
\end{aligned}$$

wo

$$P = \frac{\nu\xi-\lambda\mu}{\nu\xi+\lambda\mu}$$

dargestellt.

Es ist aber

$$P = \frac{\nu\xi-\lambda\mu}{\nu\xi+\lambda\mu}\cdot\frac{\mu\xi+\lambda\nu}{\mu\xi+\lambda\nu} = \frac{\mu\nu\,(\xi^2-\lambda^2)+\lambda\xi\,(\nu^2-\mu^2)}{\mu\nu\,(\xi^2+\lambda^2)+\lambda\xi\,(\nu^2+\mu^2)}$$

und

$$\lambda^2 = 2\,\mathfrak{sin}(\varepsilon-\zeta)\,e^{i\eta},\quad \mu^2 = 2\,\mathfrak{sin}(\varepsilon+i\eta)\,e^{-\zeta},\quad \nu^2 = 2\,\mathfrak{sin}(\varepsilon-i\eta)\,e^{\zeta}$$

$$\xi^2 = 2\,\mathfrak{sin}(\varepsilon+\zeta)\,e^{-i\eta}$$

also

$$\nu^2-\mu^2 = 2e^{\zeta}(\mathfrak{sin}\,\varepsilon\cos\eta - i\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\sin\eta) - 2e^{-\zeta}(\mathfrak{sin}\,\varepsilon\cos\eta + i\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\sin\eta)$$

$$= 4(\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\zeta\cos\eta - i\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\zeta\sin\eta)$$

und

$$\xi^2-\lambda^2 = 4(\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\zeta\cos\eta - i\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\zeta\sin\eta);$$

ferner ist

$$\lambda\xi = 2h,\quad \mu\nu = 2f,\quad \lambda^2+\xi^2 = \nu^2+\mu^2 = N$$

demnach

$$P = \frac{8(f\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\zeta\cos\eta + h\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\zeta\cos\eta)}{2N(f+h)} - \frac{8i(f\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\zeta\sin\eta + h\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\zeta\sin\eta)}{2N(f+h)}$$

$$= \frac{4((f\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon + h\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon)\,\mathfrak{sin}\,\zeta\cos\eta - i(f\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon + h\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon)\,\mathfrak{cos}\,\zeta\sin\eta)}{N(f+h)}$$

$$= \frac{((f\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon + h\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon)\,\mathfrak{sin}\,\zeta\cos\eta - i(f\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon + h\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon)\,\mathfrak{cos}\,\zeta\sin\eta)\,\alpha\beta e^{i\gamma}}{\alpha^2\beta^2(f+h)}.$$

Nun war

$$N = 4\alpha\beta e^{-i\gamma} = 4(\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\zeta\cos\eta - i\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\zeta\sin\eta)$$

also

$$\alpha\beta e^{+i\gamma} = \mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\zeta\cos\eta + i\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\zeta\sin\eta.$$

Folglich ist

$$\operatorname{recp} P = \frac{(f\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon + h\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon)\,\mathfrak{sin}\,\zeta\cos\eta\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\zeta\cos\eta}{\alpha^2\beta^2(f+h)} + \frac{(f\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon + h\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon)\,\mathfrak{cos}\,\zeta\sin\eta\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\zeta\sin\eta}{\alpha^2\beta^2(f+h)}$$

$$= \frac{\mathfrak{sin}\,\zeta\,\mathfrak{cos}\,\zeta((f\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon + h\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon)\cos^2\eta\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon + (f\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon + h\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon)\sin^2\eta\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon)}{\alpha^2\beta^2(f+h)}$$

$$= \frac{\mathfrak{sin}\,\zeta\,\mathfrak{cos}\,\zeta(f\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon + h(\mathfrak{sin}^2\varepsilon\cos^2\eta + \mathfrak{cos}^2\varepsilon\sin^2\eta))}{\alpha^2\beta^2(f+h)}$$

$$= \frac{\mathfrak{sin}\,\zeta\,\mathfrak{cos}\,\zeta(f\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon + hf^2)}{\alpha^2\beta^2(f+h)}$$

$$= \frac{\mathfrak{sin}\,\zeta\,\mathfrak{cos}\,\zeta f\alpha^2}{\alpha^2\beta^2(f+h)} = \frac{\mathfrak{sin}\,\zeta\,\mathfrak{cos}\,\zeta f}{\beta^2(f+h)}.$$

Ferner ist

$$\operatorname{imcp} P = -\frac{(f\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon + h\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon)\,\mathfrak{cos}\,\zeta \sin\eta\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\zeta\cos\eta}{\alpha^2\beta^2(f+h)}$$

$$+\frac{(f\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon + h\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon)\,\mathfrak{sin}\,\zeta\cos\eta\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\zeta\sin\eta}{\alpha^2\beta^2(f+h)}$$

$$= \frac{\sin\eta\cos\eta\,((f\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon + h\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon)\,\mathfrak{sin}^2\zeta\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon - (f\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon + h\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon)\,\mathfrak{cos}^2\zeta\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon}{\alpha^2\beta^2(f+h)}$$

$$= -\frac{\sin\eta\cos\eta\,(fh^2 + h\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon)}{\alpha^2\beta^2(f+h)} = -\frac{\sin\eta\cos\eta\, h\alpha^2}{\alpha^2\beta^2(f+h)}$$

$$= -\frac{\sin\eta\cos\eta . h}{\beta^2(f+h)}$$

also

$$P = \frac{f\,\mathfrak{sin}\,\zeta\,\mathfrak{cos}\,\zeta - ih\sin\eta\cos\eta}{\beta^2(f+h)}$$

Es sei nun

$$me^{-i\delta} = f\,\mathfrak{sin}\,\zeta\,\mathfrak{cos}\,\zeta - ih\sin\eta\cos\eta$$

also

$$m^2 = \mathfrak{sin}^2\zeta\,\mathfrak{cos}^2\zeta\,(\mathfrak{sin}^2\varepsilon + \sin^2\eta) + \sin^2\eta\cos^2\eta\,(\mathfrak{sin}^2\varepsilon - \mathfrak{sin}^2\zeta)$$

$$= \mathfrak{sin}^2\varepsilon\,(\sin^2\eta\cos^2\eta + \mathfrak{sin}^2\zeta\,\mathfrak{cos}^2\zeta) + \mathfrak{sin}^2\zeta\sin^2\eta\,(\mathfrak{cos}^2\zeta - \cos^2\eta)$$

$$= \mathfrak{sin}^2\varepsilon\,(\mathfrak{sin}^4\zeta - \sin^4\eta + \mathfrak{sin}^2\zeta + \sin^2\eta)$$
$$+ \mathfrak{sin}^2\zeta\sin^2\eta\,(\mathfrak{cos}^2\zeta - \cos^2\eta)$$

$$= (\mathfrak{sin}^2\zeta + \sin^2\eta)(\mathfrak{sin}^2\varepsilon\,(\mathfrak{sin}^2\zeta - \sin^2\eta + 1) + \mathfrak{sin}^2\zeta\sin^2\eta)$$

$$= g^2\,(\mathfrak{sin}^2\varepsilon\,(\mathfrak{sin}^2\zeta - \sin^2\eta + \mathfrak{cos}^2\varepsilon - \mathfrak{sin}^2\varepsilon) + \mathfrak{sin}^2\zeta\sin^2\eta)$$

$$= g^2\,(\mathfrak{sin}^2\varepsilon\,\mathfrak{cos}^2\varepsilon - (\mathfrak{sin}^4\varepsilon + \mathfrak{sin}^2\varepsilon\,(\sin^2\eta - \mathfrak{sin}^2\zeta) - \mathfrak{sin}^2\zeta\sin^2\eta))$$

$$= g^2\,(\mathfrak{sin}^2\varepsilon\,\mathfrak{cos}^2\varepsilon - (\mathfrak{sin}^2\varepsilon + \sin^2\eta)(\mathfrak{sin}^2\varepsilon - \mathfrak{sin}^2\zeta))$$

$$= g^2\,(\mathfrak{sin}^2\varepsilon\,\mathfrak{cos}^2\varepsilon - f^2h^2)$$

$$= g^2\,(\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon + fh)(\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon - fh)$$

$$= g^2\alpha^2\beta^2$$

folglich

$$m = g\alpha\beta$$

somit

$$P = \frac{g\alpha\beta\, e^{-i\delta}}{\beta^2(f+h)} = \frac{g\alpha}{\beta(f+h)}\, e^{-i\delta}$$

und demnach wird (die Zahl) der Strahl $\overline{mB}$ Fig. 6. nach Grösse und Richtung durch die Zahl

$$\frac{g\alpha^2 e^{-i(\delta+\gamma)}}{2fh(f+h)} = \frac{g^2\alpha^2 e^{-i(\delta+\gamma)}}{2fg^2}$$

oder wegen

$$g^2 = f^2 - h^2$$

durch

$$\frac{\alpha^2 (f-h) e^{-i(\gamma+\delta)}}{2fgh}$$

dargestellt.

Ebenso werden die Strecken $\overline{mC}$, $\overline{mD}$ und $\overline{mE}$ nach Grösse und Richtung durch die Zahlen

$$\frac{\alpha}{2fgh}(f+h)e^{-i(\delta+\gamma)}, \quad \frac{\alpha^2}{2fgh}(f+h)e^{i(\pi-(\gamma+\delta))}, \quad \frac{\alpha^2}{2fgh}(f+h)e^{i(\pi-(\gamma+\delta))}$$

dargestellt. Der Factor, mit welchem die Variable s noch zu multipliciren ist, damit die Realitätslinie von Westen nach Osten durchlaufen werde, wenn Φ den Wurzelkreis durchläuft, ist demnach

$$\frac{2fgh\,e^{i(\gamma+\delta)}}{\alpha^2}.$$

Nun ist

$$s = \frac{1}{\Phi - x} - \frac{\alpha\beta}{2fh}e^{-i\gamma} = \frac{1}{\Phi - \frac{\beta}{\alpha}e^{i\gamma}} - \frac{\alpha\beta}{2fh}e^{-i\gamma}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha\Phi - \beta e^{i\gamma}} - \frac{\alpha\beta}{2fh}e^{-i\gamma}$$

$$= \frac{\alpha((\alpha^2-\beta^2)e^{i\gamma} - \beta(\alpha\Phi - \beta e^{i\gamma}))}{2fhe^{i\gamma}(\alpha\Phi - \beta e^{i\gamma})} = \frac{\alpha^2}{2fh}e^{-i\gamma}\frac{\alpha e^{i\gamma} - \beta\Phi}{\alpha\Phi - \beta e^{i\gamma}}$$

$$= \frac{\alpha^2}{2fh}e^{i(\varphi-2\gamma)}\left(\frac{\alpha e^{i(\gamma-\varphi)} - \beta}{\alpha e^{-i(\gamma-\varphi)} - \beta}\right)$$

und weil der abs. Wert des eingeklammerten Bruches 1 ist, so durchläuft s einen Kreis mit dem Radius $\frac{\alpha^2}{2fh}$ um den Ursprung, während φ von 0 bis 2π wächst.

Es sei nun

$$u = s\frac{2fgh\,e^{i(\gamma+\delta)}}{\alpha^2}$$

also auch

$$u = ge^{i\delta}\frac{\alpha e^{i\gamma} - \beta\Phi}{\alpha\Phi - \beta e^{i\gamma}}$$

$$= \frac{2fgh\,e^{i(\gamma+\delta)}}{\alpha^2(\Phi - x)} - \frac{g\beta}{\alpha}e^{i\delta}$$

oder wenn

$$p = \frac{2fgh\,e^{i(\gamma+\delta)}}{\alpha^2} \quad \text{und} \quad q = \frac{g\beta}{\alpha}e^{i\delta}$$

...tzt wird,

$$u = \frac{p}{\Phi - x} - q.$$

Durchläuft Φ den Einheitskreis, so ist

$$u = g e^{i(\varphi + \delta - \gamma)} \frac{\alpha e^{i(\gamma - \varphi)} - \beta}{\alpha e^{-i(\gamma - \varphi)} - \beta}$$

passirt also einen Kreis um den Ursprung mit dem Radius g. Die Wurzeln des neuen Polynoms sind nun

$$u_I = \frac{p}{\mathfrak{a} - x} - q = f - h$$

$$u_{II} = \frac{p}{\mathfrak{b} - x} - q = f + h$$

$$u_{III} = \frac{p}{\mathfrak{c} - x} - q = -(f + h)$$

$$u_{IV} = \frac{p}{\mathfrak{d} - x} - q = -(f - h).$$

Dieselben liegen also sämtlich auf der *R. L.* und weil

$$g^2 = (f + h)(f - h)$$

so schliesst der neue Integrationsweg die beiden Wurzeln

$$f - h \quad \text{und} \quad -(f - h)$$

ein und die beiden andern aus. Aus der Formel für u folgt

$$\Phi = e^{i\gamma} \frac{\beta u + g\alpha e^{i\delta}}{\alpha u + g\beta e^{i\delta}}$$

also

$$\Phi - x = e^{i\gamma} \frac{\beta u + g\alpha e^{i\delta}}{\alpha u + g\beta e^{i\delta}} - \frac{\beta}{\alpha} e^{i\gamma}$$

$$= \frac{e^{i\gamma}}{\alpha(\alpha u + g\beta e^{i\delta})} (\alpha\beta u + g e^{i\delta}(\alpha^2 - \beta^2) - \alpha\beta u)$$

$$= \frac{2fgh e^{i(\gamma + \delta)}}{\alpha(\alpha u + g\beta e^{i\delta})} = \frac{p}{u + q}$$

somit

$$\Phi - \mathfrak{a} = (\Phi - x + (x - \mathfrak{a})) = \left(\frac{p}{u + q} - (\mathfrak{a} - x)\right)$$

$$= \frac{1}{u + q}\left(p - (\mathfrak{a} - x)(u + q)\right)$$

$$= -\frac{\mathfrak{a} - x}{u + q}\left(u + q - \frac{p}{\mathfrak{a} - x}\right)$$

und wenn wir hier obige Werte einsetzen, so erhalten wir

$$\Phi - \mathfrak{a} = -\frac{\mathfrak{a}-x}{u+q}(u-(f-h)).$$

Ebenso

$$\Phi - \mathfrak{b} = -\frac{\mathfrak{b}-x}{u-q}(u-(f+h))$$

$$\Phi - \mathfrak{c} = -\frac{\mathfrak{c}-y}{u+q}(u+(f+h))$$

$$\Phi - \mathfrak{d} = -\frac{\mathfrak{d}-x}{u+q}(u+(f-h))$$

folglich

$$(u+q)^4\Omega^2 = (II) = \Pi(\mathfrak{a}-x).\quad (u^2-(f+h)^2)(u^2-(f-h)^2)$$

Nun folgt aber aus Früherem

$$\Pi(\mathfrak{a}-x) = -\frac{1}{N^4}\lambda^2\mu^2\nu^2\xi^2(\lambda\mu+\nu\xi)^2(\mu\xi-\lambda\nu)^2$$

also

$$N^4\Pi(\mathfrak{a}-x) = -[\lambda\mu\nu\xi(\lambda\mu+\nu\xi)(\mu\xi-\lambda\nu)]^2.$$

Es ist aber

$$(\lambda\mu+\nu\xi)(\mu\xi-\lambda\nu) = 2f(\xi^2-\lambda^2)-2h(\nu^2-\mu^2)$$

oder, da

$$\xi^2-\lambda^2 = 4(\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\zeta\cos\eta - i\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\zeta\sin\eta)$$

und

$$\nu^2-\mu^2 = 4(\mathfrak{sin}\,\varepsilon\,\mathfrak{sin}\,\zeta\cos\eta - i\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon\,\mathfrak{cos}\,\zeta\sin\eta),$$

$$(\lambda\mu+\nu\xi)(\mu\xi-\lambda\nu) = 8[(f\mathfrak{cos}\,\varepsilon-h\mathfrak{sin}\,\varepsilon)\mathfrak{sin}\,\zeta\cos\eta - i(f\mathfrak{sin}\,\varepsilon-h\mathfrak{cos}\,\varepsilon)\mathfrak{cos}\,\zeta\sin\eta].$$

Wir hatten ferner gefunden

$$(f\mathfrak{cos}\,\varepsilon+h\,\mathfrak{sin}\,\varepsilon)\mathfrak{sin}\,\zeta\cos\eta - i(f\mathfrak{sin}\,\varepsilon+h\,\mathfrak{cos}\,\varepsilon)\mathfrak{cos}\,\zeta\sin\eta = \frac{N}{4}\cdot\frac{g\alpha}{\beta}e^{-i\delta}$$

oder auch

$$= \alpha^2 g e^{-i(\gamma+\delta)};$$

und wenn h mit $-h$ vertauscht wird, so vertauscht sich auch α mit β und δ mit $-\delta$, also ist

$$(\lambda\mu+\nu\xi)(\mu\xi-\lambda\nu) = 8\beta^2 g e^{-i(\gamma-\delta)}$$

und somit

$$N^4\Pi(\mathfrak{a}-x) = -[32fgh\beta^2 e^{-i(\gamma-\delta)}]^2$$

demnach

$$\Pi(\mathfrak{a}-x) = -\frac{2^2f^2g^2h^2}{\alpha^4}.e^{2i(\gamma+\delta)}$$

$$= -p^2$$

ich

$$(u+q)^4 \cdot \Omega^2 = -p^2 \cdot (u^2-(f-h)^2)(u^2-(f+h)^2)$$
$$= p^2(u^2-(f-h)^2)((f+h)^2-u^2)$$
$$= p^2 \cdot S^2.$$

Nun ist

$$p = \frac{2fgh}{\alpha^2} e^{i(\gamma+\delta)}$$

$$u+q = u+\frac{g\beta}{\alpha} e^{i\delta} = \frac{\alpha u+g\beta e^{i\delta}}{\alpha}$$

somit

$$\Omega^2 = \frac{2^2 f^2 g^2 h^2 e^{2i(\gamma+\delta)}}{(\alpha u+g\beta e^{i\delta})^4} S^2$$

und weil

$$\Phi^2 = \left(\frac{\beta u+g\alpha e^{i\delta}}{\alpha u+g\beta e^{i\delta}}\right)^2 e^{2i\gamma}$$

so erhält man

$$\frac{\Omega^2}{\Phi^2} = \frac{4f^2g^2h^2 e^{2i\delta}}{(\alpha u+g\beta e^{i\delta})^2(\beta u+g\alpha e^{i\delta})^2} S^2$$

Während nun Φ den Einheitskreis durchläuft, so passirt u in neg. Richtung einen Kreis mit dem Radius g. Wir setzen deshalb

$$u = ge^{i\chi};$$

dann wird

$$\frac{S^2}{u^2} = \left(2(f^2+h^2)-u^2-\frac{g^4}{u^2}\right)$$
$$= (2(f^2+h^2)-g^2e^{2i\chi}-g^2e^{-2i\chi})$$

$$\frac{S^2}{u^2} = 2(f^2+h^2-g^2\cos 2\chi)$$

oder, weil

$$g^2 = f^2-h^2$$

$$\frac{S^2}{u^2} = 2(f^2(1-\cos 2\chi)+h^2(1+\cos 2\chi))$$
$$= 4(f^2\sin^2\chi+h^2\cos^2\chi)$$
$$= 4R^2.$$

Ferner ist

$$(\alpha u+g\beta e^{i\delta})(\beta u+g\alpha e^{i\delta}) = g^2e^{i(\delta+\chi)}(\alpha e^{i(\chi-\delta)}+\beta)(\alpha e^{-i(\chi-\delta)}+\beta)$$

somit

$$\frac{\Omega^2}{\Phi^2} = \frac{16f^2h^2R^2}{(\alpha e^{i(\chi-\delta)}+\beta)^2(\alpha e^{-i(\chi-\delta)}+\beta)^2}$$

oder

$$\frac{\Omega}{\Phi} = \frac{4fhR}{(\alpha e^{i(\chi-\delta)}+\beta)(\alpha e^{-i(\chi-\delta)}+\beta)}.$$

Es war

$$\Phi - x = \frac{p}{u+q}.$$

also

$$d\Phi = -\frac{p\,du}{(u+q)^2}$$

oder

$$d\Phi = -\frac{2fhg\,e^{i(\gamma+\delta)}\,du}{(\alpha u + g\beta e^{i\delta})^2}$$

$$= -\frac{2fgh\,e^{i(\gamma+\chi-\delta)}\,.\,i\,d\chi}{(\alpha e^{i(\chi-\delta)}+\beta)}$$

und

$$\Phi = \frac{\beta u + g\alpha e^{i\delta}}{\alpha u + g\beta e^{i\delta}}\,e^{i\gamma} = e^{i(\gamma+\chi-\delta)}\,.\,\frac{(\alpha e^{i(\delta-\chi)}+\beta)}{(\alpha e^{-i(\delta-\chi)}+\beta)}$$

also

$$\frac{d\Phi}{i\Omega} = -\frac{d\chi}{2R}$$

und demnach

$$T' = -\frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{(A-B)}}\int_0^{-2\pi}\frac{d\chi}{R} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{(A-B)}}\int_{-2\pi}^{0}\frac{d\chi}{R}$$

oder

$$T' = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{(A-B)}}\int_0^{2\pi}\frac{d\chi}{R} = \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{A-B}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\chi}{R}.$$

Weil

$$f^2 = \sin^2\varepsilon + \sin^2\eta = \frac{t-t''}{A-B},\quad h^2 = \sin^2\varepsilon - \sin^2\zeta = \frac{t-t'}{A-B}.$$

so wird

$$(A-B)R^2 = (t-t'')\sin^2\chi + (t-t')\cos^2\chi$$
$$= t - (t'\cos^2\chi + t''\sin^2\chi)$$

Wir setzen nun: $u = t'\cos^2\chi + t''\sin^2\chi$

also

$$(A-B)R^2 = t - u$$

$$R = \frac{\sqrt{(t-u)}}{\sqrt{(A-B)}}$$

$$t' - u = (t'-t'')\sin^2\chi,\quad u - t'' = (t'-t'')\cos^2\chi$$

also

$$\sin\chi = \frac{\sqrt{(t'-u)}}{\sqrt{(t'-t'')}}$$

$$\cos\chi = \frac{\sqrt{(u-t'')}}{\sqrt{(t'-t'')}},\quad d\chi = -\frac{1}{2}\,\frac{du}{(t'-t'')\sin\chi\cos\chi}$$

$$d\chi = -\frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{(t'-u)(u-t'')}}$$

folglich

$$T' = 2\sqrt{AB}\int_{t''}^{t'}\frac{du}{\sqrt{(t-u)(t'-u)(u-t'')}}.$$

Auf dem u Felde denke man sich zwei Uebergangslinien. Die erste verbinde den Pol t mit dem Ostpunkte und die andere die beiden Pole t'' und t'. Das Integral erstrecke sich über den nördlichen Rand der zweiten Uebergangslinie, wo also $\sqrt{(t-u)(t'-u)(u-t'')}$ pos. aufgefasst wird. Wird nun u in einem neg. Kreise um t' auf den südlichen Rand geführt, so geht die Wurzel in's Negative über und weil auf dem Wege von t' nach t'' auch du neg. ist, so ist obiges Integral auch gleich einem andern, das den Südrand der zweiten Uebergangslinie (y) von t' nach t'' passirt. Führt man ferner u in einem neg. Halbkreise um t' auf das Stück der *R. L.* zwischen t' und t, so geht die Wurzel in $-i\sqrt{(t-u)(u-t')(u-t'')}$ über. Folglich ist

$$T' = i\sqrt{AB}\int\frac{du}{\sqrt{(t-u)(u-t')(u-t'')}} \quad \text{(Weg Fig. 7.)}$$

Der Integrationsweg ist jetzt eine geschlossene rückläufige Curve um die Pole t und t', Diesen Weg dehne man nun nach allen Seiten so weit als möglich aus und weil das Integral im Horizonte wie $u^{-\frac{1}{2}}$ verschwindet, so erhält man auch

$$T' = i\sqrt{AB}\int\frac{du}{\sqrt{(t-u)(u-t')(u-t'')}} \quad \text{(Weg Fig. 8.)}$$

Der Integrationsweg verwandelt sich also in eine Schlinge, welche aus dem Ostpunkte um den Pol t geworfen ist.

Führt man nun u von dem Erkennungsstandorte A durch einen pos. Halbkreis auf den südlichen Rand der Uebergangsl., so geht die in A pos. Wurzel $\sqrt{(t-u)(u-t')(u-t'')}$ in $i\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}$ über. Wird nun der Weg auf die Uebergangsl. zusammengezogen und beachtet, dass die entsprechenden Elemente auf dem Nord- und Südrande einander gleich sind, so erhält man

$$T' = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty\frac{du}{\sqrt{(u-t)(u-t')(u-t'')}}.$$



Wenn $A-B$ gegen null hingeht, so droht der Variabeln die Gefahr, ihren Spielraum $B \angle -t'' \angle A$ zu verlieren. Man setze daher

$$-t'' = A - C\cos^2\theta, \quad \text{wo} \quad A - B = C$$

ist; dadurch geht die Formel für das durch den Bezugspunkt gehende zweischalige Hyperboloid in

$$\frac{x^2}{C\cos^2\theta} - \frac{y^2}{C\sin^2\theta} + \frac{z^2}{-A+C\cos^2\theta} = 1$$

über, und lässt man nun C null werden, so erhält man

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta} - \frac{y^2}{\sin^2\theta} = 0.$$

Diese Formel stellt nun zwei Ebenen dar, welche durch den Ursprung gehen, auf der xy Ebene senkrecht stehen und mit der Ebene xz den Winkel θ einschliessen. Die Coordinaten des Bezugspunktes sind in diesem Falle

$$x = \frac{\sqrt{(A+t)(A+t')}}{\sqrt{A}}\cos\theta; \quad y = \frac{\sqrt{(A+t)(A+t'')}}{\sqrt{A}}\sin\theta$$

$$z = \frac{\sqrt{t(-t')}}{\sqrt{A}}$$

und das Potential des Kreisringes ist

$$T'_1 = 2A\int_t^\infty \frac{du}{\sqrt{(A+u)(u-t)(u-t')}}$$

II. Von allen früheren unabhängige Berechnung des Potentials einer Ellipse, deren Dichtigkeit in jedem Punkte gleich ist dem Abstande des Mittelpunktes von der Tangente.

Die Gleichungen der Ellipse seien

$$\frac{X^2}{A} + \frac{Y^2}{B} = 1, \quad Z = 0;$$

der Bezugspunkt habe die Coordinaten x, y, z. Durch diesen gehen drei confocale Flächen mit den dritten Halbaxenquadraten t, t', t''; die gegebene Ellipse ist Focalcurve des Systems. Die Abstände der durch den Bezugspunkt an die drei Flächen gelegten Berührungsebenen vom Mittelpunkte seien p, p', p''. Die Wurzeln t, t', t'' sind
.e in Bezug auf s identische Gleichung

$$1) \qquad 1-\frac{x^2}{A+s}-\frac{y^2}{B+s}-\frac{z^2}{s}=\frac{(s-t)(s-t')(s-t'')}{(A+s)(B+s).s}$$

bestimmt und folgenden Bedingungen unterworfen:

$$t>0>t'>-B>t''>-A.$$

Die Richtungscos. der Normalen der ersten Fläche im Bezugspunkte sind:

$$\lambda=\frac{px}{A+t}, \qquad \mu=\frac{py}{B+t}, \qquad \nu=\frac{pz}{t}$$

und ähnlich mit Accenten bei den zwei übrigen Flächen. Man wähle den Bezugspunkt zum Ursprunge eines neuen rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen Axen die entgegengesetzte Richtung der Normalen haben, und bezeichne die neuen Coordinaten mit u, u', u'' Dann sind

$$X=x-\lambda u-\lambda' u'-\lambda'' u''; \qquad Y=y-\mu u-\mu' u'-\mu'' u'',$$
$$Z=z-\nu u-\nu' u'-\nu'' u''$$

und nun sollen die zwei Gleichungen der Ellipse in den neuen Coordinaten ausgedrückt werden. Die Gleichung $Z=0$ geht sogleich in

$$2) \qquad \frac{pu}{t}+\frac{p'u'}{t'}+\frac{p''u''}{t''}=1$$

über. Um die andere Gleichung in der einfachsten Gestalt zu erhalten, entwickle man den Ausdruck

$$\Omega=\frac{X^2}{A}+\frac{Y^2}{B}-1-\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}-1\right)\left(\frac{pu}{t}+\frac{p'u'}{t'}+\frac{p''u''}{t''}-1\right)^2$$
$$-2z^2\left(\frac{pu}{t^2}+\frac{p'u'}{t'^2}+\frac{p''u''}{t''^2}\right)\left(\frac{pu}{t}+\frac{p'u'}{t'}+\frac{p''u''}{t''}-1\right)$$

Der erste Teil der Entwicklung ist Null. Der Coefficient von $2u$ ist

$$-p\left(\frac{x^2}{A(A+t)}+\frac{y^2}{B(B+t)}\right)+\frac{p}{t}\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}-1\right)+\frac{pz^2}{t^2}$$
$$=-\frac{p}{t}\left(\frac{x^2}{A+t}+\frac{y^2}{B+t}+\frac{z^2}{t}-1\right)=0$$

Der Coefficient von u^2 ist:

$$p^2\left(\frac{x^2}{A(A+t)^2}+\frac{y^2}{B(B+t)^2}-\frac{1}{t^2}\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}\right)+\frac{1}{t^2}-\frac{z^2}{t^2}\right),$$

Nun ist

$$\frac{x^2}{A(A+t)^2}+\frac{y^2}{B(B+t)^2}=\frac{1}{t}\left(\frac{x^2}{A(A+t)}+\frac{y^2}{B(B+t)}\right)$$
$$-\frac{1}{t}\left(\frac{x^2}{(A+t)^2}+\frac{y^2}{(B+t)^2}\right)=\frac{1}{t^2}\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}\right)$$
$$-\frac{1}{t^2}\left(\frac{x^2}{A+t}+\frac{y^2}{B+t}\right)-\frac{1}{t}\left(\frac{x^2}{(A+t)^2}+\frac{y^2}{(B+t)^2}\right)$$

somit der Coefficient von u^2 gleich

$$\frac{p^2}{t}\left(\frac{1}{t}\left(1-\frac{x^2}{A+t}-\frac{y^2}{B+t}-\frac{z^2}{t}\right)-\left(\frac{x^2}{(A+t)^2}+\frac{y^2}{(B+t)^2}+\frac{z^2}{t^2}\right)\right)=-\frac{1}{t}$$

Ebenso findet man

$$\text{Coef. von } u'^2=-\frac{1}{t'},\quad \text{Coef. von } u''^2=-\frac{1}{t''}.$$

Ferner

$$\text{Coef. von } 2u'u''=p'p''\left(\frac{x^2}{A(A+t')(A+t'')}+\frac{y^2}{B(B+C)(B+t'')}\right)$$
$$-\frac{p'p''}{t't''}\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}-1\right)-\frac{p'p''}{t't''}\left(\frac{z^2}{t'}+\frac{z^2}{t''}\right)$$

und weil

$$p'p''\left(\frac{x^2}{A(A+t')(A+t'')}+\frac{y^2}{B(B+t')(B+t'')}\right)$$
$$=\frac{p'p''}{t''}\left(\frac{x^2}{A(A+t'')}+\frac{y^2}{B(B+t'')}\right)$$
$$-\frac{p'p''}{t''}\left(\frac{x^2}{(A+t')(A+t'')}\pm\frac{y^2}{(B+t')(B+t'')}\right)$$

so erhält man

$$\text{Coef. von } 2u'u''=\frac{p'p''}{t't''}\left(-\frac{x^2}{A+t''}-\frac{y^2}{B+t''}-\frac{z^2}{t''}+1\right)$$
$$-\frac{p'p''}{t'}\left(\frac{x^2}{(A+t')(A+t'')}+\frac{y^2}{(B+t')(B+t'')}+\frac{z^2}{t't''}\right)=0.$$

folglich ist

$$\Omega=-\left(\frac{u^2}{t}+\frac{u'^2}{t'}+\frac{u''^2}{t''}\right)$$

und somit die zweite Gleichung der Ellipse

$$\frac{u^2}{t}+\frac{u'^2}{t'}+\frac{u''^2}{t''}=0. \tag{3}$$

derselben folgende Gestalt:

$$\left(\frac{u'}{\sqrt{-t'}}\right)^2 + \left(\frac{u''}{\sqrt{-t''}}\right)^2 = \left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right)^2$$

und dieser Gleichung kann man genügen, wenn man

$$\frac{u'}{\sqrt{-t'}} = \frac{u}{\sqrt{t}}\cos\varphi \quad \text{und} \quad \frac{u''}{\sqrt{-t''}} = \frac{u}{\sqrt{t}}\sin\varphi$$

setzt.

Die Gleichung (2) gibt dann, wenn man der Kürze wegen die Bezeichnung

$$N = \frac{p}{\sqrt{t}} - \frac{p'}{\sqrt{-t'}}\cos\varphi - \frac{p''}{\sqrt{-t''}}\sin\varphi$$

gebraucht,

$$\frac{u}{\sqrt{t}} = \frac{1}{N}.$$

Bedeutet r die Länge des Strahles, der den Bezugspunkt mit dem Massenteilchen verbindet, ist also

$$r^2 = u^2 + u'^2 + u''^2$$

so ergibt sich $r = \frac{M}{N}$, wo $M^2 = t - t'\cos^2\varphi - t''\sin^2\varphi$ ist.

Der Wert des Massenteilchens ρds ist gleich dem doppelten Flächenelemente, das der vom Mittelpunkte ausgehende Leitstrahl der Ellipse beschreibt, und sei mit ω bezeichnet. Dann ist ω der Inhalt des Parallelepipedes, dessen Kanten das Curvenelement und die vom Bezugspunkte aus nach dem Mittelpunkte und nach dem Punkte der Curve gehende Strahlen sind. Weil die Axen der u, u', u'' zu den Normalen der drei confocalen Flächen entgegengesetzt gerichtet sind, so muss man die Determinante, die ω darstellen soll, in negativem Sinne anordnen und hat

$$\omega = \begin{vmatrix} du & du' & du'' \\ p & p' & p'' \\ u & u' & u'' \end{vmatrix}$$

Um mittelst der Gleichungen (2) und (3) und der Gleichung

$$\frac{p^2}{t} + \frac{p'^2}{t'} + \frac{p''^2}{t''} = 1,$$

die aus [illegible] abgeleitet werden kann, die Rechnung zu vereinfachen, multipliciere man [illegible] mit

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{u}{t} & \frac{u'}{t'} & \frac{u''}{t''} \\ \frac{p}{t} & \frac{p'}{t'} & \frac{p''}{t''} \end{vmatrix}$$

indem man die Zeilen beider Determinantenfiguren paarweise zu Productsummen combinirt. Es ergibt sich

$$\Delta zw = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{u}{t} & \frac{u'}{t'} & \frac{u''}{t''} \\ \frac{p}{t} & \frac{p'}{t'} & \frac{p''}{t''} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} du & du' & du'' \\ p & p' & p'' \\ u & u' & u'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} du & p & u \\ \frac{udu}{t}+\frac{u'du'}{t'}+\frac{u''du''}{t''} & \frac{up}{t}+\frac{u'p'}{t'}+\frac{u''p''}{t''} & \frac{u^2}{t}+\frac{u'^2}{t'}+\frac{u''^2}{t''} \\ \frac{pdu}{t}+\frac{p'du'}{t'}+\frac{p''du''}{t''} & \frac{p^2}{t}+\frac{p'^2}{t'}+\frac{p''^2}{t''} & \frac{pu}{t}+\frac{p'u'}{t'}+\frac{p''u''}{t''} \end{vmatrix}$$

oder, weil

$$\frac{udu}{t}+\frac{u'du'}{t'}+\frac{u''du''}{t''} = \frac{1}{2}d\left(\frac{u^2}{t}+\frac{u'^2}{t'}+\frac{u''^2}{t''}\right)$$

und

$$\frac{pdu}{t}+\frac{p'du'}{t'}+\frac{p''du''}{t''} = d\left(\frac{pu}{t}+\frac{p'u'}{t'}+\frac{p''u''}{t''}\right)$$

so ist auch

$$\Delta zw = \begin{vmatrix} du & p & u \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = du$$

Nun ist

$$z = \frac{\sqrt{tt't''}}{\sqrt{AB}}, \quad \text{also} \quad z\Delta = \frac{\sqrt{tt't''}}{\sqrt{AB}}\left(\frac{u'}{t'}\cdot\frac{p''}{t''} - \frac{u''}{t''}\cdot\frac{p'}{t'}\right)$$

oder

$$z\Delta = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{AB}}\left(\frac{p''}{\sqrt{-t''}}\cdot\frac{u'}{\sqrt{-t'}} - \frac{p'}{\sqrt{-t'}}\cdot\frac{u''}{\sqrt{-t''}}\right)$$

$$= \frac{u}{\sqrt{AB}}\left(\frac{p''}{\sqrt{-t''}}\cos\varphi - \frac{p'}{\sqrt{-t'}}\sin\varphi\right).$$

Wir hatten

$$u = \frac{\sqrt{t}}{N}, \quad \frac{\partial N}{\partial \varphi} = \frac{p'}{\sqrt{-t'}}\sin\varphi - \frac{p''}{\sqrt{-t''}}\cos\varphi$$

erhält man

$$z\Delta = -\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{AB}}\cdot\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial\varphi}$$

und weil

$$du = -\frac{\sqrt{t}\,\partial N}{N^2\,\partial\varphi}d\varphi$$

so ist

$$w = \sqrt{AB}\frac{d\varphi}{N}$$

als Wert des Massenelementes. Weil

$$r = \frac{M}{N}$$

so ist das Potential

$$T' = \int\frac{w}{r} = \sqrt{AB}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{M}$$

wenn

$$M^2 = t - (t'\cos^2\varphi + t''\sin^2\varphi).$$

Weil sich M nicht ändert, wenn man φ durch $\pi - \varphi$, $\pi + \varphi$, $-\varphi$ ersetzt, so ist auch

$$T' = 4\sqrt{AB}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{M}$$

Führt man mittelst der Substitution $\tan^2\varphi = \frac{v-t}{t-t''}$ die neue Variable v ein, so wächst v von t an ohne Ende, während φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst; man hat auch

$$\cos^2\varphi = \frac{t-t''}{v-t''},\quad \sin^2\varphi = \frac{v-t}{v-t''}$$

und

$$(v-t'')M^2 = t(v-t'') - t'(t-t'') - t''(v-t) = (t-t'')(v-t')$$

$$M = \sqrt{(t-t'')}\frac{\sqrt{(v-t')}}{\sqrt{(v-t'')}},\quad 2\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi = \frac{t-t''}{(v-t'')^2}dv$$

und weil

$$\sin\varphi\cos\varphi = \sqrt{(t-t'')}\frac{\sqrt{(v-t)}}{v-t''}$$

so ist

$$d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{t-t''}}{\sqrt{(v-t)}}\frac{dv}{v-t''}$$

also

$$\frac{d\varphi}{M} = \frac{dv}{\sqrt{(v-t)(v-t')(v-t'')}}$$

somit

$$T' = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{dv}{\sqrt{(v-t)(v-t')(v-t'')}}$$

III. Nähere Betrachtung des Potentials der Ellipse.

§. 8. Das Potential.

$R^2 = (u-t)(u-t')(u-t'')$ ist pos., wenn $u > t$, ebenso wenn $t'' < u < t'$; in beiden Fällen sei auch R positiv. $R'^2 = (t-u)(u-t')(u-t'')$ ist pos., wenn $t' < u < t$ oder $u < t''$; R' sei zugleich mit R'^2 pos. Ferner sei $U^2 = (A+u)(B+u)u$, wo U für pos. u auch pos. verstanden wird. Nun ist

$$W^2 = 1 - \Sigma\frac{x^2}{A+u} = \frac{(u-t)(u-t')(u-t'')}{(A+u)(B+u)u}$$

(in Bezug auf u identisch richtig) also

$$R = W.U$$

wo nun auch W für $t < u$ positiv ist.

Es ist also

$$T' = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{WU} = \sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{R}$$

und wenn wir uns das u Feld zweiblätterig denken mit den beiden Uebergangslinien $t\ldots$ Ostpunkt und $t''\ldots t'$, so seien R und U, folglich auch W auf dem Südrande der ersten Uebergangslinie pos. Gelangt nun u durch einen kleinen neg. Kreis um den Pol t auf den Nordrand, so geht R, folglich auch W in's Negative über. Der Integrationsweg kann deshalb in eine rechtläufige Schlinge verwandelt werden, welche aus dem Ostpunkte um den Pol t geworfen ist. Erkennungsstandort heisse derjenige Punkt eines Integrationsweges, wo man sich über die Logarithmen der im Integralausdrucke vorkommenden Potenzbasen verständigt. So oft es angeht, wähle ich den Erkennungsort da, wo alle Potenzbasen pos., ihre Logarithmen daher alle reell angesehen werden können. Der Pfeil, der die Wegesrichtung angibt, werde neben denselben gesetzt.

Es ist demnach

$$T' = i\sqrt{AB}\int \frac{du}{R'} \quad \text{(Weg Fig 9.)}$$

oder mit Einschaltung des Horizontes

$$T' = i\sqrt{AB}\int \frac{du}{R'} \quad \text{(Weg Fig. 10.)}$$

Die beiden Pole t'' und t' sind hier zugänglich, und weil zwei entsprechende Elemente des Integrals auf den Rändern der Uebergangslinie gleich sind, so ist auch

$$T' = 2\sqrt{AB}\int\limits_{t''} \frac{du}{R'}.$$

Um dieses Integral in ein elliptisches Integral zu verwandeln, setze man

$$u = t'\sin^2\varphi + t''\cos^2\varphi,$$

wodurch die Variable φ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ eingeschlossen wird. Es ist nun

$$u - t = (t'' - t)\left(1 - \frac{t'' - t'}{t'' - t}\sin^2\varphi\right), \quad du = -2(t'' - t')\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi$$

$$u - t' = (t'' - t)\cos^2\varphi, \quad u - t'' = -(t'' - t')\sin^2\varphi$$

und wenn $k^2 = \frac{t' - t''}{t - t''}$ gesetzt wird, so ist

$$\frac{du}{R} = \frac{2d\varphi}{\sqrt{(t - t'')}\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)}}$$

folglich

$$1) \quad T' = 2\sqrt{AB}\int\limits_{t''}^{t'} \frac{du}{R} = \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{(t - t'')}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)}} \frac{4\sqrt{AB}\,K}{\sqrt{(t - t'')}}$$

und für den Kreisring

$$1') \quad T'_1 = \frac{4A}{\sqrt{A + t}}\,K\left(k^2 = \frac{A + t'}{A + t}\right)$$

Dasselbe Resultat hätte man auch aus dem Integral $2\sqrt{AB}\int\limits_t^{\infty} \frac{du}{R}$ mittelst der Substitution $u = t + (t - t'')\operatorname{tang}^2\varphi$ erhalten können. Weil für keinen Punkt im Raume $t = t''$ werden kann, so folgt aus

Formel 1, dass das Potential nur da unendlich wird, wo K unendlich ist, also in Punkten, für welche $k^2 = 1$ ist. Denn es ist

$$K = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 K^{2n} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 \left(\frac{t'-t''}{t-t''}\right)^n$$

also

$$T' = \frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{(t-t'')}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 \left(\frac{t'-t''}{t-t''}\right)^n$$

K ist aber dann gleich 1, wenn $t = t'$ ist. Mithin ist die ganze Ellipse eine Unstetigkeitscurve für das Potential. Schon das Integral $2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{R}$, welches für $t = t'$ die Form $2\sqrt{AB}\int_0^\infty \frac{du}{(u-t)\sqrt{(u-t'')}}$ annimmt, offenbart die log. Unstetigkeit. Bevor wir aber hier näher eintreten, wollen wir noch das Potential für folgende besondere Lagen des Bezugspunktes darstellen:

a) Der Bezugspunkt liege im Unendlichen.

Weil für solche Punkte auch t unendlich wird, t' und t'' aber zwischen endlichen Grenzen eingeschlossen bleiben, so kann man, da nur sehr grosse Werte in Betracht kommen, t'' und t' neben u und ebenso A und B neben t vernachlässigen. Das durch den Bezugspunkt gehende Ellipsoid kann als eine Kugel mit sehr grossem Radius aufgefasst werden, und man hat

$$x^2 + y^2 + z^2 = t = r^2,$$

wenn r die Entfernung des Bezugspunktes vom Mittelpunkte ist. Für diesen Fall ist also

$$T' = i\sqrt{AB}\int \frac{1}{\sqrt{(r^2-u)}} \cdot \frac{du}{u}$$

(Weg eine Schlinge aus dem Ostpunkte um r^2 geworfen)

Dieses Integral verhält sich im Horizonte wie $u^{-\frac{1}{2}}$ und deshalb kann man den ganzen rückläufigen Horizont in die Schlinge einschalten, wodurch sich der Weg in einen kleinen (rechtläufigen) rückläufigen Kreis um den Pol 0 verwandelt. Also

$$T' = i\sqrt{AB}\int \frac{1}{\sqrt{(r^2-u)}} \cdot \frac{du}{u} \quad \text{(Weg Fig. 11.)}$$

und nach einem Lehrsatze von Cauchy findet man

$$T' = \frac{2\pi\sqrt{AB}}{r}$$

folglich

2) $$T = \frac{2\pi\varrho\varepsilon\sqrt{AB}}{r}.$$

Für das Massenelement dieses Ringes hatten wir früher den Ausdruck $\varepsilon\varrho\sqrt{AB}\,d\varphi$ erhalten. Die Masse desselben ist also

$$\text{Masse} = \varrho\varepsilon\sqrt{AB}\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\varrho\varepsilon\pi\sqrt{AB}$$

und demnach

$$T = \frac{\text{Masse}}{r}.$$

Diesen Ausdruck für das Potential erhält man auch aus Formel 1. Denn ist t sehr gross, so kann man K r's 0, mithin K als $\frac{\pi}{2}$ annehmen, während $\sqrt{t-t''}$ in r übergeht.

Um das Integral

$$i\sqrt{AB}\int\frac{du}{u\sqrt{r^2-u}}\ \text{(Weg eine Schlinge)} = 2\sqrt{AB}\int_{r^2}^{\infty}\frac{du}{u\sqrt{(u-r^2)}}$$

auf gewöhnliche Weise zu berechnen, setze ich $u - r^2 = u'^2$ und erhalte

$$T' = 4\sqrt{AB}\int_0^{\infty}\frac{du'}{u'^2+r^2} = 4\sqrt{AB}\int_0^{\infty}\frac{d\frac{u}{r}}{1+\left(\frac{u}{r}\right)^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{AB}}{r}\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{r}\right)_0^{\infty} = \frac{2\pi\sqrt{AB}}{r}$$

b) Der Bezugspunkt liege in der Focalhyperbel.

Die Focalhyperbel wird durch die Gleichungen

$$\frac{X^2}{A-B} - \frac{Z^2}{B} = 1, \quad Y = 0$$

bestimmt, und die dritten Halbaxenquadrate der durch ihre Punkte gehenden einschaligen und zweischaligen Hyperboloide sind einander gleich und $-B$. Das Potential nimmt deshalb folgende Form an

$$T' = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{(B+u)\sqrt{u-t}}$$

oder auch

$$T' = i\sqrt{AB}\int \frac{du}{(B+u)\sqrt{(t-u)}}$$

(Weg eine geschlossene rückläufige Curve um den Pol $-B$)

und nach Cauchy erhält man nun

$$T' = \frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{B+t}} \tag{3)}$$

Ist nun $A = B$, so fällt die Focalhyperbel mit der z Axe und die Brennpunkte fallen mit dem Mittelpunkte zusammen. Es ist deshalb $t = z^2$ und somit das Potential eines Kreisringes für einen Punkt der z Axe gleich

$$T'_1 = \frac{2\pi A}{\sqrt{A+z^2}}. \tag{3')}$$

Weil die Focalhyperbel durch die Brennpunkte der Ellipse geht und für diese Punkte auch $t = 0$ ist, so ist das Potential der Ellipse, bezogen auf die Brennpunkte gleich

$$T' = 2\pi\sqrt{A}$$

und das Potential des Kreises, bezogen auf den Mittelpunkt

$$T'_1 = 2\pi r,$$

wenn r der Radius des Kreises ist.

Dieselben Resultate hätte man auch aus Formel 1 erhalten können, indem für $(t' = t'' = -B)$ $k^2 = 0$ wird, also K in $\frac{\pi}{2}$ übergeht.

Will man zur Ableitung dieser Formeln den geraden Integrationsweg gebrauchen, so setze man $u - t = x^2$; also

$$T' = 4\sqrt{AB}\int_0^\infty \frac{dx}{B+t+x^2} = \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{(B+t)}}\int_0^\infty \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{B+t}}\right)}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{B+t}}\right)^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{B+t}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{(B+t)}}\right)_0^\infty = \frac{2\pi\sqrt{AB}}{\sqrt{(B+t)}}$$

c. Der Bezugspunkt liege in unmittelbarer Nähe der Focalellipse.

Aus der allgemeinen Theorie des Potentials ist bekannt, dass das Potential einer mit Masse von variabler Dichtigkeit belegten, stetig gekrümmten, sonst aber beliebigen Curve, in unmittelbarer Nähe derselben unendlich wird wie $2\varrho \log \frac{1}{s}$, wenn s den senkrechten Abstand des Bezugspunktes vom Curvenelemente, dessen Dichtigkeit ϱ ist, bezeichnet. Liegt nun der Bezugspunkt in nächster Nähe der Focalellipse, so sind t und t', mithin auch der complementäre Modul l^2, nahe bei Null. Denn es ist

$$l^2 = -k^2+1 = \frac{t-t'}{t-t''}.$$

Weil nun

$$K(k^2) = -iL(l^2)$$

so folgt

$$T' = -i\frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{(t-t'')}}L(l^2).$$

Diese Form des Potentials hätte man auch aus der anfänglichen geradlinigen Integralform mittelst der Substitution

$$u = t-(t-t')S\sigma^2, \quad \text{wo} \quad K^2 = \frac{t-t'}{t-t''}$$

erhalten können. Weil nun

$$-iL = \sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 l^{2n}\left(\log 4 - \tfrac{1}{2}\log l^2 - 2\left(\frac{1}{n+1}+\cdots\frac{1}{2n}\right)\right)$$

so ist auch

$$T' = \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{(t-t'')}}\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}^2 l^{2n}\left(\log 4 - \tfrac{1}{2}\log l^2 - 2\left(\frac{1}{n+1}+\cdots\frac{1}{2n}\right)\right)$$

und nach Vernachlässigung aller Terme, die für $t-t'=0$ verschwinden,

$$4)\qquad T' = \frac{4\sqrt{AB}}{\sqrt{-t''}}\left(2\log 2 - \tfrac{1}{2}\log(t-t') + \tfrac{1}{2}\log(-t'')\right)$$

und für den Kreis

$$4')\qquad T'_1 = 4\sqrt{A}\left(2\log 2 - \tfrac{1}{2}\log(t-t') + \tfrac{1}{2}\log A\right).$$

Nun soll der kleine senkrechte Abstand des Bezugspunktes vom Curvenelemente durch die dritten Halbaxenquadrate der durch ihn gehenden confocalen Flächen dargestellt werden. Der Punkt $(x_0, y_0$

z_0) liege auf der Ellipse. Durch denselben geht ein zweischaliges Hyperboloid mit dem dritten Halbaxenquadrat t''. Auf diesem liege in nächster Nähe der Ellipse der Punkt (x, y, z). Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte steht senkrecht auf der Ellipse im Punkte P_0. Ihre Richtung ist beliebig, sie kann sich um das Curvenelement herum drehen. Nun ist

$$x^2 = \frac{(A+t)(A+t')(A+t'')}{A(A-B)}; \quad y^2 = -\frac{(B+t)(B+t')(B+t'')}{B(A-B)};$$

$$z^2 = \frac{tt't''}{AB}$$

und

$$x_0^2 = \frac{A(A+t'')}{A-B}; \quad y_0^2 = \frac{B(-B-t'')}{A-B}; \quad z_0^2 = 0.$$

Es ist aber

$$s = \sqrt{(x_0 - x_0^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

und weil

$$x^2 - x_0^2 = (x+x_0)(x-x_0) = 2x_0(x-x_0)$$

$$y^2 - y_0^2 = (y+y_0)(y-y_0) = 2y_0(y-y_0)$$

so ist

$$2x_0(x-x_0) = \frac{(A+t)(A+t')(A+t'')}{A(A-B)} - \frac{A(A+t'')}{A-B}$$

$$= \frac{(A^2+A(t+t')+tt')(A+t'')}{A(A-B)} - \frac{A(A+t'')}{A-B}$$

oder mit Vernachlässigung der Terme in tt'

$$2x_0(x-x_0) = \frac{(t+t')(A+t'')}{A-B}$$

also

$$(x-x_0) = \frac{(t+t')\sqrt{(A+t'')}}{2\sqrt{A}\sqrt{(A-B)}}$$

und ebenso

$$y - y_0 = \frac{(t+t')\sqrt{(-B-t'')}}{2\sqrt{B}\sqrt{A-B}}, \qquad z = \frac{\sqrt{tt't''}}{\sqrt{AB}}$$

folglich

$$s^2 = \frac{(t+t')^2(A+t'')}{4A(A-B)} + \frac{(t+t')^2(-B-t'')}{4B(A-B)} + \frac{tt't''}{AB}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{(t+t')^2}{AB(A-B)}(Bt''-At'') + \frac{tt't''}{AB}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{(t+t')^2(-t'')}{AB} + \frac{tt't''}{AB} = \frac{1}{4}\cdot\frac{-t''}{AB}((t+t')^2 - 4tt')$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{-t''}{AB}(t-t')^2$$

somit

$$s^2 = \frac{t - t'}{2\sqrt{AB}} \cdot \sqrt{-t''}.$$

Mit Hülfe dieser Formel geht nun der oben erhaltene Ausdruck für das Potential in

$$T = \frac{2\sqrt{AB}}{\sqrt{-t''}} (-\log s - \tfrac{1}{2} \log AB + \log 8 + \tfrac{3}{2} \log(-t''))$$

über, oder mit Vernachlässigung der endlichen Terme

$$T' = \frac{2\sqrt{AB}}{\sqrt{-t''}} \log \frac{1}{s}.$$

Die Dichtigkeit in jedem Punkt der Ellipse ist aber gleich dem Perpendikel aus dem Mittelpunkte auf die Tangente Nun ist aber der Abstand des Mittelpunktes von der Tangentenebene des Ellipsoides gleich

$$p^2 = \frac{(A+t)(B+t)t}{(t-t')(t-t'')} = \frac{(AB+(A+B)t+t^2) . t}{(t-t')(t-t'')}.$$

Man lasse zuerst $t' = 0$ werden, damit die Berührungsebene des Ellipsoides auf der xy-ebene senkrecht stehe, und damit man Zähler und Nenner des Bruches durch t dividiren kann. Dann kann man $t = 0$ setzen und erhält für das Perpendikel auf die Tangente der Ellipse den Ausdruck

$$p^2 = \frac{AB}{-t''},$$

also

$$p = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{-t''}} = \varrho,$$

folglich ist das Potential für einen Punkt in nächster Nähe der Ellipse

$$T' = 2\varrho \log \frac{1}{s}.$$

§. 9. Die Kraftcomponenten des elliptischen Ringes.

Um den Schwierigkeiten, welche die Grenzen der geradlinigen Integrale der Differentiation bereiten würden, aus dem Wege zu gehen, verwandle ich den Weg in eine Schlinge, geworfen aus dem Ostpunkte um den Pol t. Der Erkennungsort liege östlich von t auf der südlichen Seite der Uebergangslinie (t — Ostpunkt), wo R, U und W pos. verstanden werden. Es sei also

$$T' = \sqrt{AB} \int \frac{du}{U.W} \quad \text{(Weg Fig. 13.)}$$

und weil nun

$$\frac{\partial \frac{1}{W}}{\partial x} = -\frac{1}{W^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial x}$$

und

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{W} \cdot \frac{x}{A+u}$$

also

$$\frac{\partial \frac{1}{W}}{\partial x} = \frac{1}{W^3} \cdot \frac{x}{A+u}, \quad \frac{\partial \frac{1}{W}}{\partial y} = \frac{1}{W^3} \cdot \frac{y}{B+u},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{W}}{\partial z} = \frac{1}{W^3} \cdot \frac{z}{u},$$

so erhalten wir für die Kraftcompenenten des ellipt. Ringes folgende Formeln:

$$5. \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \sqrt{AB} \int \frac{x}{A+u} \cdot \frac{du}{UW^3} \\ &= \sqrt{AB}\, x \int \frac{(B+u)u}{(u-t)(u-t'(u-t'')} \cdot \frac{du}{R}, \\ Y &= \sqrt{AB} \int \frac{y}{B+u} \cdot \frac{\partial u}{UW^3} \\ &= \sqrt{AB}\, y \int \frac{(A+u)u}{(u-t)(u-t')(u-t'')} \cdot \frac{du}{R}. \\ Z &= \sqrt{AB} \int \frac{z}{u} \cdot \frac{du}{UW^3} \\ &= \sqrt{AB}\, z \int \frac{(A+u)(B+u)}{(u-t)(u-t')(u-t'')} \cdot \frac{du}{R}. \end{aligned} \right.$$

(Wege Fig. 13.).

Wenn $t = t'$ ist, das heisst, wenn der Bezugspunkt auf der Focalellipse liegt, so kann der Integrationsweg nicht mehr zwischen den Polen t' und t hindurch, ohne dass ein Teil des Integrals unendlich wird. Für diesen Fall verlieren also die Gleichungen 5. ihre Bedeutung. Weil sich ferner die Integrale im Horizonte wie $u^{-\frac{1}{2}}$ verhalten, so kann man auch hier den ganzen Horizont in die Schlinge einschalten, so dass sich der Weg in eine rückläufige geschlossene Curve um die Uebergangsl. $t'-t''$ verwandeln lässt. Da aber die Pole t, t' und t'' nicht zugänglich sind, so lassen sich die-

selben in dieser Form nicht in geradlinige Integrale verwandeln. Das wird nun erreicht, wenn wir den Bruch $\frac{\text{Zähler}}{(u-t)(u-t')(u-t'')}$ in Partialbrüche zerlegen. Um nicht jedes Integral besonders behandeln zu müssen, betrachte ich das allgemeine Integral

$$J = \int \frac{u^2+au+b}{(u-t)(u-t')(u-t'')} \cdot \frac{du}{R} \quad \text{(Weg wie in Fig. 13.)}.$$

Es ist nun

$$\frac{u^2+au+b}{(u-t)(u-t')(u-t'')} = \frac{L}{u-t} + \frac{M}{u-t'} + \frac{N}{u-t''}$$

wo

$$L = \frac{t^2+at+b}{(t-t')(t-t'')}, \quad M = -\frac{t'^2+at'+b}{(t-t')(t'-t'')}, \quad N = \frac{t''^2+at''+b}{(t-t'')(t'-t'')},$$

und wenn

$$A = \int \frac{1}{u-t} \cdot \frac{du}{R}, \quad A_1 = \int \frac{1}{u-t'} \cdot \frac{du}{R}$$

$$A'' = \int \frac{1}{u-t''} \cdot \frac{du}{R}$$

so folgt

$$J = LA + MA_1 + NA_{11}.$$

Verwandlung von A.

Für das Integral A ist der Pol t nicht zugänglich, wohl aber t' und t''. Deshalb verwandle man die Schlinge durch Einschaltung des Horizontes in eine geschlossene rückläufige Curve über die Uebergangslinie $t'-t''$.

$$A = -i \int \frac{1}{t-u} \cdot \frac{du}{R'} \quad \text{(Weg Fig. 14.)}$$

Der Integrationsweg werde nun auf die Uebergangslinie zusammengezogen und weil nun die Elemente an entgegengesetzten Stellen derselben einander gleich sind, so erhält man

$$A = -2 \int_{t''}^{t'} \frac{1}{t-u} \cdot \frac{du}{R'}.$$

Man setze nun

$$u = t' \sin^2\varphi + t'' \cos^2\varphi,$$

dann läuft die neue Variable φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$.

$$du = 2(t'-t'')\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi, \quad u-t = (t''-t)\left(1-\frac{t'-t''}{t-t''}\sin^2\varphi\right).$$

$$u-t' = -(t'-t'')\cos^2\varphi; \quad u-t'' = (t'-t'')\sin^2\varphi$$

und wenn

$$k^2 = \frac{t'-t''}{t-t''}$$

gesetzt wird, so folgt

$$\frac{du}{R} = \frac{2d\varphi}{\sqrt{(t-t'')}\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi}}$$

also

$$A = -\frac{4}{(t-t'')^{\frac{3}{2}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Es sei nun

$$\sin\varphi = S(u)$$

dann läuft u von 0 bis K;

$$d\varphi = D(u).du$$

folglich

$$A = -\frac{4}{(t-t'')^{\frac{3}{2}}}\int\frac{du}{D^2(u)}$$

und weil

$$D(K-u) = \frac{l}{Du},$$

so setze man

$$u = K-u'$$

also

$$A = -\frac{4}{(t-t'')^{\frac{3}{2}}}\int_0^K\frac{D^2u\,du}{l^2} = -\frac{4}{(t-t'')^{\frac{3}{2}}l^2}\int_0^K D^2u\,du$$

oder

$$A = -\frac{4}{(t-t'')^{\frac{3}{2}}l^2}E.$$

Mittelst der Abkürzungen

$$\alpha^2 = t-t', \quad \alpha'^2 = t'-t'', \quad \alpha''^2 = t-t'',$$

wo auch α, α' und α'' pos. verstanden werden, lässt sich diese Formel auch auf folgende Weise schreiben:

$$A = -\frac{4}{\alpha^2\alpha''}E.$$

Verwandlung von A_1.

Weil in diesem Integral der Pol t' nicht zugänglich ist, wohl aber t, so verwandle man die Schlinge in einen geradlinigen Weg, welcher den Pol t mit dem Ostpunkte verbindet. Es ist dann

$$A_1 = 2\int_t^\infty \frac{1}{u-t'} \cdot \frac{du}{R}.$$

Hier führe man nun die Variable φ durch die Substitution

$$u = t + (t-t')\operatorname{taug}^2\varphi$$

ein, durch welche dieselbe in die Grenzen $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ eingeschlossen wird.

$$du = 2(t-t')\operatorname{tg}\varphi\frac{1}{\cos^2\varphi}, \quad u-t = (t-t')\operatorname{tg}^2\varphi,$$

$$u-t' = (t-t')\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$u-t'' = (t-t'')\left(1+\frac{t-t'}{t-t''}\operatorname{tg}^2\varphi\right) = (t-t'')\left(1-\frac{t'-t''}{t-t''}\sin^2\varphi\right)\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$\frac{du}{R} = \frac{2\,d\varphi}{\sqrt{(t-t'')}\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$

folglich

$$A_1 = \frac{2}{(t-t')\sqrt{(t-t'')}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}.$$

Man setze nun wieder

$$\sin\varphi = Su;$$

dann kommt

$$A_1 = \frac{4}{\alpha^2\alpha''}\int_0^K C^2u\,du$$

$$= \frac{4}{\alpha^2\alpha''}\left(\int_0^K du - \int_0^K S^2u\,du\right).$$

Nun ist

$$\int_0^K S^2u\,du = \frac{1}{k^2}\int_0^K k^2S^2u\,du = \frac{1}{k^2}\left(\int_0^K du - \int_0^K D^2u\,du\right)$$

$$= \frac{1}{k^2}(K-E)$$

folglich

$$A_{,} = \frac{4}{\alpha^2 . \alpha''}\left(K - \frac{1}{k^2}K + \frac{1}{k^2}E\right)$$

$$= \frac{4}{k^2\alpha^2\alpha''}(E - l^2 K) = \frac{4}{a^2\alpha'^2\alpha''}(\alpha''^2 E - \alpha^2 K).$$

Verwandlung von $A_{,,}$.

In diesem Integral ist der Pol t'' nicht zugänglich. Man ziehe deshalb die Schlinge auf die Uebergangslinie $(t - O.P)$ zusammen und erhält

$$A_{,,} = 2\int_0^\infty \frac{1}{u - t''} \cdot \frac{du}{R}.$$

Es sei wieder

$$u = t + (t - t')\,\mathrm{tg}^2\varphi, \quad \text{also} \quad \frac{du}{R} = \frac{2}{\sqrt{(t - t'')}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)}},$$

$$u - t'' = \frac{\alpha''^2}{\cos^2\varphi}(1 - k^2\sin^2\varphi)$$

folglich

$$A_{,,} = \frac{4}{\alpha''^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \, . \, d\varphi}{(1 - k^2\sin^2\varphi)\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)}}$$

Man setze

$$\sin\varphi = Su$$

also

$$A_{,,} = \frac{4}{\alpha''^3}\int_0^K \frac{C^2u \, . \, du}{D^2u}$$

$$= \frac{4}{\alpha''^3}\left(\int_0^K \frac{du}{D^2u} - \int_0^K \frac{S^2u}{D^2u}\,du\right)$$

$$= \frac{4}{\alpha''^3}(I - II).$$

Nun ist

$$I = \frac{E}{l^2}$$

und

$$II = \frac{1}{k^2}\int_0^K \frac{k^2 S^2u \, . \, du}{D^2u} = \frac{1}{k^2}\left(\int_0^K \frac{du}{Du^2} - \int_0^K du\right)$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(\frac{E}{l^2} - K\right)$$

also

$$I-II=\frac{E}{l^2}-\frac{E}{k^2l^2}+\frac{K}{k^2}$$

$$=\frac{1}{k^2l^2}(k^2E-E)+\frac{K}{k^2}$$

$$=-\frac{E}{k^2}+\frac{K}{k^2}=\frac{1}{k^2}(K-E)$$

folglich

$$A_{''}=\frac{4}{\alpha'^2\alpha''}(K-E).$$

Für das Integral J erhalten wir nun schliesslich den Ausdruck:

$$J=\frac{4}{\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2}\left[\frac{\alpha^2(t''^2+at''+b)}{\alpha'^2\alpha''}(K-E)-\frac{\alpha''(t'^2+at'+b)}{\alpha^2\alpha'^2}(\alpha''^2E-\alpha^2K)\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha'^2(t+at+b)}{\alpha^2\alpha''}E\right]$$

und hieraus

$$X=\frac{4\sqrt{AB}\,x}{\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2}\left[\frac{\alpha^2t''(B+t'')}{\alpha'^2\alpha''}(K-E)-\frac{\alpha''t'(B+t')}{\alpha^2\alpha'^2}(\alpha''^2E-\alpha^2K)\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha'^2t(B+t)}{\alpha^2\alpha''}\right]$$

$$Y=\frac{4\sqrt{AB}\,y}{\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2}\left[\frac{\alpha^2t''(A+t'')}{\alpha'^2\alpha''}(K-E)-\frac{\alpha''t'(A+t')}{\alpha^2\alpha'^2}(\alpha''^2E-\alpha^2K)\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha'^2t(A+t)}{\alpha^2\alpha''}\right]$$

$$Z=\frac{4\sqrt{AB}\,z}{\alpha^2\alpha'^2\alpha''^2}\left[\frac{\alpha^2(t''^2+(A+B)t''+AB)}{\alpha'^2\alpha''}(K-E)\right.$$
$$\left.-\frac{\alpha''(t'^2+(A+B)t'+AB)}{\alpha^2\alpha'^2}(\alpha''^2E-\alpha^2K)-\frac{\alpha'^2(t^2+(A+B)t+AB)}{\alpha^2\alpha''}E\right]$$

Aus diesen Formeln lassen sich die entsprechenden Formeln für den Kreisring unmittelbar ablesen. Um die Kraftcomponenten für besondere Lagen des Bezugspunktes zu erhalten, können wir von den Integralausdrücken selber ausgehen, oder wir können auch die zuletzt erhaltenen Formeln zum Ausgangspunkte wählen. Wenn wir den letzten Weg einschlagen, so bereitet der Fall $\alpha'^2=0$ oder $t'=t''=-B$ einige Schwierigkeiten, indem mit den Formeln ein Grenzprocess zu vollziehen ist. Um diesen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, wähle ich den ersten Gang.

a) Der Bezugspunkt liege im Unendlichen.

In diesem Falle kann $t = r^2$ gesetzt werden, wenn r die Entfernung des Bezugspunktes vom Ursprunge bezeichnet, und weil nun der Integrationsweg so gelegt werden kann, dass nur sehr grosse Werte von u in Betracht kommen, so kann man t' und t'' und ebenso A und B neben u vernachlässigen, wodurch die Kraftcomponente in der Richtung der x Axe folgende Form annimmt:

$$X = \sqrt{AB}\, x \int \frac{du}{(u - r^2)\, u \sqrt{(u - r^2)}}.$$

(Weg eine Schlinge aus dem Ostpunkte um r^2)

Durch Einschaltung des Horizontes lässt sich nun die Schlinge in einem kleinen rückläufigen Kreis um den Pol verwandeln und nach einem Lehrsatze von Cauchy erhält man dann

$$X = - \frac{2\pi\sqrt{AB}}{r^2} \frac{x}{r}$$

und also nach Multipliciren mit dem constanten Factor $\varepsilon\varrho$

$$6) \qquad X = - \frac{2\varepsilon\varrho\pi\sqrt{AB}}{r^2} \cdot \frac{x}{r} = - \frac{\text{Masse}}{r^2} \cos(rx),$$

Ebenso erhält man

$$6. \quad \left\{ \begin{aligned} Y &= - \frac{2\pi\varrho\varepsilon\sqrt{AB}}{r^2} \cdot \frac{y}{r} = - \frac{\text{Masse}}{r^2} \cos(yr) \\ Z &= - \frac{2\pi\varrho\varepsilon\sqrt{AB}}{r^2} \cdot \frac{z}{r} = - \frac{\text{Masse}}{r^2} \cos(rz) \end{aligned} \right.$$

b) Der Bezugspunkt liege auf der Focalhyperbel.

Um die Kraftcomponenten für Punkte der Focalhyperbel zu erhalten, setze man in den Formeln des Systems (5) $t' = t'' = -B$ und erhalte

$$\left. \begin{aligned} X &= \sqrt{AB}\, x \int \frac{u}{(u-t)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{du}{(B+u)^2} \\ Y &= \sqrt{AB}\, y \int \frac{(A+u)\, u}{(u-t)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{du}{(B+u)^3} \\ Z &= \sqrt{AB}\, z \int \frac{(A+u)}{(u-t)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{du}{(B+u)^2} \end{aligned} \right\} \quad \text{(Weg eine Schlinge aus dem Ostpunkte um } t\text{)}$$

Durch Einschaltung des Horizontes lässt sich auch hier der Schlingenweg in einen kleinen rückläufigen Kreis um den Pol $-B$ verwandeln und weil

$$\frac{\partial (A+u)(t-u)^{-\frac{1}{2}}}{\partial u} = \frac{2t+3A+u}{2(u-t)^{\frac{3}{2}}}$$

so folgt nach einem Lehrsatze von Cauchy:

$$7. \quad \begin{cases} X = -\pi\sqrt{AB}\,x\,\dfrac{2t-B}{(B+t)^{\frac{3}{2}}}, \\[2ex] Y = 0, \\[2ex] Z = -\pi\sqrt{AB}\,z\,\dfrac{2t+3A-B}{(B+t)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Für die z Axe des Kreisringes erhält man hieraus folgende Werte:

$$7_{,}. \quad \begin{cases} X = 0, \\[1ex] Y = 0, \\[1ex] Z = -\dfrac{2\pi Az}{(A+t)^{\frac{3}{2}}} = -\dfrac{2\pi Az}{(A+z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Setzt man in System (7) $t = 0$, so erhält man speciell die Kraftcomponenten der Brennpunkte oder bei dem Kreise diejenigen des Mittelpunktes.

c) Der Bezugspunkt liege auf der x Axe innerhalb der Focalhyperbel.

$$(y = 0, \quad z = 0, \quad t = 0, \quad t' = -B)$$

Aus System (5) folgt

$$X = 2\sqrt{AB}\,x \int_0^\infty \frac{1}{u-t''}\cdot\frac{du}{u(u+B)(u-t'')}$$

$$Y = 2\sqrt{AB}\,y \int_0^\infty \frac{(A+u).\,du}{(B+u)(u-t'')^{\frac{3}{2}}\sqrt{u}}$$

$$Z = \sqrt{AB}\,z \int \frac{(A+u)\,du}{(u(u-t''))^{\frac{3}{2}}\sqrt{(B+u)}}$$

(Weg eine Schlinge aus dem Ostpunkte um den Pol 0)

und weil y und z null sind, so fallen die Componenten Y und Z aus der Betrachtung weg, und nur X hat einen von Null verschiedenen Wert. Das Integral zeigt auch, dass die [illegible] Wert behält,

während sich der Bezugspunkt auf der pos. Axe der x vom Mittelpunkte aus bis zum Brennpunkte hinbewegt, wo sie den Wert $\frac{\pi\sqrt{A(A-B)}}{B}$ annimmt. Um zu entscheiden, ob sie wächst oder abnimmt, leite ich sie nach x ab. Aus der Gleichung

$$\frac{x^2}{A+t''}+\frac{y^2}{B+t''}+\frac{z^2}{t''}=1$$

folgt

$$\frac{\partial t''}{\partial x}=\frac{2x}{A+t''}p''^2$$

und weil

$$p''^2=\frac{(A+t'')(A+t'')(t'')}{(t-t'')(t'-t'')},$$

also in unserem Falle

$$p''^2=A+t'',$$

so ist

$$\frac{\partial t''}{\partial x}=2x, \qquad \text{somit} \qquad \frac{\partial x(u-t'')^{-\frac{1}{2}}}{\partial x}=\frac{u-t''+3x^2}{(u-t'')^{\frac{3}{2}}}$$

folglich

$$\frac{\partial X}{\partial x}=2\sqrt{AB}\int_0^\infty \frac{u-t''+3x^2}{(u-t'')^2}\cdot\frac{du}{\sqrt{u(u+B)(u-t'')}}$$

und weil auch hier alle Elemente des Integrals pos. sind, so ist auch $\frac{\partial X}{\partial x}$ pos., somit ist die Componente im Wachsen begriffen. Man kann sie auch auf folgende Weise darstellen:

$$X=\frac{4\sqrt{AB}x}{\sqrt{-t''}.(-B-t'')}(K-E),$$

wo

$$k^2=\frac{-B-t''}{-t''}$$

ist. Für den Fall eines Kreises stellt sich dieselbe in der Form $\infty.0$ dar. Weil aber k^2 sehr klein ist, so ist $(K-E)$ annähernd $\frac{\pi}{4}k^2$; folglich ist für einen Kreis

$$X=\frac{\pi\sqrt{AB}x}{(-t'')^{\frac{3}{2}}}.$$

d) Der Bezugspunkt liege auf der pos. Seite der x Axe zwischen dem Brennpunkte und der Ellipse.

$$(y=0, \quad z=0, \quad t=0, \quad t''=-B)$$

Auch in diesem Falle werden die Componenten Y und Z gleich und für die Componenten X erhält man aus System (5) die Formel

$$X = 2\sqrt{AB}\,x\int_0^\infty \frac{1}{u-t'}\cdot\frac{du}{\sqrt{u(u-t')(u+B)}}$$

Alle Elemente dieses Integrals sind positiv, und weil

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 2\sqrt{AB}\int_0^\infty \frac{(u-t'+3x^2)}{(u-t')^2}\cdot\frac{du}{\sqrt{u(u+B)(u-t')}}$$

auch pos. ist, so ist die Componente im Wachsen begriffen. Für diesen Fall ist X auch

$$X = \frac{4\sqrt{A}\,x}{(B+t')(-t')}(BE-(-t')K),$$

wenn

$$k^2 = \frac{B+t'}{B},$$

und für den Kreis

$$X_1 = \frac{4\sqrt{A}\,x}{(A+t')(-t')}(AE-(-t')K), \quad \left(k^2 = \frac{t'+A}{A}\right)$$

e) Der Bezugspunkt liege auf der pos. Seite der x Axe ausserhalb der Focalellipse.

$$y=0,\quad z=0,\quad t=0,\quad t'=-B)$$

Aus System (5) folgt

$$X = 2\sqrt{AB}\,x\int \frac{1}{u-t'}\cdot\frac{du}{\sqrt{u(u-B)(u-t')}}$$

Weg eine Schlinge aus dem Nullpunkte um [illegible]

Weil aber der Pol nicht zugänglich ist, so verwandle man die Schlinge durch Einschaltung des Horizontes in eine rückläufig geschlossene Curve um die Pole $-B$ und 0 und erhalte

[illegible]

Weg in Fig. (5)

oder auch

[illegible]

[illegible] weil [illegible] die sich [illegible] Wert [illegible] x Componente negativ [illegible]

[illegible]

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 2\sqrt{AB}\int_{-B}^{0}\frac{u+2t+3A}{(t-u)^2}\cdot\frac{du}{\sqrt{(t-u)(-u)(u+B)}},$$

also für $A > B$ pos. Bewegt sich demnach der Bezugspunkt auf der pos. Seite der x Axe vom Scheitel der Ellipse aus bis zum Ostpunkte, so durchläuft die Componente X die Realitätslinie vom Westpunkte aus bis zu dem sehr kleinen neg. Werte $-\frac{2\pi\sqrt{AB}}{r^2}$. Man findet für diesen Fall auch

$$X = -\frac{4\sqrt{AB}x}{t.\sqrt{(B+t)}}E, \quad \left(k^2 = \frac{B}{B+t}\right)$$

und hieraus für $t = r^2$ und $x = r$, wo r sehr gross ist,

$$X = -\frac{2\pi\sqrt{AB}}{r^2}.$$

f) Der Bezugspunkt liege auf der pos. Seite der y Axe innerhalb der Ellipse.

$(x = 0, \quad z = 0, \quad t = 0, \quad t'' = -A)$

Das System (5) gibt

$$X = 0$$

$$Y = \sqrt{AB}\,y\int\frac{1}{u-t'}\cdot\frac{du}{\sqrt{u(u-t')(u+A)}}$$

(Weg eine Schlinge)

$$= \sqrt{AB}.2y\int_0^{\infty}\frac{1}{u-t'}\cdot\frac{du}{\sqrt{u(u-t')(u+A)}}$$

$$Z = 0.$$

Die Elemente dieses Integrals sind alle positiv, folglich ist auch Y positiv, und weil auch

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = 2\sqrt{AB}\int_0^{\infty}\frac{u-t'+3y^2}{(u-t')^2}\cdot\frac{du}{\sqrt{u(u+A)(u-t')}}$$

positiv ist, so nimmt mit wachsendem y auch die Componente Y zu. Für $y = \sqrt{B}$, also für $t' = 0$, ist sie pos. unendlich geworden. Durchläuft demnach der Bezugspunkt die pos. Seite der y Axe von $y = 0$

bis $y = \sqrt{B}$, so durchläuft die Componente Y die ganze pos. Realitätslinie von 0 bis zum Ostpunkte. Es ist auch

$$Y = \frac{4\sqrt{By}}{(A+t')(-t')} \cdot (AE - (-t')K),$$

wenn

$$k^2 = \frac{A+t'}{A}.$$

g) Der Bezugspunkt liege auf der pos. Seite der y Axe ausserhalb der Ellipse.

$$(x = 0, \quad z = 0, \quad t' = 0, \quad t'' = -A).$$

Aus System (5) erhält man

$$X = 0$$

$$Y = \sqrt{ABy} \int \frac{1}{u-t} \cdot \frac{du}{\sqrt{u(u+A)(u-t)}} \quad \text{(Weg eine Schlinge)}$$

$$Z = 0.$$

Weil dieses Integral im Horizonte verschwindet, so kann man die Schlinge in eine geschlossene Curve um die Pole $-A$ und 0 verwandeln und erhält so

$$Y = -i\sqrt{ABy} \int \frac{1}{t-u} \cdot \frac{du}{\sqrt{(u+A)u(t-u)}} \quad \text{(Weg Fig. 16.)}$$

oder auch

$$Y = -2\sqrt{ABy} \int_{-A}^{0} \frac{1}{t-u} \cdot \frac{du}{\sqrt{(t-u)(-u)(u+A)}}$$

und weil das Integral für sich einen pos. Wert hat, so ist die Comp. Y für diese Lage des Bezugspunktes negativ. Für die Abgeleitete nach y erhält man den Ausdruck

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = 2\sqrt{AB} \int_{-A}^{0} \frac{u+3B+2t}{(t-u)^2} \cdot \frac{du}{\sqrt{(t-u)(-u)(A+u)}}$$

und wenn $3B > A$, so ist $\frac{\partial Y}{\partial y}$ pos. und somit y im Wachsen begriffen. Setzt man y gleich der sehr grossen Zahl r, so ist

$$Y = -\frac{2\pi\sqrt{AB}}{r^2}.$$

Bewegt sich demnach der Bezugspunkt auf der pos. y Axe vom Scheitel der Ellipse aus bis zum Nordpunkte, so durchläuft die Comp. Y die negative Realitätslinie vom Westpunkte aus bis zu dem sehr kleinen negativen Werte $-\frac{2\pi\sqrt{AB}}{r^2}$. Man erhält auch

$$Y = -\frac{4\sqrt{AB}\,y}{t\sqrt{(A+t)}}E, \quad \text{wenn} \quad k^2 = \frac{A}{A+t}.$$

h) Der Bezugspunkt liege auf der pos. Seite der z Axe.

$$(x = 0, \quad y = 0, \quad t' = -B, \quad t'' = -A).$$

Man findet

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

$$Z = \sqrt{AB}\,z \int \frac{1}{u-t} \cdot \frac{du}{\sqrt{(u-t)(u+B)(u+A)}} \quad \text{(Weg eine Schlinge)}$$

und weil der Pol t nicht nicht zugänglich ist, so verwandle man die Schlinge in eine geschlossene Curve um die Pole $-A$ und $-B$ und erhält

$$Z = -i\sqrt{AB} \int \frac{1}{t-u} \cdot \frac{du}{\sqrt{(t-u)(A+u)(B+u)}}$$

(Weg eine Curve um $-A$ und $-B$)

oder auch

$$Z = -2\sqrt{AB}\,z \int_{-A}^{-B} \frac{1}{t-u} \cdot \frac{du}{\sqrt{(t-u)(-B-u)(A+u)}}.$$

Dieses Integral zeigt, dass die Comp. Z für pos. z negativ ist, und weil auch die Ableitung von Z nach z pos. ist, so nimmt sie mit wachsendem z zu bis zu dem Werte $-\frac{2\pi\sqrt{AB}}{r^2}$. Es ist auch

$$Z = -\frac{4\sqrt{AB}\,z}{(B+t)\sqrt{(A+t)}}E.$$

Aus diesen Betrachtungen der Kraftcomp. des ellipt. Ringes ergeben sich für das Potential folgende Schlüsse:

Bewegt sich der Bezugspunkt auf der pos. x Axe vom Mittelpunkte aus bis zum Scheitel der Ellipse, so wächst das Potential beständig und zwar von dem pos. Werte $4\sqrt{B}K$ an bis zum pos. Unendlichen. Wird hingegen das ausserhalb der Ellipse liegende Stück der x Axe in pos. Richtung durchlaufen, so sinkt der Wert

derselben fortwährend und zwar vom pos. Unendlichen an bis zu dem sehr kleinen Werte $\frac{2\pi\sqrt{AB}}{r}$ herab. Auf der y Axe verhält sich das Potential ähnlich. Durchläuft schliesslich der Bezugspunkt die pos. z Axe vom Ursprunge aus bis in's Unendliche, so nimmt dasselbe von dem Werte $4\sqrt{BK}$ an fortwährend ab und sinkt auf $\frac{2\pi\sqrt{AB}}{r}$ herab.

§. 10. Berechnung des Differentialparameters zweiter Ordnung.

Wir hatten

$$X = \sqrt{AB}\int \frac{x}{A+u}\cdot\frac{du}{UW^3}$$

(Weg eine Schlinge aus dem O. P. um den Pol t).

Weil für den Fall $t = t' = 0$ der Integrationsweg nicht mehr zwischen den Polen t und t' hindurch kann, ohne dass ein Teil des Integrals unendlich wird, so müssen wir diejenigen Lagen des Bezugspunktes, für welche $t = t' = 0$ ist, also die Focalellipse, von der nachfolgenden Betrachtung ausschliessen.

Weil

$$\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{1}{W}\cdot\frac{x}{A+u},$$

so ist

$$\frac{\partial x W^{-3}}{\partial x} = W^{-3} + \frac{3x^2}{A+u}\cdot\frac{1}{W^5}$$

also

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \sqrt{AB}\int\left(\frac{1}{(A+u)UW^3} + \frac{3x^2}{(A+u)^2UW^5}\right)du$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \sqrt{AB}\int\left(\frac{1}{(B+u)UW^3} + \frac{3y^2}{(B+u)^2UW^5}\right)du$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = \sqrt{AB}\int\left(\frac{1}{uUW^3} + \frac{3z^2}{u^2UW^5}\right)du$$

(Weg eine Schlinge aus dem Ostpunkte um den Pol t)

folglich

$$\Sigma\frac{\partial X}{\partial x} = \sqrt{AB}\int\left(\frac{1}{UW^3}\Sigma\frac{1}{A+u} + \frac{3}{UW^5}\Sigma\frac{x^2}{(A+u)^2}\right)du,$$

wenn

$$\Sigma\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Nun ist

$$\Sigma \frac{1}{A+u} = \frac{\partial \log (A+u)(B+u)u}{\partial u} = \frac{\partial \log U^2}{\partial u} = \frac{2}{U} \cdot \frac{\partial U}{\partial u},$$

und

$$\Sigma \frac{x^2}{(A+u)^2} = 2W \frac{\partial W}{\partial u},$$

also

$$\frac{1}{UW^3} \Sigma \frac{1}{A+u} + \frac{3}{UW^5} \Sigma \frac{x^2}{(A+u)^2} = 2\left(\frac{1}{U^2 W^3} \cdot \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{3}{UW^4} \frac{\partial W}{\partial u}\right)$$

$$= -2\left(\frac{1}{W^3} \cdot \frac{\partial \frac{1}{U}}{\partial u} + \frac{1}{U} \frac{\partial \frac{1}{W^3}}{\partial u}\right)$$

$$= -2 \frac{\partial \frac{1}{UW^3}}{\partial u}$$

und somit

$$\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = -2\sqrt{AB} \int \frac{\partial \frac{1}{UW^3}}{\partial u} du$$

$$= -2\sqrt{AB} \left[\frac{1}{UW^3}\right]_{\text{Anfangswert.}}^{\text{Endwert.}}$$

Weil nun aber auf der Südseite der Uebergangslinie ($t \ldots O.\ P.$) W pos. angenommen wurde, so ist W auf der Nordseite neg. und demnach ist, wenn Anfang und Ende des Weges im selben fernen Punkte der $R.\ L.$ sich vereinigen

$$\Sigma \frac{\partial X}{\partial x} = -4\sqrt{AB} \frac{1}{UW^3},$$

ein Ausdruck, der aber im Ostpunkte verschwindet. Wir erhalten demnach für den ganzen Raum mit Ausnahme der Focalellipse die Gleichung

$$\frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial z^2} = 0.$$

§. 14. Das Potential T' des elliptischen Ringes ist eine homogene Function ersten Grades der Grössen $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, x, y, z.

In dem Ausdrucke

$$T' = \sqrt{AB} \int \frac{du}{UW} \quad \text{(Weg eine Schlinge)}$$

ersetze man $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, x, y, z resp. durch $\alpha\sqrt{A}$, $\alpha\sqrt{B}$, αx, αy, αz, $\alpha^2 u$ und erhält dadurch

$$T'' = \alpha 2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{UW} = \alpha T'$$

somit ist

$$T' = \sqrt{A}\frac{\partial T'}{\partial\sqrt{A}} + \sqrt{B}\frac{\partial T'}{\partial\sqrt{B}} + x\frac{\partial T'}{\partial x} + y\frac{\partial T'}{\partial y} + z\frac{\partial T'}{\partial z}.$$

Diese Formel kann man auch auf folgende Weise ableiten.

$$\frac{x^2}{A\alpha^2} + \frac{y^2}{B\alpha^2} = 1$$

ist die Gleichung einer Ellipse, welche der gegebenen ähnlich ist, und

$$T = 2\alpha^2\sqrt{AB}\int_t^\infty \frac{du}{U_1 W_1}$$

ist das Potential derselben, wenn t, t', t'' die Wurzeln der Gleichung

$$W_1^2 = 1 - \frac{x^2}{A\alpha^2 + u} - \frac{y^2}{B\alpha^2 + u} - \frac{z^2}{u}$$

und

$$U_1^2 = (A\alpha^2 + u)(B\alpha^2 + u)u.$$

Man ersetze nun u, t, t', t'' resp. durch $\alpha^2 u$, $\alpha^2 t_0$, $\alpha^2 t'_0$, $\alpha^2 t''_0$ und erhält

$$T = 2\alpha^2\sqrt{AB}\int_{t_0}^\infty \frac{du}{UW^1} = \alpha^2\sqrt{AB}\int \frac{du}{UW^1}$$

(Weg eine Schlinge aus dem Ostpunkte um den Pol t_0),

wo nun die t_0, t_0', t_0'' die Wurzeln der Gleichung

$$W'^2 = \alpha^2 - \frac{x^2}{A+u} - \frac{y^2}{B+u} - \frac{z^2}{u}$$

sind. Nun ist bei unveränderter Lage des Bezugspunktes T offenbar eine Function von $\sqrt{A}\alpha$ und $\sqrt{B}\alpha$. Es ist

$$T(\sqrt{A}(\alpha+w), \sqrt{B}(\alpha+w)) = T(\sqrt{A}\alpha, \sqrt{B}\alpha) + w\left(\sqrt{A}\frac{\partial T}{\partial\sqrt{A}\alpha} + \sqrt{B}\frac{\partial T}{\partial\sqrt{B}\alpha}\right) + \cdots$$

also

$$\frac{\partial T}{\partial\alpha} = \sqrt{A}\frac{\partial T}{\partial(\sqrt{A}\alpha)} + \sqrt{B}\frac{\partial T}{\partial(\sqrt{B}\alpha)}$$

und somit

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha}(\text{für } \alpha = 1) = \sqrt{A}\,\frac{\partial T}{\partial \sqrt{A}} + \sqrt{B}\,\frac{\partial T}{\partial \sqrt{B}}.$$

Weil nun

$$\frac{\partial W'}{\partial \alpha} = \frac{\alpha}{W'},$$

so ist

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 2\alpha\sqrt{AB}\int\frac{du}{UW'} - \alpha^3\sqrt{AB}\int\frac{du}{UW'^3}$$

also

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha}(\text{für } \alpha = 1) = \sqrt{A}\,\frac{\partial T'}{\partial \sqrt{A}} + \sqrt{B}\,\frac{\partial T'}{\partial \sqrt{B}}$$

$$= 4\sqrt{AB}\int_t^\infty\frac{du}{UW} - 2\sqrt{AB}\int_t^\infty\frac{du}{UW^3}$$

Ferner erhält man aus den früheren Formeln

$$xX + yY + zZ = 2\sqrt{AB}\int_t^\infty\frac{du}{UW^3} - 2\sqrt{AB}\int_t^\infty\frac{du}{UW},$$

und durch Addition ergibt sich

$$T' = \sqrt{A}\,\frac{\partial T'}{\partial \sqrt{A}} + \sqrt{B}\,\frac{\partial T'}{\partial \sqrt{B}} + xX + yY + zZ.$$

Fortsetzung folgt später.

XX.

Miscellen.

1.

Zur Lehre vom perspectiven Tetraeder.

I.

Wenn die Verbindungsgeraden entsprechender Eckpunkte zweier Tetraeder sich in einem Punkte schneiden, so liegen die Durchschnittsgeraden entsprechender Seiten in einer Ebene, — und umgekehrt. Solche Lage zweier Tetraeder heisst perspectiv.

Die entsprechenden Kanten zweier perspectiven Tetraeder schneiden sich. Der gemeinschaftliche Punkt von Ebenen entsprechende Kanten heisst das Centrum, — die gemeinschaftliche Ebene von Durchschnittspunkten entsprechender Kanten heisst die Ebene der Perspectivität.

Es fragt sich, ob umgekehrt das Schneiden entsprechender Kanten die perspective Lage als eine notwendige Folge nach sich zieht oder nicht?

Es seien A und A', B und B', C und C', D und D' die entsprechenden Eckpunkte, a und a', b und b', c und c', d und d' die entsprechenden Seiten zwer Tetraeder. Die Bezeichnung sei so gewählt, dass z. B. a die gegenüberliegende Seite vom Punkte A sei.

Setzen wir voraus, dass die ensprechenden Kanten sich schneiden.

Wenn die beiden Tetraeder keine gemeinschaftliche Seite besitzen, so liegen die Durchschnittspunkte entsprechender Kanten auf den Durchschniitsgeraden entsprechender Seiten ($\overline{aa'}$, $\overline{bb'}$, $\overline{cc'}$, $\overline{dd'}$). Irgend zwei dieser vier Geraden schneiden sich, da z. B. $\overline{aa'}$ und auch $\overline{bb'}$ durch den gemeinschaftlichen Punkt der beiden entsprechenden Kanten $\overline{CD}$ und $\overline{C'D'}$ hindurchgeht. Aber die vier Geraden haben keinen gemeinschaftlichen Punkt, also müssen sie eine gemeinschaftliche Ebene haben (Ebene der Perspectivität).

Wenn die beiden Tetraeder keinen gemeinschaftlichen Eckpunkt haben, so gehen die Ebenen entsprechender Kanten durch die Verbindungeraden entsprechender Eckpunke ($\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$). Irgend zwei dieser vier Geraden schneiden sich, da z. B. $\overline{AA'}$ und auch $\overline{BB'}$ in der gemeinschaftlichen Ebene der beiden entsprechenden Kanten $\overline{cd}$ und $\overline{c'd'}$ liegt. Aber die vier Geraden haben keine gemeinschaftliche Ebene, also müssen sie einen gemeinschaftlichen Punkt haben (Centrum der Perspectivität).

Wenn die beiden Tetraeder eine gemeinschaftliche Seite (a und a') und darauf einen gemeinschaftlichen Eckpunkt (B und B') haben dann gilt folgendes.

Wenn b und b' nicht identisch sind, so liegen die Durchschnittspunkte darin liegenden entsprechender Kanten auf der Geraden $\overline{bb}$. Also ist die Ebene, welche durch die Gerade $\overline{bb'}$ und den Punkt B (B') hindurchgeht, Ebene der Perspectivität.

Wenn A und A' nicht identisch sind, so gehen die Ebenen der durch sie gehenden entsprechenden Kanten durch die Gerade $\overline{AA'}$ hindurch. Also ist der Punkt, in welchem die Gerade $\overline{AA'}$ die Ebene a (a') trifft, Centrum der Perspectivität.

Wenn aber a und a', b und b' gemeinschaftliche Seiten, A und A', B und B' gemeinschaftliche Eckpunkte sind, so ist

jede Ebene, welche durch die Grenze AB ($A'B'$) hindurchgeht, eine Ebene der Perspectivität.

jeder Punkt, welcher auf der Geraden $\overline{ab}$ ($\overline{a'b'}$) liegt, ein Centrum der Perspectivität.

Ein einziger Fall blieb noch übrig, wo die beiden Tetraeder eine Seite (a und a') und den gegenüberliegenden Eckpunkt (A und A') gemeinschaftlich haben ohne irgend ein gemeinschaftliches anderes Element zu besitzen. Dann schneiden sich die entsprechenden Kanten, aber die perspective Lage ist nur dann vorhanden, wenn

die beiden Dreiecke in der gemeinschaftlichen Seite perspectiv sind. | die beiden Dreikante um den gemeinschaftlichen Eckpunkt perspectiv sind.

Also mit der einzigen Ausnahme, wo die beiden Tetraeder bloss eine Seite und den gegenüberliegenden Eckpunkt gemeinschaftlich haben, ist die Perspectivität eine notwendige Folge des Schneidens entsprechender Kanten.

II.

Sehen wir nach, ob zwei Tetraeder nicht in mehrfach perspectiver Lage sein können, je nachdem man das gegenseitige Entsprechen der Eckpunkte anders ordnet?

Wir wollen den Fall ausschliessen, wo irgend eine Seite des zweiten Tetraeders durch eine Kante des ersten hindurchgeht. Bei passend gewähltem Coordinatensystem sind dann die Gleichungen der Seiten

$$\begin{array}{llll} a: & x=0, & a': & \lambda x+y+z+t=0 \\ b: & y=0, & b': & x+\mu y+z+t=0 \\ c: & z=0, & c': & x+y+\nu z+t=0 \\ d: & t=0, & d': & x+y+z+\varrho t=0 \end{array}$$

die Ebene der Perspectivität:

$$x+y+z+t=0$$

die Coordinaten des Centrums:

$$\frac{1}{\lambda-1},\quad \frac{1}{\mu-1},\quad \frac{1}{\nu-1},\quad \frac{1}{\varrho-1}.$$

Das Entsprechen der Seiten können wir durch das Symbol $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$ ausdrücken.

Die Symbole der sämtlichen denkbaren Perspectivitäten können hieraus durch Permutation der unteren Reihe abgeleitet werden. Die Grundformen der dazu nötigen Substitutionen sind:

$$\begin{gathered} (a')(b')(c',\ d') \\ (a')(b',\ c',\ d') \\ (a',\ b',\ c',\ d') \\ (a',\ b')(c',\ d') \end{gathered}$$

Setzen wir nach einander, welche unter diesen zu möglichen Perspectivtiäten führen?

1. Zur $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & d' & c' \end{pmatrix}$ - Perspectivität wäre es nötig, dass unter anderen die Geraden $\overline{ac}$, $\overline{a'd'}$ und $\overline{ad}$, $\overline{a'c'}$ sich schneiden. Dies führt zu den Bedingungen:

$$\varrho = 1, \quad \nu = 1,$$

also müssten die Seiten c', d' zusammenfallen.

2. Zur $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & c' & d' & b' \end{pmatrix}$ - Perspectivität wäre es nötig, dass unter anderen die Geraden $\overline{ab}$, $\overline{a'c'}$ und $\overline{ac}$, $\overline{a'd'}$ sich schneiden. Dann wäre aber

$$\nu = 1, \quad \varrho = 1,$$

also wären c' und d' identisch.

3. Zur $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b' & c' & d' & a' \end{pmatrix}$ - Perspectivität müssten unter anderen die Geraden $\overline{ab}$. $\overline{b'c'}$ und $\overline{cd}$, $\overline{d'a'}$ sich schneiden, also

$$\nu = 1, \quad \lambda = 1$$

sein, dann aber würden a' und c' zusammenfallen.

4. Zur $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b' & a' & d' & c' \end{pmatrix}$ - Perspectivität ist es nötig, dass die Geraden $\overline{ac}$, $\overline{b'd'}$, !— $\overline{ad}$, $\overline{b'c'}$, $\overline{bc}$, $\overline{a'd'}$, — $\overline{bd}$, $\overline{a'c'}$ sich schneiden. Es müssen also

$$\lambda = \mu = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\varrho}$$

sein. Die $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c' & d' & a' & b' \end{pmatrix}$ - Perspectivität ist auch vorhanden, wenn zugleich

$$\lambda = \frac{1}{\mu} = \nu = \frac{1}{\varrho}$$

Bei einem wahren Tetraeder ist sie nur möglich, wenn

$$\lambda = \mu = \nu = \varrho = -1$$

ist. Dann ist aber auch die $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d' & c' & b' & a' \end{pmatrix}$ - Perspectivität vorhanden, die Perspectivität ist also eine vierfache.

Die bisherigen zusammengefasst:

1. Eine zweifache Perspectivität ist vorhanden, wenn unter den Grössen λ, μ, ν, ϱ zwei und zwei gleich, und die ungleichen die reciproken von einander sind.

2. eine vierfache Perspectitität ist vorhanden, wenn

$$\lambda = \mu = \nu = \varrho = -1$$

sind.

Sehen wir diesen letzten Fall etwas näher an.

$$\begin{array}{llll} a: & x = 0 & a': & -x+y+z+t = 0 \\ b: & y = 0 & b': & x-y+z+t = 0 \\ c: & z = 0 & c': & x+y-z+t = 0 \\ d: & t = 0 & d': & x+y+z-t = 0 \end{array}$$

die Ebene von $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{pmatrix}$ - Perspectivität: $x+y+z+t = 0$

" " " $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b' & a' & d' & c' \end{pmatrix}$ " $x+y-z-t = 0$

" " " $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c' & d' & a' & b' \end{pmatrix}$ " $x-y+z-t = 0$

" " " $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d' & c' & b' & a' \end{pmatrix}$ " $x-y-z+t = 0$

Die Centra der Perspectivität sind, wie man sich leicht überzeugt, die Eckpunkte des durch die vier letzten Ebenen gebildeten Tetraeders und zwar so, dass jeder Eckpunkt zur gegenüberliegenden Seite als Centrum gehört.

Wenn man $-x$ statt x schreibt, so gehen die Gleichungen der Seiten des zweiten Tetraeders in die des dritten über, und umgekehrt. Ein Merkmal dafür, dass die drei Tetraeder ein System bilden, worin je zwei in vierfacher Perspectivität, die Eckpunkte des dritten die zugehörigen Centra sind, ist: die Seiten sind die zugehörigen Ebenen der Perspectivität. Ein solches System von drei Tetraedern hat Stephanos ein desmisches genannt *).

Beiläufig bemerkt, schon bei der zweifachen Perspectivität besteht der Satz, dass das Centrum der einen Perspectivität auf der Ebene der anderen liegt. Wovon der obige Satz über die Centra und Ebenen der vierfachen Perspectivität eine einfache Folge ist.

Klausenburg, December 1885.

J. Vályi.

---

*) Stephanos. Sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres. Darboux, Bulletin des sciences math. et astr. 2e série t. III. 1879.

2.

Ein einfacher Beweis für die Erhaltung des Doppelverhältnisses von 4 Punkten der Ebene bei linearer Abbildung.

Der für Geometrie und Functionentheorie wichtige Satz von der Erhaltung des Doppelverhältnisses von 4 Punkten einer Gaussischen z-Ebene bei Abbildung durch die Substitution:

$$x = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}$$

wird sowol im Zusammenhange mit functionentheoretischen Betrachtungen (vergl. etwa Bobek Einleit. in die Theor. ell. Func- pag. 13), als auch bei geometrischer Ableitung (vergl. 6te Auflage von Salmon's Cónic sections art. 331) in einer künstlichen Weise behandelt, indem besondere Determinantensätze zu Hilfe genommen werden — so dass die so einfache Natur des Satzes nicht klar hervortritt.

Jener Satz lässt aber eine ganz directe Ableitung zu, die ihn geradezu als die Aussprache einer selbstverständlichen Identität erscheinen lässt.

Die Abbildung

$$x = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}$$

enthält 3 wesentliche Constanten $\alpha:\beta:\gamma:\delta$; demnach ist sie bestimmt sobald zweimal 3 beiderseitig entsprechende Punkte vorgegeben sind; oder: „Ist eine lineare Abbildung als solche zu erkennen, dass sie den drei Punkten

$$x = a_1 a_2 a_3$$

drei Punkte

$$z = b_1 b_2 b_3$$

zuordnet, so ist sie auch jene einzige Abbildung, welche durch die zweimal 3 Punkte bestimmt ist".

Es sei nun vorausgesetzt, dass 2mal 4 Punkte durch dieselbe lineare Abbildung zugeordnet seien:

$$x = a_1 a_2 a_3 a_4$$

zu

$$z = b_1 b_2 b_3 b_4.$$

Wir behaupten: „Die die 4 Punkte verbindende Abbildung ist ohne weiteres identisch mit

A $$\frac{x-a_1}{x-a_2}=\left(\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}\cdot\frac{b_3-b_2}{b_3-b_1}\right)\cdot\frac{z-b_1}{z-b_2}$$

Zum Beweise genügt es sich die Paare entsprechender Punkte $a_1 b_1$ oder $a_2 b_2$, oder $a_3 b_3$ eingesetzt zu denken in A; immer ist die Gleichung identisch erfüllt.

Hiermit ist nun schon der zu beweisende Satz sichtbar geworden.

Schreiben wir abkürzend:

$$\varrho \text{ für } \frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}\cdot\frac{b_3-b_2}{b_3-b_1},$$

so erhalten wir:

A . . . . $$\frac{x-a_1}{x-a_2}=\varrho\,\frac{z-b_1}{z-b_2};$$

nach der Voraussetzung gehört aber $a_4 b_4$ derselben linearen Abbildung als Punktepaar an; daher ist

B . . . . $$\frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}=\varrho\left(\frac{b_4-b_1}{b_4-b_2}\right)$$

Dividiren vir B durch die Identität

$$\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}=\varrho\,\frac{b_3-b_1}{b_3-b_2},$$

so erhalten wir

$$\frac{a_4-a_1}{a_4-a_2}:\frac{a_3-a_1}{a_3-a_2}=\frac{b_4-b_1}{b_4-b_2}:\frac{b_3-b_1}{b_3-b_2},$$

was zu beweisen war.

München, März 1886.

Fritz Hofmann.

3.

Construction einer näherungsweisen Rectification eines Kreises.

Bekanntlich kann aus dem Ausdrucke $\frac{7}{10^7}+\frac{13\sqrt{146}}{50}$ die Zahl π auf 9 Decimalen genau berechnet werden.

Wird $\frac{7}{10^7}$ vernachlässigt, so ist der genäherte Wert von

$$\pi = \frac{13}{50}\sqrt{146} = 3 \cdot 14159$$

(5 Decimalen genau).

Mit Hilfe folgender Proportion kann nun 2π construirt werden:

$$\pi : 13 = \sqrt{146} : 50$$

oder da

$$\sqrt{146} = \sqrt{11^2 + 5^2}$$

$$\pi : 13 = \sqrt{11^2 + 5^2} : 50$$

oder

$$2\pi : 13 = \sqrt{11^2 + 5^2} : 25$$

Damit jedoch 13 und 25 Einzelheiten in der Figur nicht aufgetragen werden müssen, kann die Proportion auch geschrieben werden:

$$2\pi : \frac{13}{4} = \sqrt{11^2 + 5^2} : \frac{25}{4}$$

also:

$$2\pi : 3\frac{1}{4} = \sqrt{11^2 + 5^2} : 6\frac{1}{4}.$$

Eisenstadt am 10. Febr. 1886.

Moriz Ferdinand Bretschneider.

Litterarischer Bericht

IX.

Methode und Principien.

Substantielle Wesenheit des Raumes und der Kraft. Motive für die nothwendige Umgestaltung der gegenwärtig zur wissenschaftlichen Erklärung der Naturerscheinungen dienenden Grundlagen. Von Josef Schlesinger, o. ö. Professor an der k. k. Hochschule für Bodencultur in Wien. Wien 1885. Alfred Hölder. 52 S.

Die Lehren, mit welchen der Verfasser hier gegen die bestehenden wissenschaftlichen Principien auftritt, sind folgende: der Satz von der Massenträgheit ist ein Irrtum. Raum und Kraft existiren substantiell. Letztere 2 Annahmen erklären alles, was bei den gewöhnlichen Hypothesen unerklärt bleibt. Den mathematischen Deductionen in der Physik schreibt der Verfasser unveränderte Geltung zu, diese seien aber auch auf veränderter Basis möglich. Es war nun zur Begründung erst nachzuweisen, dass die physikalischen Hypothesen unzureichend seien, dann dass die substituirte Annahme alles zu erklären vermöge. Zum Beleg für ersteres werden Beispiele gegeben, wie etwa die Frage, warum die grössere Masse eine grössere Kraft zur Bewegung erfordere, und ähnliche, wo man schwerlich begreift, was dem Verfasser daran undeutlich geblieben sein kann. Kommt man aber weiter, wo es sich um seine Erklärung handelt, wieder auf solche Desiderata, so tritt uns eine Logik entgegen, die uns wol der ferneren Verfolgung seiner Aufstellungen überhebt. Er nennt es einen Umstand von höchster Bedeutsamkeit, dass eine Kraft nicht gleich der absoluten Summe ihrer Componenten ist. Dieser wunderbare Umstand soll erklärt werden. Indem er den Grund in „gepaarten Kräfteteilchen", d. h. solchen die sich aufheben, sucht, möchte er noch leidlich auf rechtem Wege sein. Aber diese gepaar-

ten Kräfteteilchen sollen extra im Raume schweben, und durch ihr Hinzutreten soll die Ausgleichung stattfinden; also eine Addition von Nullen soll Ungleiches gleich machen! Bei allen angeführten Erklärungen handelt es sich nur um die Möglichkeit, nie um die Notwendigkeit der Erscheinung. Bezeichnend ist die Aeusserung: welch reiches Feld sich der Naturforschung erschlösse, wenn sie die Raumsubstanz von allerhand Kraftsubstanz durchdrungen dächte, derart dass jedes lebende Wesen mit einer Atmosphäre von Kraftstrahlen umgeben wäre und mittelst derselben in die Ferne wirken könnte. Deutet schon diese Stelle auf eine Tendenz zum Spiritismus, so spricht sich dieselbe auch sonst wiederholt aus. Auch erklärt sich der Verfasser offen zugunsten des Spiritismus. Man kann daher den ganzen Vortrag, welchen die vorliegende Schrift reproducirt, als eine der Verbreitung desselben gewidmete Rede ansehen. Hoppe.

Die Elemente der höheren Analysis ohne Benutzung unendlich kleiner Grössen neu dargestellt und mit Anwendungen auf Geometrie und Mechanik versehen von Oberlehrer Dr. L. Huebner. Schweidnitz 1885. 4°. 52 S.

Die Schrift beginnt mit sovielen unrichtigen Aufstellungen, dass kein verständlicher Gedankeninhalt übrig bleibt. Der Verfasser behauptet, eine Function zweier Variabeln lasse sich nur auf eine Weise in der Form

$$F(p,q) = c + f(p) + \varphi(q) + v(p,q)$$

zerlegen. Bedingung der 4 Teile soll sein, dass sich von $f(p)$ und $\varphi(q)$ keine Constante, von $v(p,q)$ keine Function von p oder q allein, absondern lasse. Was kann uns hindern, von $f(p)$ die Constante a u. s. w. abzusondern? Die Bedingung ist daher überhaupt unerfüllbar. Zum Beweise, dass die Zerlegung nur auf eine Weise möglich sei wird erst der Satz aufgestellt: aus der Gleichung

$$c + f(p) + \varphi(q) + v(p,q) = 0$$

folge $c = 0$; $f(p) = 0$; $\varphi(q) = 0$; $v(p,q) = 0$, und der Beweis hierfür beginnt mit dem Fehlschluss: $f(p) + v(p,q)$ habe unendlich viele Werte, weil die 3 Terme einzeln unendlich viele Werte haben. Die Gleichung selbst sagt das Gegenteil. Noch könnte man annehmen, es sei nur verfehlter Ausdruck an der Unklarheit schuld. Doch die Unklarheit hebt sich auch im Folgenden nicht: es geht so weiter bis ans Ende. Hoppe.

Analytische Betrachtungen über die Raumformen, in welchen das Kongruenzaxiom gilt. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doctorwürde der hohen philosophischen Facultät der Georg-Augusts-

Universität zu Göttingen vorgelegt von Carl Quensen aus Gandersheim. (Braunschweig 1885. Goeritz u. zu Putlitz) 48 S.

Die Schrift beginnt mit einem historischen Rückblick auf die Entstehung der nichteuklidischen Geometrie aus der Untersuchung der Abhängigkeit der Axiome der Geometrie, worin der Anteil an der Gestaltung von Gauss, Bolyai, Lobatschewsky, Riemann, Schering und De Tilly dargelegt, die Gegenstände, um die es sich handelt, charakterisirt, und die Grundformeln aufgestellt werden, von denen der Verfasser dann selbst Gebrauch macht. Nach dieser Einleitung geht sie sofort an die Lösung der folgenden Aufgaben durch Rechnung, indem sie die vorgefundenen Formeln als ausreichende Basis betrachtet: Die Linienelemente und die Raumformen; die analytische Geometrie der Geraden; Curven 2. Ordnung, Kreis, Gleichungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel, Tangenten an diese, räumliche Bedeutung der allgemeinen Gleichung 2. Grades und Durchschnitt von Ebenen und Kegelflächen; Inhalt von Flächen und Körpern, nämlich von Ellipse, Hyperbel und Parabel, Kugel, geradem Kegel, Prismen, deren eine Begrenzung eine Fläche gleichen Abstandes ist, senkrechtem Kreiscylinder und Würfel. Die Frage nach den Principien berührt der Verfasser in keinem Punkte. Dass dieselben in der Einleitung bereits festgestellt seien, kann er doch gewiss nicht gemeint haben. Die Angaben sind nur eben genügend um die Gegenstände für diejenigen, welche die Quellen gelesen haben, kenntlich zu machen. Da namentlich viele Termini der euklidischen Geometrie, nicht einmal in erweitertem, auf Grund derselben exact bestimmten, sondern durch Weglassung von Merkmalen teilweise unbestimmt gelassenem Sinne, jedenfalls so, dass sich die Bedeutung nicht deckt, gebraucht werden, so hätte man doch von einer Schrift, die so elementare, an die Fundamente grenzende Gegenstände bearbeitet, erwarten dürfen, dass sie über ihre Begriffe ausreichende Rechenschaft geben würde, schon um dem Verdachte zu entgehen, dass der Verfasser ohne eigenes Verständniss sich auf die Einsicht seiner Richter verlässt. Der so erregte Zweifel gibt Anlass eine auffällige Aeusserung auf erster Seite zu erwähnen, die sonst wohl als ein Versehen ohne Belang erschienen wäre. Hier sagt der Verfasser (als Entdeckung von Gauss): „Wenn man voraussetze, die Summe der innern Winkel zweier Parallelen mit einer schneidenden Geraden sei $< 2R$, so folge auch eine in sich widerspruchsfreie Geometrie." Wie will derselbe den Vordersatz zu einem exacten Ausdruck eines Gedankens vervollständigen?

Die gegenwärtige Arbeit ist nicht die erste, welche die vorgefundenen Grundformeln ohne Erklärung zur Lösung von Aufgaben durch Rechnung benutzt; um so berechtigter ist wol der Wunsch

dass Untersuchungen dieser Art in directer Verbindung mit ihren Hypothesen und Principien geführt, und in Angaben des Wortsinns nicht eine desto grössere Sparsamkeit beobachtet werden möge, je weniger derselbe aus der Anschauung erhellen kann. Das in dieser Sache bisher befolgte Verfahren lässt unvermerkt soviel Fragen übrig, dass eine Beurteilung der Leistung kaum möglich wird.

Hoppe.

Critische und nicht critische Versuche. I. Erdachsen im Verhältnis zum Werden und Vergehen. Von Egmont. Mit einer lithographischen Skizze. Danzig 1885. Franz Axt. 22 S.

Die Schrift besteht aus den mannichfaltigsten Naturbetrachtungen' die sich zum grossen Teil auf unaufgeklärte Fragen beziehen, aber auch bekannte Doctrin populär mitteilen. Die Auswahl der besprochenen Themata ist bunt, in der Reihenfolge aber gibt sich der kosmogonetische Gesichtspunkt zu erkennen; sie geht von der Entstehung der Himmelskörper aus und schreitet zu den Veränderungen der Erde, zu der Pflanzen- und Tierwelt fort. Eigentümlich ist an den Ansichten des Verfassers, dass er der Veränderung der Erdaxe einen grossen Einfluss auf die Naturentwickelung zuschreibt, ferner dass er alle Anziehung, Gravitation wie Chemismus, für Magnetismus, alle dualistisch auftretenden Erscheinungen, z. B. die Geschlechter der Pflanzen und Tiere, für Elektricität erklärt. Hoppe.

Die geometrische Konstruktionsaufgabe. Von Dr. R. von Fischer-Benzon, Oberlehrer am Gymnasium zu Kiel. Mit einer lithographirten Tafel. Kiel 1884. G. von Maack. 4⁰. 31 S.

Der Gegenstand der Schrift ist die Frage: Wie kann man den Schülern Methoden geben, durch welche sie befähigt werden die Lösung von Constructionsaufgaben selbst zu finden. Die Behandlungsweise der Frage ist die Kritik dessen, was bereits zu ihrer Lösung in frühern Schriften geschehen ist. Hier liegt zunächst ein Buch von H. von Holleben und P. Gerwien „Geometrische Analysis" vor. Darin werden 5 Arten von Analysis unterschieden, nämlich Analysis durch Lehrsätze, durch Oerter, durch Data (d. h. vermöge der gegebenen zugleich bekannte Stücke), durch Reduction und zusammengesetzte Analysis. Der Verfasser lässt nur die zweite Art gelten und erklärt die Unterscheidung für nicht haltbar. Da jede der Arten ein Hülfsmittel angibt, und mehr als Hülfsmittel überhaupt nicht gegeben werden kann, so ist der Grund der Verwerfung nicht wol zu ersehen. Es werden nun noch verschiedene Aufgabensammlungen und Schriften über Aufgaben von Schwarz, Hoffmann, Reidt, Wöckel, Gandtner und

Junghans gemustert, insbesondere über die Einteilung der Aufgaben nach den Lehrsätzen, zu deren Einübung sie bestimmt sind, nach den Figuren, auf die sie sich beziehen, nach Gruppen von ähnlicher Lösung besprochen, zuletzt ein wesentlicher Fortschritt allein dem Werke von Julius Petersen zuerkannt, dessen Einfluss seit einigen Jahren immer deutlicher zutage trete, und durch welches ein ganz neues Leben in die Behandlung der Constructionsaufgaben gebracht sei. Im übrigen Teile der Schrift entwickelt der Verfasser die Ergebnisse seines Studiums des genannten Werkes, die er zu einer systematisch geordneten Theorie gestaltet hat. Deren Hauptabschnitte sind: Methode der Verschiebung und Drehung und Methode der Umformung; erstere enthält wieder: die Parallelverschiebung, die Drehung, die perspectivische Verschiebung und Drehung. Hoppe.

Der Raum und seine Erfüllung. Eine Abhandlung zur Licht- und Wärmelehre. Von Professor K. Hullmann. Berlin 1884. Weidmann. 60 S.

Der Verfasser will in dieser Abhandlung die Ansichten darlegen, welche er sich über die Materie und ihre Eigenschaften gebildet hat, und will damit den Standpunkt angeben, von welchem aus er die Erscheinungen in der Natur als Ausflüsse einer einzigen Kraft betrachtet. Man findet in ihr einen Versuch alle Erscheinungen auf Grund neuer Hypothesen mechanisch zu erklären. Diesen motivirt der Verfasser dadurch, dass er die Ansicht von Clausius über die Constitution der Gase nicht teilen könne, welche nach dessen eigener Erklärung mit seiner Wärmetheorie nicht zusammenfalle. Dann hätte er jedoch diejenige Erscheinung, welche Clausius als Beweis seiner Ansicht betrachtet, nicht übergehen dürfen. Die in der Schrift ausgesprochenen methodischen Grundsätze sind teils selbstverständlich, teils, wenn wirklich abweichende aufgetreten sind, zu billigen. Die Erfahrung wird viel betont, ohne dass jedoch eine Beobachtung vorkäme. Die aufgestellten Sätze werden analytisch hergeleitet; nur beschränken sich die Berechnungen auf sehr einfache Fälle, so dass eine Theorie daraus nicht hervorgehen kann; es wäre dies auch eine Leistung, die man von einem so kleinen Buche nicht verlangen kann. Wenn aber der Verfasser wirklich glaubte auf diesem Wege eine umfassende Theorie schaffen oder anbahnen zu können, so hätte er auch einen Einblick geben sollen, wie es möglich wäre. Der Anfang handelt von Begriff und Wesen des Raumes. Der Raum ist stetig erfüllt. Ueber die ihn erfüllende Materie werden folgende Hypothesen aufgestellt: Sie ist teils Körper, teils Aether. Jedes Körperelement zieht jedes andre und jedes Aetherelement nach Newton'schen Gesetze an, jedes Aetherelement stösst beide ab. Hiermit ist offenbar das erste Gesetz

der Mechanik: Wirkung und Gegenwirkung sind gleich — umgeworfen. Ein Körper- und ein Aetherelement jagen vermöge gegenseitiger Einwirkung hinter einander her und können dabei noch eine Arbeit verrichten. In andern Fällen hat der Verfasser es deutlich erklärt, wo er von gewöhnlichen Annahmen abweicht. Bei dieser Verletzung eines Grundgesetzes scheint er sich gar keiner Abweichung bewusst gewesen zu sein. Fragt man nun, wie es zugehe, dass bei so vielen Rechnungen der Fehler nicht durch seine Consequenzen an den Tag kommt, so sieht man bald, dass letztere stets durch Annahmen beseitigt sind. Man soll sich vorstellen, dass sich jedes Körperteilchen mit einer Hülle verdichteten Aethers umgibt. Letzterer wird von ersterem angezogen, stösst zwar selbst das Körperchen ab, aber von allen Seiten gleich, und die Abstossung hebt sich auf. Der Verfasser beweist analytisch, dass der Gesamtdruck des Aethers auf einen Punkt constant sei. Wovon sollte er auch abhangen, da nichts variabeles genannt ist? Er nimmt dabei gleichmässige Dichte des Aethers an und hebt damit das Einzige auf, was dem Satze einen Gedankeninhalt geben könnte. Ueberdies widerspricht die Annahme der vorhergehenden. Bei einem solchen Verfahren lässt sich nicht erwarten, dass die Wärme- und Lichttheorie, wie wir sie besitzen, gefördert sein könnte, und es hat kaum Interesse das Weitere zu verfolgen. Die gegenwärtigen Einführungen zeigen einige Aehnlichkeit mit Redtenbacher's Dynamidensystem, doch ist letzteres weit klarer durchdacht Hoppe.

Die Algebra in natürlicher Herleitung. I. Jahres-Cursus als Leitfaden zum Unterricht in der 5. Lateinklasse. Von Aug. Moroff, k. Studienlehrer. Programm der Kgl. Bayer. Studien-Anstalt Landshut für das Studienjahr 1883/84. 48 S.

Die Unterrichtsmethode wird als feststehende Doctrin in concinner, logisch wissenschaftlicher Sprache vorgetragen, und eine grössere Anzahl Erläuterungs- und Uebungsbeispiele sehr mannichfältiger Art dazu gegeben. Die Themata sind: Die Einführung der allgemeinen Zahlen, das Auf- und Abzählen in der nach unten und oben unbegrenzt vorausgesetzten Zahlenreihe, Operationszeichen und Qualitätszeichen, Reductionen und Gegenreductionen, Division und Uebergang zur allgemeinen Bruchreihe. Wenn die kategorische Hinstellung einer Methode, die zwar recht reiflich durchdacht sein mag, doch Motivirung in manchen Punkten erwarten liess, so kann wol die Verteidigung im Schlusswort am wenigsten Befriedigung gewähren; denn diese ist mit Uebergehung aller Verständigung so zelotisch gehalten, dass der Leser kaum daraus entnehmen kann, um

welche Frage es sich handelt; sie scheint bloss für einen besondern, dem Verfasser bekannten Kreis von Schulmännern bestimmt zu sein.
Hoppe.

Grammatische Regeln zur leichten und sicheren Lösung der einfachen und zusammengesetzten Regeldetrie, der Prozent-, Zins-, Rabatt-, Diskonto- und Tara-Rechnung. Von P. B. Richter, Mathematiker. Halle a. S. 1883. H. W. Schmidt. 21 S.

Die hier vorausgesetzte Methode ist die der Zerlegung jeder Aufgabe in eine Succession von Fragen, Uebergang von der gegebenen Zahl zur Einheit, von dieser zur verlangten Zahl. Die Fragen sind in allen diesen Rechnungsarten immer wiederkehrend dieselben, die Schlüsse einfach und nicht leicht zu verfehlen. Das Gemeinsame soll bei der Behandlung nicht verhüllt werden. Was noch besonders zu beachten ist, stellt die kleine Schrift in Regeln zusammen,
H.

Wie studirt man Mathematik und Physik? Von einem Lehrer der Mathematik. Leipzig 1885. Rossberg. 32 S.

Dieser Ratgeber beschränkt sich erklärtermassen auf den Fall wo das examen pro facultate docendi Ziel des Studiums ist. Der erste und grössere Teil der Schrift ist allgemeiner Natur; es wird nur in der Ausübung der Pflichten, die keinem Studenten unbekannt sind. grösserer Ernst und Genauigkeit beim Studium der Mathematik und Physik für notwendig erachtet als bei andern Fächern. Weiterhin aber wird sachliche Auskunft erteilt über Bildungsmittel, Einrichtungen, Anforderungen, Verordnungen u. s. w. und über einen zweckmässigen Studienplan speciell Rat gegeben. Im Anhang sind die von den Professoren der Mathematik an der Universität Leipzig veröffentlichten „Bemerkungen über die mathematischen Vorlesungen“ zum Abdruck gebracht.
H.

Quadratura circuli demonstrata. Von F. Girhn. Mit 8 lithographischen Tafeln. Würzburg, Wien 1885. Leo Woerl. 22 S.

Es wird zuerst die Construction einer geraden Strecke durchweg verständlich und nicht miszudeuten, angegeben, welche nach Behauptung des Verfassers dem Quadranten des gegebenen Kreises genau gleich sein soll. Sie erfordert ziemlich viele Hülfslinien, ergibt aber, wenn man die Rechnung anstellt, schon Abweichung in zweiter Bruchstelle, ist also auch approximativ von keiner Anwendung. Bei der

Figurbeschreibung erklärt der Verfasser irrtümlich zwei Gerade für parallel; doch kann dieser Fehler schwerlich den Irrtum des Resultats erklären. Die zum Beweise geführte Rechnung gibt noch weniger Aufschluss Sie geht von der Voraussetzung einer sehr complicirten π enthaltenden Formel aus, von welcher der Verfasser nicht sagt, wie er dazu kommt. Die weitere Controle würde wol nicht lohnen.

Hoppe.

Sammlungen.

Compositions d'analyse et de mécanique données depuis 1869 à la Sorbonne pour la licence ès sciences mathématiques, suivies d'exercices sur les variables imaginaires. Par E. Villié, Ancien Ingénieur des Mines, Docteur ès Sciences, Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille. Enoncés et solutions. Paris 1885. Gauthier-Villars. 347 S.

Durch Zusammenstellung und Ordnung von Examenarbeiten erhalten wir hier eine reiche Sammlung der interessantesten Aufgaben aus der höhern Analysis, sämtlich mit ausführlicher Lösung, so ausgewählt, dass die Rechnung nie zu ausgedehnt, umständlich oder complicirt ausfällt. Die einzelnen Gebiete, denen die Aufgaben angehören, und nach denen sie geordnet sind, teilen sich zunächst in Analysis (mit Einschluss der Geometrie) und Mechanik, und sind: Quadraturen, Differentialgleichungen, partielle, totale, orthogonale Linien- und Flächensysteme, Krümmungsradien und Krümmungslinien, asymptotische und geodätische Linien, demnächst vermischte Aufgaben, dann: imaginäre Variable und elliptische Functionen; ferner Kinematik, Bewegung eines freien Punkts, eines Punkts auf fester Curve, auf einer Fläche, auf festem Körper, Dynamik der Systeme. Im Anhang werden die den Facultäten von Paris und Frankreich gegebenen Themata für Arbeiten aus der Astronomie aufgeführt.

H.

Mechanik.

Taschenbuch der Mechanik. (Phoronomie, Statik und Dynamik). Zum Gebrauche für den Unterricht und als Hülfsbuch für die Anwendungen der Mechanik. Bearbeitet von Dr. W. Ligowski, Pro-

fessor, Lehrer der Mathematik und nautischen Astronomie an der Kaiserlichen Marine-Akademie und Schule in Kiel. Mit vielen Holzschnitten. Zweite, vermehrte und verbesserte Auflage. Berlin 1884. Ernst u. Korn. 135 S.

Dieses ebenso wie das früher erschienene Taschenbuch der Mathematik ist mit besonderer Rücksicht auf die Zuhörer des Verfassers bearbeitet. Doch tritt darin ein sehr merklicher Unterschied hervor. Jenes ist eine Sammlung von Tabellen und Formeln, die sich durch die Art der Zusammenstellung auch zum Leitfaden eignet; dieses hingegen mehr ein Leitfaden verbunden mit einer reichhaltigen Formelsammlung. Die neue Auflage hat bei den in der Praxis in Anwendung kommenden Abschnitten vielfache Erweiterungen erhalten. Für technische Anwendungen empfiehlt der Verfasser als Ergänzung das im selben Verlage 1877 erschienene Taschenbuch der Festigkeitslehre von A. Kurz.

Das gegenwärtige kurz gefasste Lehrbuch, wie wir es nennen können, charakterisirt sich durch Gründlichkeit. Es geht nicht von der Perspective des Technikers aus, sondern entwickelt sofort die allgemeine wissenschaftliche Theorie in exacter Aufstellung, um erst nach deren erschöpfender Behandlung sich mehr der praktischen Seite zuzuwenden. Der Lehrgang ist der synthetische, vom einfachen zur höhern Mannichfaltigkeit fortschreitend. Die Hauptteile sind: Die Bewegung als Erscheinung (Phoronomie), die Statik, die Dynamik. Am Schlusse des ersten sind, bezüglich auf die ganze Mechanik, die zum Teil auf Erfahrung, zum Teil auf Einführung oder Consequenz beruhenden Grundgesetze nebst Definitionen, an Zahl 27 zusammengestellt. Der zweite gibt nach den Principien die Behandlung sehr verschiedenartiger Themata, zuletzt die Theorie der einfachen Maschinen. Der dritte behandelt die gewöhnlichen Aufgaben: Dynamik der Punkte, der Massensysteme, Trägheitsaxen, dann den Stoss, die Drehung um feste Axe, Bewegung eines freien festen Körpers, Anziehung und Potential. Dann folgen einige numerische Angaben.

H.

Einleitung in die Hydrodynamik. Von Horace Lamb, Professor an der Universität Adelaide. Mit Autorisation des Verfassers übersetzt und bearbeitet von Dr. Richard Reiff, Privatdocent in Tübingen. Freiburg i. Br. und Tübingen 1884. J. C. B. Mohr. 332 S.

Der Titel des Originalwerks ist: „A Treatise on Fluid Motion". Er bezeichnet den Inhalt zutreffender als das Wort Einleitung.

das Buch, ohne vorbereitende Teile, unmittelbar die Principien der Hydrodynamik in Angriff nimmt und zu einer gewissen Vollständigkeit bringt. Der Uebersetzer hat einige Capitel hinzugefügt, sonst keine wesentliche Aenderung vorgenommen. Innere Reibung ist von Anfang ausgeschlossen, dagegen variabele Dichte berücksichtigt. Die successiven Themata sind: Die Bewegungsgleichungen, ihre Integration in besondern Fällen, die relative Bewegung der Teilchen, Potentialbewegung, Bewegung der Flüssigkeit nach 2 Dimensionen, Bewegung fester Körper in einer Flüssigkeit, Wirbelbewegung, Wellenbewegung in incompressibler Flüssigkeit, Wellen in der Luft, innere Reibung. H.

Technik.

Sammlung geometrischer Instrumente, deren Zweck, Construction und Gebrauch. Als Beigabe zum Kalender für Messkunde, herausgegeben von Max Clouth, Geometer. Trier 1884. Selbstverlag. 1. Heft. 180 S.

Die ganze Sammlung enthält die Abbildungen von 43 Theodoliten, 56 Nivellirinstrumenten, 8 Bonssolen, 15 Messtischen und Kippregeln, 15 Markscheiderinstrumenten, 10 hydrometrischen Instrumenten, 10 Luftdruck-Höhenmessern, 9 Pantographen, 4 Transporteuren, 15 Flächenberechnungsinstrumenten. Zu besserer Uebersicht sind diese Abbildungen mit kurzen Notizen über Dimensionen und Eigentümlichkeiten nach Angabe der Mechaniker vorangestellt; dann folgt der Text, betreffend die Teile und ihre Aufstellung, nebst den zugehörigen Durchschnitts- und Detail-Abbildungen. H.

Repetitorium der Mathematik und Elektricitäts-Lehre. Für die Bedürfnisse der Eisenbahn-Praxis elementar behandelt von J. Krämer, Ingenieur, Docent für Elektrotechnik am höheren Curse der Fortbildungsschule für Eisenbahn-Beamte. Mit 127 Abbildungen. Wien, Pest, Leipzig 1884. A. Hartleben. 176 S.

Das Buch enthält die notwendigen Vorkenntnisse zum Studium der Elektrotechnik. Hierzu gehört zuerst die Mathematik: sie ist vorzugsweise nach der Seite der directen Rechnung hin entwickelt bis zur Integration der Functionen. Dann folgt die Elektricitätslehre mit allgemein physikalischer Einteilung, hierauf eine chronologische Tabelle der Entdeckungen, zuletzt einige numerische Tabellen. H.

Arithmetik der elektrischen Beleuchtung von R. E. Day, M. A. Professor der Experimental-Physik an King's College, London. Autorisirte deutsche Ausgabe. Aus dem Englischen übersetzt von Ingenieur Carl Schlenk, Adjunct am technologischen Gewerbe-Museum. Herausgegeben vom Technologischen Gewerbe-Museum in Wien. Wien 1884. Carl Graeser. 107 S.

Das Vorliegende ist eine Aufgabensammlung für die elektrodynamische Rechnung. Der Verfasser hat gefunden, dass Schüler durch Rechnung von Beispielen sehr schnell in den Besitz der Principien und Gesetze der Experimentalphysik, sowie in den der Kenntnisse von Details kommen, und gibt diese Sammlung zu dem Zwecke heraus, dass sie zur Uebung dieser Unterrichtsmethode dienen soll. Die Beispiele beziehen sich nach einander auf den elektrischen Leitungswiderstand von Drähten und Lampen, Intensität von Strömen im einfachen Stromkreise, Wärmewirkung des elektrischen Stromes im einfachen Stromkreise, nützliche Arbeit im einfachen Stromkreise, combinirte elektrische Stromkreise. Hierauf folgen einige Tabellen.

H.

Vermischte Schriften.

Bulletin de la Société Mathématique de France, publié par les secrétaires. Tome XII. Année 1883—84. Paris 1884. Au siège de la société.

Der 12. Band enthält folgende Abhandlungen.

M. d'Ocagne: Ueber die graphische Bestimmung des Trägheitsmoments der ebenen Flächenstücke. — Geometrische Untersuchung der Verteilung des Drucks um einen Punkt in einem rechteckigen Stabe und in einem Stück Erde. — Ueber eine Reihe mit alternirendem Gesesetze. — Ueber die mittlere Gerade eines Systems beliebig auf einer Ebene liegender Geraden.

David: Ueber eine Transformation der linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnung.

E. Picard: Ueber eine Gruppe von Transformationen der auf derselben Seite einer Ebene liegenden Punkte des Raumes. — Ueber die Form der Integrale der Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Nähe gewisser kritischer Punkte. — Bemerkung über die Reduction der abelschen Integrale auf die elliptischen.

L. Raffy: Ueber die invarianten Transformationen der elliptischen Differentiale.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

VIII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Albrecht, G., Geschichte d. Elektricität m. Berücksichtg. ihrer Anwendungn. Wien, Hartleben. 3 Mk.; geb. 4 Mk.

Jahrbuch üb. d. Fortschr. d. Mathematik, hrsg. v. C. Ohrtmann. 14. Bd. J. 1882. 3. Hft. Berlin, G. Reimer. 6 Mk.

Methode und Principien.

Forster, A., Studien zur Entwicklungsgeschichte d. Sonnensystems. Stuttgart, Metzler'scher Verl. 2 Mk. 60 Pf.

Tischner, A., the fixed idea of astronomical theory. Leipzig, Fock. 1 Mk. 20 Pf.

Zacharias, O., üb. gelöste u. ungelöste Probleme der Naturforschg. Leipzig, Denicke's Verl. 4 Mk.

Lehrbücher.

Kambly, L., die Elementar-Mathematik f. d. Schulunterr. bearb. 1. Tl. Arithmetik u. Algebra. 27. u. 28. Afl. Breslau, Hirt Verl. 1 Mk. 40 Pf.

Sachse, J. J., Mathematik f. dtsche. Lehrbildungsanstalten u. Lehrer. 1. Tl. Element.-Rechnen. 2. Afl. Leipzig, Siegismund & V. 3 Mk.

Sammlungen.

Heis, E., Sammlg. v. Beispielen u. Aufgaben aus der allgem. Arithmetik u. Algebra. 67. u. 68. Afl. Köln, DuMont-Schauberg. 3 Mk.

Kleyer, A., vollst. gelöste Aufg.-Sammlg. a. allen Zweigen der Rechenkunst etc. 171.—182. Heft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Litterarischer Bericht
X.

Arithmetik, Algebra und reine Analysis.

Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Von Leonhard Euler. Erster Teil. Ins Deutsche übertragen von H. Maser. Berlin 1885. Julius Springer. 319 S.

Der erste Teil von Euler's Introductio in Analysin infinitorum behandelt folgende Themata: Wesen und Einteilung der Functionen, eingehend auf die mehrdeutigen impliciten Functionen, ohne Gebrauch von Functionszeichen; Zerlegung der rationalen Functionen in Partialbrüche; Auflösung der Relationen zwischen Variabeln durch Ausdruck in gemeinsamen neuen Variabeln; Darstellung von Functionen durch unendliche Reihen, durchweg speciell, ohne Erklärung des Wesens und der Bedingungen, eingehend auf recurrente Bestimmung; Functionen mehrerer Variabeln, eingehend auf Homogeneität; Exponentialgrössen und Logarithmen, deren Berechnung; Kreisfunctionen und deren Berechnung, imaginäre Relation mit der Exponentialfunction; Berechnung der imaginären Factoren ganzer Functionen, Anwendung auf Reihensummen und Summation, mit vielen besondern Formelresultaten; reelle Partialbrüche 2. Grades; recurrente Reihen; Vervielfachung und Teilung der Winkel; Reihen, welche aus der Entwickelung von Producten entspringen; Zerlegung der Zahlen in ganze positive Teile; Gebrauch der recurrenten Reihen bei Berechnung der Wurzeln der Gleichungen; Kettenbrüche. Das Euler'sche Werk zeichnet sich aus durch enorme Productivität an Methoden und resultirenden Formeln, erstere mit der Tendenz, der Analysis die notwendigen Organe zu schaffen. Dieselben sind dermassen in Uebung gekommen, dass, wenn man von den bekanntesten Methoden und Formeln den Ursprung sucht, man ihn weit öfter bei Euler als sonst

irgendwo findet. Was hingegen durchweg unberührt bleibt, ist die Frage nach den Begriffen und Principien, die stets ohne Prüfung vorausgesetzt werden. Die Uebersetzung ist vortrefflich in jeder Beziehung. H.

Beitrag zur Auswerthung bestimmter Integrale mittelst Veränderung des Weges. Von Dr. J. H. Graf, Privatdocent an der Universität Bern und Lehrer an der Lerberschule. Separatabdruck aus den Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern. Bern 1884. Huber u. Cie. 31 S.

Diese Schrift hat die Bestimmung, an einzelnen Beispielen die Vorzüge der Methode zu zeigen, welche durch Veränderung des Weges die Werte von Integralen findet. Sie beginnt mit der Herleitung der Formel:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

und wendet sich dann zur Behandlung des Integrals

$$\int e^{-x^2}\partial x$$

für unendliche Grenzen. Jene Formel ist schon durch Reihenentwickelung, gültig für reelle und imaginäre a leicht zu beweisen. Setzt man den Reihenausdruck der rechten Seite als bekannt voraus, so ist schwerlich Anlass nach kürzerem Verfahren zu suchen. Da man jedoch auch umgekehrt diesen Reihenausdruck finden kann, indem man den Wert der linken Seite nach anderer Methode ermittelt, so hat die Anwendung der in Rede stehenden Methode in der Tat sichtlich Interesse, und erscheint als geeignetes Beispiel die Fruchtbarkeit derselben ans Licht zu stellen, mehr als die dann folgenden Betrachtungen, welche doch allzuwenig Resultate aufweisen. Beweise der obigen Formel durch Umformung des Integrationswegs hatten schon Schläfli und Schönholzer gegeben. Der gegenwärtige wird als ein noch einfacherer aufgestellt. In dem Integral

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,\partial x}{1+x} = S$$

geht x von 0 nach Osten, dann einmal mit südlicher, einmal mit nördlicher Ausweichung nach Westen, woraus bei Substitution bzhw. von $e^{-i\pi}x$, $e^{i\pi}x$ für x erhalten wird:

$$e^{i\pi a}S = \int_0^{-\infty} \frac{x^{a-1}\partial x}{1-x}; \quad e^{-i\pi a}S = \int_0^{-\infty} \frac{x^{a-1}\partial x}{1-x}$$

und nach Subtraction:

$$2i\sin \pi a . S = \int_0^{-\infty} \frac{x^{a-1}\partial x}{1-x} + \int_{-\infty}^{0} \frac{x^{a-1}\partial x}{1-x}$$

Nach Hinzufügung des ganzen Horizonts über Süd, Ost, Nord, West ergibt sich rechts $2i\pi$, übereinstimmend mit der Formel. H.

Die Determinanten für den ersten Unterricht in der Algebra bearbeitet von Dr. H. Kaiser in Dieburg. Wiesbaden 1885. J. F. Bergmann. 23 S.

Die Schrift gibt nach einander die Schreibung und den entwickelten Ausdruck der Determinanten 2. und 3. Grades, die Auflösung der linearen Gleichungssysteme von 2 und 3 Unbekannten, d. h. das blosse Resultat mit Beispielen, die Elimination der Unbekannten desgl., allgemeine Bemerkungen, d. h. allgemein gültig, aber nur speciell beobachtet, einige leichte Transfermationen, Vertauschung zweier Reihen, zwei gleiche Reihen, dann Beweis des Vorstehenden. Der Verfasser hat unbestritten darin Recht, dass die Determinantenrechnung grosse Vorteile bietet, und dass es sich in bedeutendem Umfange der Anwendung nur um Determinanten 2. und 3. Grades handelt. Er scheint aber gar nicht überlegt zu haben, an welche Bedingungen jene Vorteile geknüpft sind. Die erklärte Bedeutung und die Gleichungsauflösung gibt dem Anfänger der Algebra kein Gesetz, sondern nur complicirte Ausdrücke, über die er durch die willkürliche Zusammenfassung von Termen schwerlich eine Uebersicht gewinnt; er wird durch sie nicht gefördert, denn die Auflösung ist als geschehen vorausgesetzt. Den nachfolgenden Sätzen, welche nur einen Teil der elementarsten Eigenschaften der Determinanten geben, fehlt jede Anwendung und werden dem Schüler als zwecklose Düfteleien erscheinen; die nachträglichen Beweise haben keinen rechten Gegenstand, denn dass jenes Resultat herauskommt, musste der Schüler schon durch eigene Rechnung erfahren haben um es zu verstehen. Der Nutzen der Determinantentheorie kann dem Schüler erst zugute kommen, nachdem einiger Sinn für algebraische Formen geweckt ist, und er die Lehre von den Permutationen und Substitutionen getrieben hat, was doch nur in der obersten Classe der höhern Unterrichtsanstalten geschehen kann. Von der vorliegenden Bearbeitung

aber muss man sagen, dass sie das Gegenteil einer rationalen Methode ist: statt die Eigenschaften für die Nutzanwendungen zu verwerten, bringt sie erstere als müssige Bemerkungen hinterher und sehr unvollständig. H.

Die Elemente des graphischen Rechnens mit besonderer Berücksichtigung der logarithmischen Spirale. Eine Anleitung zur Construction algebraischer und transcendenter Ausdrücke für Bau- und Maschinen-Techniker, sowie zum Gebrauche an höheren Gewerbeschulen. Von Anton Steinhauser, k. k. Professor an der Staats-Gewerbeschule in Wien. Wien 1885. Alfred Hölder. 130 S.

Das Vorliegende ist eine Anweisung die elementaren Rechnungen der Arithmetik und Algebra durch Construction auszuführen. Sie schliesst sich ohne Rücksicht auf das Unterscheidende ihrer Aufgabe ganz an den Lehrgang der Arithmetik und Algebra an und behandelt nach einander: die Grundoperationen (4 Species), das Potenziren, Radiciren und Logarithmiren, die Reihen, die Verhältnisse und Proportionen, die Auflösung der Gleichungen 1. und 2. Grades mit 1 und mehrern Unbekannten, das Rechnen mit imaginären Zahlen, die Kreisrechnung, die Flächenberechnung. Charakteristisch ist, dass das Selbstverständliche mit allerhand Wiederholungen breit ausgeführt wird, während notwendige Fragen, die Erfahrung und Ueberlegung erfordern mit Stillschweigen übergangen werden. Nachdem im Anfang gesagt ist, dass jede Zahl durch das Verhältniss zweier Linien dargestellt wird, und dies Verhältniss in der Tat zuerst allgemein in Anwendung kommt, muss noch ausführlich der Fall einer ganzen Zahl behandelt, und dem Schüler gesagt werden, dass hier der Divisor = 1 ist, und es folgt noch ein besonderer Abschnitt über Construction der Proportionen. Dagegen ist nichts darüber gesagt, mit welchen Instrumenten die Construction geschieht, dass verschiedene Methoden möglich sind, und dafür gesorgt wird, dass das Zeichenblatt ausreicht. Für manche Aufgaben sind Curven nötig; ob diese aber jedesmal neu construirt werden müssen, oder eine für weitern Umfang von Aufgaben ausreicht, bleibt unerörtert. Während nun ein grosser Teil der Auseinandersetzung den Techniker als gänzlich unbeholfen und denkunfähig zu betrachten scheint, verlangt doch das Schlusswort von ihm, dass er den Einfluss der Zeichenfehler auf das Resultat erkennen soll, wozu jede Anleitung fehlt. Unverständlich ist es, wie der Verfasser dazu kommt, bei der Construction der gewöhnlichen Addition der in Linien gegebenen Zahlen plötzlich den Hamilton'schen Begriff der Addition der Strecken unterzulegen, von dem sonst nirgends die Rede ist. H.

Untersuchungen im Gebiete linearer Differential-Gleichungen. Von **Simon Spitzer.** Zweites und drittes Heft. Wien 1885. Carl Gerold's Sohn. 49 + 45 S.

Das 1. Heft ist im 1. litt. Bericht S. 9. besprochen. Im 2. Heft wird der Gegenstand noch einmal aufgenommen, Beweise und fernere Bemerkungen hinzugefügt. Dann wird, ähnlich dem Vorigen, die lineare Differentialgleichung gesucht, welcher die Wurzeln der Gleichung

$$y^4 + 4y + 3x = 0$$

genügen, und gefunden:

$$(x^3 - 1)y''' + \frac{9}{2}x^2y'' + \frac{43}{16}xy' - \frac{5}{32}y = 0$$

eine Gleichung, die von den Integralen der Gleichung

$$(x^3 - 1)z'' + \frac{3}{2}x^2z' - \frac{5}{64}xz = 0 \quad \text{für} \quad y = z^2$$

befriedigt wird; es folgt die Lösung der letztern. Die entsprechende Aufgabe wird dann für die Gleichung

$$y^4 + 4Py + 3Q = 0$$

untersucht und für

$$y^4 + 4xy + 3 = 0; \quad y^4 + 4y + 4x = 0$$

gelöst. Es ergeben sich lineare Differentialgleichungen für erstere 3., für letztere 4. Ordnung, und diese reduciren sich durch Substitution von $y = z^2$ auf Gleichungen 2. Ordnung. Im 3. Hefte findet der Verfasser eine grössere Anzahl Integrale der Form

$$\int y^n x^m dx, \qquad \int \log y \, x^m dx$$

wo y eine Wurzel einer trinomischen Gleichung 3. und 4. Grades ist; rational in x, y, bzw. $\log y$ dargestellt. H.

Vermischte Schriften.

Bulletin de la Société Mathématique de France publié par les secrétaires. Tome [illegible] [illegible]. Paris [illegible] [illegible]. [illegible]

Der [illegible] und [illegible] Band enthalten folgende Abhandlungen.

M. d'Ocagne: Ueber die graphische Auswertung der Trägheitsmomente der ebenen Flächenstücke. — Geometrische Untersuchung der Verteilung der Spannungen um einen Punkt in einem rechtwinkligen Stabe und in einem Haufen Erde. — Ueber eine Reihe von alternirendem Gesetz. — Ueber die Mittelgerade eines Systems von Geraden in einer Ebene. — Ueber die isometrischen Trajectorien einer Geraden in Bezug auf gewisse Systeme ebener Curven. — Ueber die homologischen reciproken Polarcurven.

David: Ueber eine Transformation der linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnung.

E. Picard: Ueber eine Transformationsgruppe der Punkte des Raumes, welche auf derselben Seite einer Ebene liegen. — Ueber die Form der Integrale der Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Nähe gewisser kritischer Punkte. — Bemerkung über die Reduction der abelschen Integrale auf elliptische.

L. Raffy: Ueber die invarianten Transformationen der elliptischen Differentiale.

E. Lemoine: Einige Eigenschaften der Parallelen und Antiparallelen der Seiten eines Dreiecks. — Ueber die pseudosymmetrischen Zahlen.

P. Tannery: Note über eie Theorie der Gesamtheiten.

E. Goursat: Ueber die Integration einiger linearen Gleichungen mittelst doppelperiodischer Functionen. — Ueber die Reduction der hyperelliptischen Integrale.

H. Poincaré: Ueber die Reduction der abelschen Integrale. – Bemerkungen über die Anwendung der vorhergehenden Methode (von Appell). — Ueber die Darstellung der Zahlen durch Formen.

Tschebischeff: Ueber die algebraischen Brüche, welche die Quadratwurzel einer Variabeln zwischen gegebenen Grenzen annähernd darstellen. — Ueber die Transformation der rotatorischen Bewegung in Bewegung auf gewissen Linien, mit Hülfe articulirter Systeme.

E. Lebon: Ueber die Construction der Tangente in einem Anfangspunkte des Schattens, welchen ein hohler Cylinder oder Kegel auf sich selbst wirft. — Antwort auf eine Note von Rouché.

P. Appell: Ueber eine elementare Methode die Entwickelungen der elliptischen Functionen in trigonometrische Reihen zu erhalten. (Hierzu die Bemerkungen von Poincaré.) — Ueber die sphärische Kettenlinie.

Weill: Ueber die Zerlegung einer Zahl in 4 Quadrate.

J. Marchand: Methode um Kegelflächen Berührungsebenen zu legen.

G. Humbert: Ueber die unicursalen Curven. — Ueber die homofocalen Flächen 2. Ordnung.

D. Selivanoff: Ueber die Aufsuchung der Divisoren ganzer Functionen.

A. Starkoff: Ueber die Lösung geometrischer Probleme durch Variationsrechnung.

R. Perrin: Ueber die unbestimmte Gleichung $x^3 - y^3 = z^4$

Chrystal: Ueber das Problem der Construction des kleinsten Kreises, der n in der Ebene gegebene Punkte einschliesst.

E. Habich: Ueber die Krümmungsradien zweier Curven, welche die Tangenten einer dritten Curve unter Winkeln von gegebener Relation schneiden. H.

American Journal of Mathematics. **Simon Newcomb**, Editor. **Thomas Craig**, Associate Editor. Published under the Auspices of the Johns Hopkins University. Volume VII. Baltimore 1885.

Der Inhalt des 7. Bandes ist:

Cayley: Eine Abhandlung über Seminvarianten. — Tafeln der symmetrischen Functionen der Wurzeln bis zum Grade 10 für die Form:

$$1 + bx + \frac{cx^2}{1.2} + \dots = (1-\alpha x)(1-\beta x)(1-\gamma x)\dots$$

Tafeln der nicht unitarischen Teilung. — Tafeln der Seminvarianten. — Eine Abhandlung über die Abel'schen und Thetafunctionen (Cap. IV—VII, Fortsetzung von Band V).

P. A. Mac Mahon: Ueber Perpetuanten (2 Abhandlungen).

Morgan Jenkins: Note über Prof. Sylvester's constructive Theorie der Teilungen.

A. L. Daniels: Dritte Note über Weierstrass' Theorie der elliptischen Functionen.

C. Veneziani: Auszug aus einem Briefe von M. Hermite; Note zu demselben.

George Paxton Young: Lösung der lösbaren irreducibeln Gleichungen 5. Grades ohne Hülfe eine Resolvente 6. Grades. — Lösbare irreducibele Gleichungen, deren Grad Primzahl.

J. C. Glashan: Noten über die Gleichung 5. Grades.

C. S. Peirce: Ueber die Algebra der Logik.

H. Poincaré: Ueber die linearen Gleichungen mit gewöhnlichen Differentialen und mit endlichen Differenzen.

P. Seelhoff: Prüfung grösserer Zahlen auf ihre Eigenschaft als Primzahlen.

Thomas Craig: Ueber eine gewisse Classe linearer Differentialgleichungen.

F. Gomes-Teixeira: Ueber die Bernoulli'schen Zahlen.

Arthur Buchheim: Eine Abhandlung über Biquaternionen.

J. Hammond: Ueber die Syzygien der binären Functionen 6. Grades und deren Relationen.

Wm. Woolsey Johnson: Reduction alternirender Functionen auf Alternanten. — Ueber eine Reductionsformel für Alternanten 3. Ordnung. — Ueber die Berechnung der Cofactoren von Alternanten 4. Ordnung.

H. B. Nixon und J. C. Fields: Bibliographie der linearen Differentialgleichungen.

William E. Story: Das Additionstheorem für elliptische Functionen.

F. Franklin: Note über den Satz $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. — Beweis eines Satzes von Tschebyscheff über bestimmte Integrale.

H.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Anno CCLXXXII. 1884—85. Serie quarta. Rendiconti pubblicati per cura dei segretari. Volume I. Roma 1885. Tipografia della R. Accademia dei Lincei, V. Salvucci.

Vom December 1884 an sind an die Stelle der Transunti die Rendiconti getreten. In jedem der 7 Monate der Sitzungen der Akademie, December bis Juni, erscheinen 2 Hefte, dann folgen noch ige Ferienhefte, in diesem Jahre 8. Ausser den Rendiconti delle

sedute werden herausgegeben die Memorie, und zwar gesondert della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali und della Classe di scienzi morali, storiche e filologiche. Der I. Band der Rendiconti enthält folgende mathematische und mathematisch physikalische Abhandlungen.

A. Tonelli: Ueber die analytische Darstellung gewisser einzelnen Functionen.

M. C. Vaneček: Ueber die Erzeugung der Flächen und Curven durch Flächenbüschel.

P. Cassani: Die Winkel der linearen Räume.

G. Trattini: Ueber einen Satz von Lagrange. — Ein Satz bezüglich auf die Modulartransformation vom Grade p. (2 Noten.) — Ueber die Erzeugung der Operationsgruppen.

L. Bianchi: Ueber die dreifach orthogonalen Systeme von Weingarten. (2 Noten.)

D. Besso: Ueber eine Classe linearer Differentialgleichungen 4. Ordnung und die Gleichung 5. Grades. (2 Noten.) — Ueber die trinomischen Gleichungen, insbesondere die 7. Grades. — Von einigen Eigenschaften der homogenen linearen Gleichungen mit endlichen Differenzen 2. Ordnung.

F. Gomes-Teixeira: Ueber die Bestimmung des algebraischen Teils des Integrals rationaler Functionen. — Ueber das Integral $\int e^{\omega x} f(x)\,\partial x$.

M. Ascoli: Ueber eine Methode der elektrischen Calibration eines Metalldrahts. — Ueber die Correctionen der Calibration. (2 Noten.)

G. De Franchis: Betrachtungen über einige Relationen zwischen der Ausflussgeschwindigkeit, der specifischen Wärme und dem mittleren Quadrat der Moleculargeschwindigkeit der Gase. (3 Noten.)

C. Arzelà: Ein Satz über die Reihen von Functionen. (2 Noten.) — Ueber die Integration durch Reihen. (2 Noten.) — Ueber eine gewisse Erweiterung eines Satzes bezüglich auf die trigonometrischen Reihen.

S. Pincherle: Ueber eine Formel von Hermite.

Padova: Untersuchungen über das Gleichgewicht der biegsamen und undehnbaren Flächen. (2 Noten.)

Vito Volterra: Ueber Deformation der biegsamen und undehnbaren Flächen. — Integratien einiger Differentialgleichungen 2. Ordnung.

F. Brioschi: Ueber die Transformation der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung. — Ueber eine Eigenschaft der Reducirten der Modulargleichung 8. Grades. (2 Noten.)

Giulio Pittarelli: Ueber die Note von Spottiswoode: „Ueber die Invarianten und Covarianten einer durch quadratische Substitution transformirten Function.“

A. Morghen: Veränderungen im Werte des Trägheitsmoments eines Körpers infolge der ungleichen Verteilung der Materie in ihm. (2 Noten.)

A. Cancani: Ueber das Hygrometer von Edelmann.

E. Narducci: Ein kleiner Tractat über die Division nach dem System des Abacus, geschrieben in Italien vor dem 12. Jahrhundert.

P. Pizzetti: Ueber conforme geographische Darstellungen. (2 Noten.)

L. Palazzo: Ueber den Fehler in der Methode der Deflexionen infolge der Abweichung des Aufhängefadens von der Verticale. (2 Noten.)

G. Battaglini: Ueber eine Anwendung der Theorie der quadratischen binären Formen auf die Integration der elliptischen Differentialgleichung. — Ueber die bilinearen binären Formen.

G. Agamennone und F. Bonetti: Ueber die Deformation eines Glasgefässes durch inneren Druck. (2 Noten.)

Philipp Keller: Ueber die Temperaturerhöhung durch Herabfallen des Wassers.

E. Cesàro: Ueber einige arithmetische Determinanten. — Neue Untersuchung der arithmetischen Determinanten. H.

Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis. Seriei tertiae Vol. XII. Fasc. I. 1884. Fasc. II. 1885.

Der 12. Band enthält folgende mathematische Abhandlungen.

G. Dillner: Ueber die Integration der Differentialgleichungen des konischen Pendels. — Ueber die Entwickelung einer analytischen Function für eine Grenzlinie der Convergenz, welche einförmige Unendliche als einzige kritische Punkte umschliesst.

M. Falk: Beweis des Cauchy'schen Satzes über das Integral einer complexen Function.

A. Söderblom: Ueber die Drehung eines Rotationskörpers um einen festen Punkt. — Ueber die elliptischen Functionen $\xi(u)$.

A. Berger: Ueber eine Summation einiger Reihen.

N. Lindskog: Ueber die Drehung eines starren Körpers, auf den keine Kräfte wirken, um einen festen Punkt. H.

Acta Mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. 6. Stockholm 1885. F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Der 6. Band enthält folgende Abhandlungen.

J. Molk: Ueber einen Begriff, welcher den der Teilbarkeit umfasst, und über die allgemeine Theorie der Elimination.

P. du Bois-Reymond: Ueber den Begriff der Länge einer Curve.

K. Weierstrass: Ueber die Theorie der elliptischen Functionen.

C. Runge: Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen. Zur Theorie der analytischen Function. — Entwickelung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in Summen von rationalen Functionen der Coefficienten.

Sophie Kowalewski: Ueber die Brechung des Lichtes in krystallinischen Mitteln.

T. J. Stieltjes: Ein Satz der Algebra. — Ueber gewisse Polynome, welche eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung erfüllen, und über die Theorie der Lamé'schen Functionen.

M. A. Stern: Eine Bemerkung über [illegible]

H. Weber: Zur Theorie der [illegible] Functionen.

H.

Bulletin de l'Académie [illegible] arts de Belgique. [illegible] 1884. Bruxelles [illegible] [illegible]

Der 6. 7. und [illegible] Folgendes.

E. Catalan: [illegible] Algebra. 6. — [illegible] 7. [illegible] eines neuen [illegible]

Jamet: [illegible] 2. Ordnung. 6.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

IX.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Henrici, J., die Erforschg. der Schwere durch Galilei, Huygens, Newton als Grundlage der rationellen Kinematik u. Dynamik. Leipzig, Teubner. 60 Pf.

Ofterdinger, L. F., Johann Gottlieb Friedrich v. Bohnenberger. Tübingen, Fues. 50 Pf.

Oppert, J., die astronom. Angaben der assyr. Keilinschriften. Wien, Gerold's S. 30 Pf.

Rühlmann, M., Vorträge üb. Geschichte d. techn. Mechanik. Schlusslfg. Leipzig, Baumgärtner. 4 Mk.; cplt. geb. 14 Mk.

Sammlungen.

Gräfe, F., Aufgaben u. Lehrsätze aus der analyt. Geometrie d. Punktes, der geraden Linie, d. Kreises u. der Kegelschnitte. Leipzig, Teubner. 2 Mk. 40 Pf.

Kleyer, A., vollst. gelöste Aufg.-Sammlg. a. allen Zweigen der Rechenkunst etc. 183.—194. Hft. Stuttgart, Maier. à 25 Pf.

Sammlung v. Formeln aus d. Gebiete der Algebra, Geometrie, Stereometrie, Trigonometrie, Mechanik u. Astronomie. Würzburg, Stahel. 50 Pf.

Steuer, W., e. Sammlung angewandter Aufgaben f. d. Kopfrechnen, nebst ausführl. Lehrgang f. Kopf- u. schriftl. Rechnen. 2 Hfte. Breslau, Woywod. 2 Mk. 50 Pf.

Tabellen.

Gauss, F. G., fünfstellige vollst. logarithmische u. trigonometrische Tafeln. 23. Afl. Halle, Strien. 2 Mk.

Litterarischer Bericht
XL.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Diophantos of Alexandria; a study in the history of greek algebra. By **T. L. Heath**, B. A. Scholar of Trinity College, Cambridge. Edited for the Syndics of the university press. Cambridge 1885. Deighton Bell and Co. London, C. J. Clay and son. Leipzig, F. A. Brockhaus.

Als Hauptteil des Buches ist derjenige betrachtet, welcher von der Lehre des Diophantos handelt, während das übrige als historische Einleitung bezeichnet ist. Diese sucht zuerst das Jahrhundert, in welchem er lebte, durch Schlüsse aus einzelnen Stellen zu ermitteln. Einige Data aus seinem Leben sind durch ein Epigramm erhalten. Die Zeit der Bearbeitung seiner Werke hingegen ist in weitem Umfange ungewiss. Sie blieben damals unbeachtet und fielen in Vergessenheit. Nach vorläufiger Annahme wird er als Zeitgenosse des Pappos in die letzte Hälfte des dritten Jahrhunderts, 100 Jahre vor Theon und Hypatia, gesetzt. Man weiss überhaupt von 3 Werken des Diophantos: von 13 Büchern der Arithmetika, dem Werke über die Polygonalzahlen und den Porismen. Von jenen 13 Büchern existiren noch 6, von der Schrift über Polygonalzahlen nur ein Fragment, Porismen finden sich nur in der Arithmetik, das Buch selbst scheint verloren. Es wird vermutet, dass die verlorenen 2 Werke Teile der Arithmetik gewesen sind. Im Vorliegenden geht ein Capitel sehr vielseitig auf die Untersuchung dieser Schriften im allgemeinen ein, das nächste stellt die alten Schriften über Diophantos zusammen. Von da an beginnt die Darlegung seiner Lehre selbst Diese betrifft die Auflösung der Gleichungen, und zwar der bestimmten bis zum 3ten, der unbestimmten bis zum 6ten Grade. Die Ge-

suchte heisst ἀριθμός, ihr Quadrat δύναμις, τετράγωνος, ihr Kubus κύβος, abgekürzt geschrieben und daraus die 4te, 5te, 6te Potenz, multiplicativ zu verstehen, zusammengesetzt, die 0te Potenz μόνας. Die Coefficienten werden hinter diese Potenzen in gewöhnlichen griechischen Zahlzeichen gesetzt; die Terme folgen ohne Pluszeichen auf einander; für minus existirt die Abkürzung λειψ, auch ψ; das Zeichen für die Gesuchte ist das Schlusssigma. Die bestimmten Gleichungen gelten für aufgelöst, sobald nur eine Radicirung bleibt. Deren Ausführung fehlt; es werden nur Grenzen für die Wurzeln angegeben, doch muss der Begriff der Irrationalen vorausgesetzt werden. Von Mehrheit der Lösungen ist nie die Rede, und zwar ist die angenommene Lösung stets positiv. Ebenso wenig ist der Gedanke zu erkennen, dass gewisse Classen von Gleichungen lösbar seien. Es werden nur numerisch bestimmte Beispiele behandelt, und zwar im Anfang die am leichtesten lösbaren Fälle gewählt. Die Lehre von den unbestimmten Gleichungen besteht aus Aufgaben, welche fordern, Functionen einer oder mehrerer gesuchter Rationalzahlen zu Quadraten oder Kuben zu machen. Es werden öfters mehrere solche Forderungen an das System gestellt. Die Porismen unterscheiden sich von diesen Aufgaben als zahlentheoretische Lehrsätze. Von diesen sind einige aufgeführt. Der Verfasser stellt nun, nach Charakterisirung der Methoden des Diophantos, dessen Leistungen zusammen mit seinen Vorgängern, dann mit der nachfolgenden Algebra der Araber, und gibt zuletzt Auszüge aus allen 6 Büchern der Arithmetik. Die Schrift von Heath verdient durch Sorgfalt, Vielseitigkeit und richtige Auswahl des Beachtenswerten hohe Anerkennung. Von ihren Vorgängern ist eine grosse Anzahl aufgeführt, wiewol nur auf wenige, wiederholt nur auf Nesselmann „Die Algebra der Griechen" Berlin 1842 Bezug genommen. H.

Verba filiorum Moysi, filii Sekir, id est Maumeti, Hameti et Hasen. Der liber trium fratrum de geometria. Nach der Lesart des Codex Basileensis F. II, 33 mit Einleitung und Commentar herausgegeben von Maximilian Curtze, M. A. N., Oberlehrer am Königl. Gymnasium zu Thorn. Mit in den Text eingedruckten Holzschnitten. Halle 1885. Leipzig, Wilh. Engelmann.

Das Buch der drei Brüder besteht aus 19 Sätzen über den Inhalt des Dreiecks, des Kreises, des Kegels, der Kugel und der Oberflächen beider nebst Beweisen; ursprünglich arabisch geschrieben, ist es in lateinischer Uebersetzung von Gerhard von Cremona hier publicirt in den Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher zu Halle. Die 3 Verfasser lebten in der ersten Hälfte des 9. Jahrhunderts und empfiengen ihre Ausbildung am Hofe

des Kalifen Almamun, wo ihr Vater Musa ibn Shakir eine hohe Stellung erhalten hatte. Sie erklären, dass sie in ihrem Buche nur solche Sätze ausführlich geben wollen, welche in der damaligen Zeit noch unbekannt waren, wenn sie auch die Alten, d. h. die Griechen schon bewiesen hatten; sie betonen aber energisch, dass die von ihnen geführten Beweise der Sätze, mit angegebenen Ausnahmen, ihr geistiges Eigentum seien. In der Einleitung wird dies zum Teil bestritten und zwar in dem Sinne, dass die Beweise, denen wir den Vorzug vor den im Altertum bekannten geben müssen, nur der Originalgestaltung der Theorie des Archimedes entsprechen. Was indes für diese Vermutung angeführt wird, zeigt nur, dass die Araber ihr Studium auf die Geometrie der Griechen gegründet haben, spricht aber nicht im mindesten gegen ihre eigene Productivität, so sehr sich auch darin die Art des griechischen Verfahrens zu erkennen gibt. Am Schluss hat der Herausgeber für jeden der 19 Sätze Erläuterungen hinzugefügt, welche dem Verständniss sehr zu statten kommen.

H.

Die Entwickelung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Ein Vortrag beim Eintritt in den akademischen Senat der Universität Tübingen am 29. April 1869 gehalten von Dr. Hermann Hankel, vorm. ord. Professor der Mathematik in Tübingen. Zweite Auflage mit einem Vorwort von Dr. P. du Bois-Reymond, ord. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen. Tübingen 1884. Franz Fues. 27 S.

Die erneute Ausgabe dieses Vortrags kann man wol von mehr Gesichtspunkten rechtfertigen und willkommen heissen als von dem, welcher in der Vorrede allein geltend gemacht wird. Der Tendenz, für welche er begeistert eintritt, kann man zustimmen oder nicht; immer ist es ein Gewinn, dass sie sich so offen darstellt, wie es hier geschieht. Die Zustimmung betrachtet die Vorrede als selbstverständlich; dagegen erscheint ihr die andauernde Befriedigung mit dem objectiven Urteil, und von dieser Seite der Wert für spätere Zeit fraglich. In der Tat stellte sich einer befriedigenden Charakterisirung des neuesten Entwickelunsgganges der Mathematik mehr als eine Schwierigkeit entgegen. Nicht nur war der Vortragende durch die Rücksicht auf seinen Hörerkreis an niedere Voraussetzungen des Verständnisses gebunden; sondern er hatte auch ein Thema gewählt, das im Grunde zu einem reifen Urteil einen Blick in die Zukunft der Wissenschaft erforderte, da ja die Bedeutung der neuesten Leistungen sich durch Ziele bestimmt, die noch nicht erreicht sind, und erfahrungsmässig die actuellen erfolgreichen Wege sich weit vom ursprünglichen Ziele entfernen. In solcher Lage bietet sich dem

Redner die Auskunft dar, seine Urteile so allgemein und unbestimmt zu fassen; dass er im ungünstigsten Falle doch immer Recht behält. Hankel tut das Gegenteil: er spricht seine Meinung deutlich und präcis aus; meistens in treffender Weise; wo sie aber auch bestritten werden kann, ist doch stets damit der Weg zur Entscheidung gebahnt. Der Vortrag besitzt einen objectiven Inhalt, der ihm wol mehr dauernden Wert sichert als jene gerühmte Wärme der Begeisterung. Wozu letztere den blind folgenden Hörer antreibt, das ist eine Einseitigkeit, von der wir nicht wünschen können, dass sie die herrschende werde. Wer aber unparteiisch den oft nur im Nebensatz eingeführten Einwand gleich der befürworteten Ansicht prüft, der wird finden, dass Hankel nicht die andre Seite im dunkeln zu lassen bemüht ist, sei es auch dass er manche Einwände übersehen haben mag. Hankel's Hauptsatz ist: Die Mathematik schafft erst aus sich heraus die Welt, in der sie forscht. Als von aussen gegeben erscheint nur Raum, Zeit und Grösse, und diese, meint der Unkundige, enthalten kein Problem. Daher gilt letzterem die Mathematik für eine geistlose Trivialität, während andere Wissenschaften an Problemen arbeiten, die jedermann einigermassen bekannt sind. So erklärt denn der Verfasser den Ruf, in welchem die Mathematik bei der Mehrzahl der Gelehrten stände, die Geringschätzung die ihr überwiegend entgegenträte, einzig dadurch, dass die Bekanntschaft mit der Mathematik von Seiten der Schüler und Gelehrten in anderm Fache auf die Elemente beschränkt ist, so dass denselben der reiche Geistesinhalt ganz verborgen bleibt. Da der Verfasser sogleich darauf übergeht, die Studirenden der Mathematik auf den Universitäten seien in dieser Hinsicht besser gestellt, so brauchen wir bei der Einseitigkeit jenes Erklärungsgrundes nicht zu verweilen. Doch knüpft sich daran die ununterbrochen durchgeführte pädagogische Ansicht, bei den Elementen dürfe man sich nicht zu lange aufhalten. Zu den Elementen rechnet man aber vielleicht alle Organe der Wissenschaft, so dass der erteilte Rat dahin aufgefasst werden kann, man solle, ohne erst viel Zeit und Mühe auf diese zu verwenden, über sie hinweg zu den höchsten Problemen eilen, da sie ja bei den Fortschritten der Wissenschaft bald entbehrlich würden. Diese Deutung bestätigt sich weiterhin immer mehr: in der Tat enthüllt sich durchweg die Tendenz, das gründliche Studium dessen, was jetzt noch für das Centrum der Wissenschaft gehalten wird, als minder wichtig erscheinen zu lassen. Der Verfasser ist nicht der erste, welcher in Schwärmerei für die neuesten Producte der höhern Mathematik behauptet: der „königliche Weg“ zum Verständniss der Mathematik, von welchem bekanntermassen Euklid zum Ptolomäus sagte, dass er nicht existire, sei gefunden, d. h. das mühevolle Erlernen sei nicht mehr nötig. Auch hier hat er das Gegenteil nicht verschwiegen, nur steht es an an-

derer Stelle; er hat dem Hörer völlige Freiheit gelassen, ob er den lockenden Illusionen folgen will. Die Geschichte der Mathematik wird mit einem Blick in das Altertum begonnen. Die Beispiele von Thales, Pythagoras, Platon, Euklides sollen den Satz dartun: die Mathematik als Wissenschaft verdankt ihren Ursprung nicht praktischen Forderungen ägyptischer Staatswirtschaft, sondern dem idealistischen Bedürfnisse griechischer Philosophen. Hätte Hankel statt der Landesvermessung die Astronomie auf Seiten der praktischen Forderungen angeführt, so würde die Behauptung wol nicht so unbedenklich erschienen sein. In Wirklichkeit haben wir es stets mit mehr als einer Ursache zu tun: der Baum kann nicht ohne Sonne, aber noch viel weniger ohne Erde wachsen und gedeihen. Dass die ideelle Forschung die Leitung durch den praktischen Nutzen nicht entbehren kann, zeigt sich an mancherlei Verirrungen der Speculation. Auch der Verfasser erwähnt solche, nur gibt er der Bemerkung keine Folge. Zwischen der alten und neuen Mathematik setzt er den charakteristischen Unterschied, dass die Alten stets speciell und einen Fall nach dem andern untersuchten, und ausschliesslich synthetisch fortschritten. Das analytische Verfahren, welches die Probleme unmittelbar allgemein auffasst und die zur Lösung erforderlichen Organe zu schaffen sucht, ist ein Product der Neuzeit, von Descartes die Bahn dazu eröffnet. Als hervorragendstes Beispiel wird das Problem an eine beliebige Curve Tangenten zu ziehen genannt, welches die Differentialrechnung als Organ hervorrief. Es ist bezeichnend für die Tendenz der Schrift, dass der Verfasser, obgleich er Newton mit Leibniz gleichen Anteil an der Entdeckung zuschreibt, doch die Fluxion nur als Name anführt, von einem entsprechenden Problem der Mechanik aber kein Wort sagt. Hier wie später vermeidet er es sichtlich, an ein Zeugniss dafür zu erinnern, dass die Mathematik Probleme von aussen empfängt. An andrer Stelle werden zwar die aus der Astronomie stammenden Probleme erwähnt, doch ihnen kein Einfluss eingeräumt. Ein wesentlicher Fortschritt in der Allgemeinheit der Auffassung war die Einführung des Functionsbegriffs durch Euler. Ihm gegenüber wird in Lagrange der Fortschritt in der Form gefunden. Hieran knüpft sich ein Hinblick auf die unnütze Menge des Producirens. Der Verfasser sieht das Verfehlte nur in der Zersplitterung. In weit grösserem Masse wird aber wol die Frage nach dem Nutzen ausser Augen gesetzt bei der Verfolgung von Problemen, die auf willkürlicher Einführung beruhen. Da die Tendenz des Vortrags sehr nach einer solchen Production hindrängt, so hatte der Verfasser allen Grund sich zu erklären, ob er dieselbe über alle Grenzen hinaus billigt. Zwar geht er auf die Frage ein, was die Willkür begrenzt; doch setzt er dabei einerseits voraus, dass die Grenzen nirgends überschritten seien, andrerseits, dass schon, man

weiss nicht woher, bestimmte Probleme existiren, an deren Lösung gearbeitet wird, z. B. das Gesetz der Primzahlen; in neuerer Zeit habe man gelernt uneinnehmbar scheinende Festungen zu umgehen, man mache erst Streifzüge in die Umgebung und finde später den Punkt, von dem aus sie zugänglich sind. Dies wird an einer Anzahl gut ausgewählter Gegenstände dargetan. Das Folgende charakterisirt die Beteiligung der einzelnen Nationen am Aufbau der Wissenschaft, dann einzelne Schritte in deren Entwicklungsgang. Eine erschöpfende Vorführung darf man nicht erwarten; es ist schon viel geleistet, dass Einiges so allgemein verständlich dargestellt werden konnte. An grundsätzlichen Aeusserungen kommt nur noch eine vor: „Die Mathematik hat die Tendenz nach allen Richtungen hin ins unendliche zu wachsen. Sie besitzt kein begrenztes bestimmtes Ziel, weil sie es nicht mit einem positiv gegebenen Materiale zu tun hat etc.“ Alle 3 Urteile sind zu bestreiten. Die Tendenz jeder Wissenschaft ist auf ihre Einheit gerichtet, wenn sie sich auch factisch immer weiter ausdehnt. Können wir auch nicht ein Ziel als einziges aufstellen, so sind doch die bewussten Ziele immer bestimmt und begrenzt. Das positive Material wird der Mathematik, wenn auch zumteil sehr vermittelt, von der Naturwissenschaft gegeben. Der Verfasser äussert den Wunsch, dass der Bau der Mathematik kein Babylonischer Turmbau werden möge. Dann hätte er auch jenem nicht die Tendenz des letztern beilegen sollen über alle Grenzen zu wachsen. Es fehlt in unsern Zeiten nicht an Erscheinungen, die uns Grund geben jenen Urteilen entgegenzutreten. Ungefährlich mag es scheinen, wenn Schriftsteller ohne Zweck und Ziel Spaziergänge in das unbegrenzte Gebiet der Synthesis ausführen. Ist das Ergebniss ohne Wert, so werde sich niemand die Mühe geben in ihre Fusstapfen zu treten, jeder spaziren wo es ihm gefällt. Doch schon Hankel erkennt einen Schaden im Ueberwuchern der unnützen Production ohne ihn gerade näher zu bezeichnen. Wird einmal das Ignoriren im grossen zur Notwendigkeit, so richtet es sich nicht mehr nach dem Wert der Sache, sondern nach dem Ansehen der Person, der Fortschritt wird im dunkeln gehalten, und es entspinnt sich ein Kampf, in welchem die wissenschaftliche Wahrheit beiseite bleibt. Am Schlusse wendet sich der Vortragende an die akademische Jugend mit der Aufforderung ihrer Kraft zu vertrauen, unter dem Sinnspruch: „Es wächst der Mensch mit seinen höhern Zielen.“ Soll dieser Spruch wahr sein, so muss er auch an rechter Stelle in rechter Beziehung gesagt werden. Der Zaunkönig, der, wie die Fabel erzählt, sich vom Adler emportragen lässt, um ihn dann zu überflügeln, wächst nicht mit seinem höhern Ziele. In ähnlichem Falle befindet sich der Anfänger der höhern Analysis, der ohne eine Ahnung vom wirklichen Inhalt, das ganze Gebiet als Hörer durcheilt bis zu den höchsten Problemen;

er wird davon keinen Gewinn haben, als über dieselben mitzusprechen zu können, die Methoden nachahmen und im Vertrauen auf fremde Einsicht an die Richtigkeit der Schlüsse glauben, bis sie sich einmal falsch erweisen. In welchem Sinne nun hier die höhern Ziele zu verstehen sind, geht aus dem Zusammenhang unzweifelhaft hervor: nicht von Forschung, sondern von Aneignung vorhandener Doctrin ist die Rede, auf den Studienplan haben die Ziele Bezug. Hankel erkennt als richtig an, dass der Anfänger erst in den Fundamenten recht sicher zu Hause sein müsse, mit der Einschränkung jedoch, dass es nicht nötig sei jeden Stein der Fundamente zu kennen. Mit eiliger Erwähnung der Warnung ist es ihm genug, und die Einschränkung anullirt sie völlig; denn nach ihr braucht sich der Studirende keine Rechenschaft über die Berechtigung des Verfahrens zu geben. Bezeichnend ist insbesondere, dass die Fundamente mit diesem blossen Namen abgetan sind, dass also von der Existenz bestimmter Principien der Analysis, mit welchen sich der Studirende vertraut zu machen hat, keine Rede ist. Aus alledem ist zu ersehen, dass im Sinne des Vortrags die Ziele sich nicht auf eine stetige Entwickelung beziehen, sondern damit das Mitmachen des genialen Adlerflugs gemeint ist. Ueber die ganze Schrift aber kommen wir zu einem Urteil, dem von P. du Bois gerade entgegengesetzt. Sie enthält ausserordentlich viel Tüchtiges in der Charakterisirung der Wege der Mathematik; ihre Tendenz aber ist die offenste Agitation für den Zweck, den studirenden Mathematiker so unselbständig als möglich zu machen.

Hoppe.

Bulletino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche. Pubblicato da B. Boncompagni. Tomo XVII. Roma 1884. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche.

Der 17. Band enthält folgende Abhandlungen.

E. Narducci: Ueber den „Tractatus sphaerae“ des Bartholomaeus von Parma, Astronomen des 13. Jahrhunderts, und über andre Schriften desselben Verfassers. Tractatus sphaerae, 1. und 2. Teil.

A. Favaro: Von einigen Beziehungen zwischen Galileo Galilei und Federico Cesi illustrirt mit ungedruckten Documenten. — Ueber den Tod des Marco Velsero und über einiges Besondere aus dem Leben des Galileo. — Vergleichung der Galileianischen Manuscripte in der Sammlung Libri-Aschburnam in Florenz.

A. Genocchi: Aussagen von C. F. Gauss über die quadratischen Formen $YY+nZZ$. — Sätze von Sophie Germain über die biquadratischen Residuen.

A. Genocchi und S. Realis: Ueber einen ungenauen Satz von Sophie Germain.

Ch. Henry: Pierre de Carcavy, Vermittler von Fermat, Pascal und Huyghens, Bibliothekar de Colbert und des Königs, Directoren der Akademie der Wissenschaften. — Nachtrag dazu.

C. le Paige: Correspondenz von René-François de Sluce, zum erstenmal publicirt mit einer Einleitung.

Steinschneider: Studien über Zarkali.

B. Boncompagni: Ueber das Leben und die Arbeiten von Francesco Barozzi.

Besonders herausgegeben sind die Abhandlung von Narducci über den Tractatus sphaerae nebst Text und die 2 Aufsätze von A. Genocchi über Gauss und Sophie Germain.

Zu ihnen stehen in naher Beziehung 2 Noten, eine von Genocchi in den Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XX., die andre von P. Mansion in der Revue des questions scientifiques, 1884, gleichfalls besonders herausgegeben. Erstere ist betitelt: Due lettere di C. F. Gauss, pubblicate dal Principe B. Boncompagni — letztere betrifft einen Brief von C. F. Gauss an Dr. Heinrich Wilhelm Mathias Olbers datirt aus Braunschweig den 3. September 1805, publicirt von B. Boncompagni nebst einer Abhandlung über denselben in den Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, tom. XXXVI.

Beide Artikel enthalten eine grosse Anzahl interessanter Notizen über Gauss und andere Mathematiker. H.

Sur un manuscrit du Vatican du XIV[e] siècle contenant un traité de calcul emprunté à la méthode „gobari“. Lettre de M. Henri Narducci à M. Aristide Marre, Extrait du Bulletin des Sciences math. 2[e] série, t. VII. 1883. Paris 1883. Gauthier-Villars.

Der arabische Name der Methode wird lateinisch durch pulvis ausgedrückt. Der Verfasser hält sie für einen Uebergang vom Abacus zum Algorithmus. Alle mitgeteilten Stellen des Manuscripts haben astronomische Rechnung zum Gegenstand. H.

Bibliotheca Mathematica herausgegeben von Gustaf Eneström. 1884. Stockholm, F. u. G. Beijer. Berlin, Mayer u. Müller. Paris, A. Hermann.

Diese neue Zeitschrift erscheint seit 1884 jährlich in 4 Nummern, neben den Acta Mathematica von Mittag-Leffler. Sie liefert ein alphabetisches Verzeichniss der neu erschienenen mathematischen Werke, Abhandlungen und Aufsätze. Auf diese folgen noch Referate und Recensionen und manches andre. Unter den vermischten Notizen ist zuerst angekündigt:

Notice sur un mémoire de Chr. Goldbach, relatif à la sommation des séries, publié à Stockholm en 1718.

Chr. Goldbach ist geboren 1699 in Königsberg, gestorben 1764 in Moskau. Von der genannten Schrift findet sich ein Exemplar in der Bibliothek der öffentlichen Schule zu Linköping, betitelt: Specimen methodi ad summas serierum. Sie ist 1718 in Stockholm gedruckt und besteht aus 2 Sätzen, nämlich: 1., Die Summe der $x-1$ ersten Terme der Reihe

$$u_1 + (x-1)\,\Delta u_1 + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\Delta^2 u_1 + \dots$$

ist

$$(x-1)u_1 + \frac{(x-1)(x-2)}{1.2}\Delta u_1 + \dots$$

2., Die Reihe, deren allgemeines Glied ist

$$\frac{k}{x^2 - 2ax + b}$$

lässt sich genau summiren, wenn $\sqrt{a^2 - b}$ eine ganze Zahl ist.

Der Herausgeber macht in Atti dell' Acc. Pont. d. N. Linc. XXXVIII. dem Fürsten Boncompagni von dem Funde Mitteilung. Hierauf erschien in demselben Bande Folgendes:

Intorno alla Bibliotheca Mathematica del D'. Gustavo Eneström rapporto di B. Boncompagni. Roma 1885.

Die Schrift enthält teils die genannte Ankündigung nebst der vorstehenden Notiz, teils andre Notizen aus der Bibl. Math.

H.

Die Erforschung der Schwere durch Galilei, Huygens, Newton als Grundlage der rationellen Kinematik und Dynamik historisch-didaktisch dargestellt von Julius Henrici. (Beilage zum Jahresbericht des Heidelberger Gymnasiums für das Schuljahr 1884—85.) Leipzig 1885. 4°. 40 S.

Es ist unstreitig ein höchst lohnendes Unternehmen, eine Uebersicht über die sich so schnell folgenden Entdeckungen zu geben, durch welche eine Wissenschaft wie die Dynamik aus den rohesten Anfängen in so kurzer Zeit zu fertiger principieller Gestaltung gelangte, daher auch sehr dankenswert, dass sich der Verfasser einer solchen Arbeit unterzogen hat. Dass er zur Darstellung nicht den biographischen, sondern den theoretischen Faden gewählt hat, wird man durch den Ausfall gewiss ganz gerechtfertigt finden. Er behandelt nach einander, mit Entwickelung der Ansichten der Entdecker: die Fallbewegung, das erste Beispiel gleichförmig beschleunigter Bewegung; die Wurfbewegung als erstes Beispiel der Zusammensetzung der Bewegungen; den Fall auf schiefer Bahn und die Pendelbewegung als erste Beispiele unfreier Bewegungen; die Centralbeschleunigungen der Weltkörper; gegenseitige Beschleunigungen zwischen allen Körpern; das Beharrungsgesetz, eine Folgerung aus der Bewegung ohne Fallbeschleunigung; das Gewicht als beschleunigende Kraft; das Gewicht als bewegte Masse; die Veränderlichkeit der Schwerkraft und Unveränderlichkeit der Masse; die Intensität der Gravitationsbeschleunigung als Mass der Masse; Kraft und Masse in der theoretischen Mechanik. Die Abfassung lässt an einfacher, präciser Logik einiges vermissen. Der Unterschied zwischen Kinematik und Dynamik, von dem die Schrift überflüssigerweise und eher zum Nachteil der Deutlichkeit so viel spricht, hat in dem hier behandelten Forschungsgebiet kaum Bedeutung; er würde nur bei Zurückgehen auf Coppernicus hervortreten. Die ersten Fragen von Galilei sind dynamische: das Gesuchte ist und bleibt stets die Kraft, obgleich ihr analytischer Ausdruck nach verschiedenen Irrungen erst später gefunden ward, und der Name Kraft dafür in Geltung kam. In Zusammenhang damit ist auch der für alle allgemeine exacte Erkenntniss so wichtige Begriff der Hypothese schief aufgefasst, indem die Abhängigkeit von einer Hypothese als Mangel der Theorie betrachtet wird, während im Gegenteil die Hypothese eine Errungenschaft ist, durch welche erst die individuelle Beobachtung zur allgemeinen Erkenntniss führt. Hierauf beruht auch die Schwierigkeit, in welcher sich, den Schlussworten zufolge, der Verfasser bei Bestimmung des Massenbegriffs befindet. Er meint, die Analytiker der Mechanik empfänden dieselbe nicht, weil sie sich nicht mit den Elementen befassten. In der Tat aber beruht sie nur auf ungenügender logischer Orientirung und Vorurteil.

Hoppe.

Julius Klaproth's Schreiben an Alexander von Humboldt über die Erfindung des Kompasses. Aus dem französischen Original im Auszuge mitgetheilt von Dr. Phil. Armin Wittstein. Leipzig 1885. T. O. Weigel. 49 S.

Die Schrift von Klaproth enthält die gesamte historische Untersuchung der Entdeckungen der Eigenschaften des Magnets, auf welchen die verschiedenen Verwendungen des Compasses beruhen. Wittstein hat davon eine freie Bearbeitung in deutscher Sprache geliefert und zu besserer Uebersicht die Entdeckungsgeschichte in die der ostasiatischen, westasiatischen und europäischen Völker eingeteilt. Man ersieht daraus, dass die Frage nach der Erfindung des Compasses eine sehr vielteilige ist, und zu einem genügenden Urteil ein Eingehen auf die geringsten Spuren nicht entbehrt werden kann, da die Kenntnisse sich nicht stetig fortgepflanzt zu haben scheinen. Wir können hier nur auf diese Schrift, welche die vielseitigsten, gründlichsten und sorgfältigsten Untersuchungen über den Gegenstand enthält, aufmerksam machen, ohne nähere Mitteilungen daraus zu geben. H.

Kurzgefasste Geschichte der Arithmetik und Algebra. Eine Ergänzung zu jedem Lehrbuche der Arithmetik und Algebra. Von Richard Klimpert, Seminarlehrer in Bremen. Mit in den Text eingedruckten Figuren. Hannover 1885. Carl Meyer. 70 S.

Das Buch handelt am ausführlichsten von den Anfängen des Zählens und den Zahlbezeichnungen im Altertum und bei den verschiedenen Völkern, umfasst aber das gesamte Rechnen des Altertums und Mittelalters, und erstreckt sich, obwol nur in der Kürze, auf die Algebra der Neuzeit. Die historischen Angaben sind reichlich, jedoch Erklärung und Betrachtung in ununterbrochenem Faden verwebt, so dass in Ermangelung eines Registers das Einzelne nicht leicht nachzuschlagen ist. Will man es in dem Sinne als „Ergänzung" der gewöhnlichen Lehrbücher der Arithmetik ansehen, sofern es deren historische Anmerkungen gründlicher und umfassender ersetzt, so geht es jedenfalls über diese Bestimmung weit hinaus; es würde eher sich zu einer neben dem Unterricht hergehenden besondern Lectüre eignen. H.

Ueber das Ausziehen der Quadratwurzel bei Griechen und Indern. Von Oberlehrer Karl Hunrath. Hadersleben 1883. 4°. 35 S.

Die Berechnung irrationaler Quadratwurzeln vor der Herrschaft der Decimalbrüche. Von Karl Hunrath. Kiel 1884. Lipsius u. Tischer. 56 S.

Die erste Arbeit bespricht, hauptsächlich im Anschluss an die Abhandlung von S. Günther: „Die quadratische Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden" — kritisch historisch das

Rechnungsverfahren der Griechen, und zwar nach einander: die Quadratwurzel aus 2; den goldenen Schnitt; die Quadratwurzel aus 3; aus 5; die Kreismessung des Archimedes; die Heronischen Näherungswerte; die Methode der Astronomen; dann das Verfahren der Inder, und zwar: die Quadratwurzel aus 2 und aus 3 in den Çulvasûtras; die Methode Bhâskara's; die Rectification des Kreises und des Kreisbogens, die Trigonometrie.

Die zweite Arbeit stellt erst die Litteratur zusammen und beginnt dann mit einer Controverse gegen Weissenborn. Sie bespricht das Annäherungsverfahren der Griechen, Inder, Araber und Abendländer bis zur Einführung der Decimalbrüche. H.

Litterarischer Bericht
XII.

Geometrie.

Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden. Von Dr. Hermann Wiener, Privatdocenten der Mathematik in Halle a. S. Darmstadt 1885. L. Brill. 83 S.

Wir können die Leistung der Arbeit nicht besser charakterisiren, als der Verfasser es in der Einleitung selbst getan hat. Sie besteht in einer Erweiterung der Staudt'schen Methoden der reinen Geometrie. Staudt ersetzt ein Punktepar durch die Gesamtheit der ∞^1 Punktepare, die zu ihm harmonisch liegen, d. h. durch eine Involution, und diese vertritt vollkommen dessen Stelle. Ist nun anstatt des Punktepares eine Gruppe von 3 Punkten gegeben, so kann man ∞^2 Gruppen von 3 Punkten finden, deren jede zur gegebenen eine Lage hat, welche der harmonischen Lage jener Punktepare entpricht. Die Gesamtheit dieser Gruppen heisst ein Polarsystem 3. Ordnung, und jene 3 Punkte dessen Ordnungspunkte. Kann man nun ein System construiren, dessen Gruppen in ihrer gegenseitigen Lage dieselben Eigenschaften aufweisen, wie die des vorigen, so vertritt auch dieses die Stelle von 3 Punkten, selbst dann, wenn man keine seiner Ordnungspunkte kennt. Auf diese Weise kommt der Verfasser zu einer Definition der Polarsysteme $n$ter Ordnung auf der geraden Linie und versucht von ihr aus Methoden zu gewinnen, die zur rein geometrischen Behandlung der Invariantentheorie binärer Formen geeignet erscheinen. Alle zu construirenden Gebilde werden auf einer Geraden liegend gedacht, und in dieser sind es 3 Aufgaben, deren Lösungen die Ele-

mente zu allen Constructionen bilden, nämlich: 1) von einem Punkt zu 2 andern den vierten harmonischen zu suchen; 2) zu einem Punkt den zugeordneten in einer Involution zu suchen, die durch 2 ihrer Punktepare gegeben ist; 3) zu einem Punkt den entsprechenden in einer Projectivität zu suchen, in der 3 Punkte und ihre entsprechende gegeben sind. Die Teile der Arbeit sind folgende: I. die Projectivitäten und die Polarsysteme 2. Ordnung; II. die Polarsysteme $n$ter Ordnung; III. die cyklischen Polarsysteme. H.

Classification der Flächen nach der Transformationsgruppe ihrer geodätischen Curven. Von Sophus Lie. Universitäts-Programm für das erste Semester 1879. Christiania 1879. 4°. 45 S.

Mit der vorliegenden Untersuchung beabsichtigt der Verfasser seine Transformationstheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen durch Anwendung auf die Differentialgleichung der geodätischen Curven zu verwerten. Ist das Bogenelement einer Fläche auf die Form gebracht

$$\partial s^2 = F(x, y)\,\partial x\,\partial y$$

so werden die geodätischen Curven dieser Fläche durch die Gleichung bestimmt

$$F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Im allgemeinen gestattet dieselbe keine Infinitesimal-Transformation d. h. es ist unmöglich den Grössen x und y solche Incremente

$$\delta x = \xi(x, y)\partial t, \qquad \delta y = \eta(x, y)\partial t$$

zu geben, dass jede geodätische Curve in eine ebensolche, benachbarte Curve übergeführt wird. Es wird nun gezeigt, dass es 3 Flächenclassen gibt, welche eine infinitesimale Transformation jener Gleichung gestatten. Entweder kann F durch Einführung zweckmässiger Functionen von x und von y als neues x und als neues y die Form

$$F = e^{\alpha x}\,\Phi(x - y) \quad (\alpha \text{ const.})$$

erhalten. Jede hierher gehörige Fläche besitzt die charakteristische Eigenschaft auf ∞^1 mit ihr ähnlichen Flächen abwickelbar zu sein. Oder F kann die Form

$$y\varphi(x) + \Phi(x)$$

erhalten. Dabei sind $\varphi(x)$ und $\Phi(x)$ durch 2 gewöhnliche Differentialgleichungen näher bestimmt, welche dann hier integrirt werden. Oder drittens kann F die Form

$$F = \varphi(x+y) + \Phi(x-y)$$

erhalten. Dabei sind wieder φ und Φ durch gewöhnliche Differentialgleichungen bestimmt, für welche mehrere Particularlösungen sich darbieten. Dann werden die Flächen aufgesucht, welche mehrere infinitesimale Transformationen gestatten. Mehr als 3 lassen nur die Flächen constanter Krümmung zu und zwar 8. Mehrere conforme inf. Transf. gestatten ausschliesslich die durch

$$F = A(x-y)^m$$

bestimmten Flächen, und zwar mehr als 2 bloss für $m = -2$, wo sie constante Krümmung hat. Alle Flächen, die zugleich der ersten und zweiten Classe angehören, sind bestimmt durch

$$F = xy + \text{const}$$

und gehören auch zur 3. Classe; sie gestatten 3 verschiedene inf. Transf. Sie sind die einzigen gleichzeitig der 2. und 3. Classe angehörige. Ferner werden alle Flächen für 1. und 3. Classe bestimmt Nach Jacobi kennt man einen Multiplicator der Differentialgleichung der geodätischen Curven. Mit dessen Anwendung werden für gleichzeitige 2. und 3. Classe ein oder 2 Lösungen gefunden. Schliesslich wird die genannte Classification mit der von Christoffel gegebenen verglichen. H.

Et Par synthetiske Methoder isaer til Brug ved Studiet af metriske Egenskaber. Af Elling Holst, Universitets-Stipendiat. (Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger 1882. No. 11). Christiania, Jacob Dybwad. 111 S.

Der Verfasser führt zuerst den Entwickelungsgang der projectivischen Geometrie, angeregt durch Poncelet, von Cayley in die nichteuklidische Geometrie durch Erweiterung der Massbestimmung übergeführt, dann von Poncelet durch seine fundamentale Theorie für metrische Eigenschaften neu begründet und von Darboux, Faure, Mannheim u. A. gefördert, vor, empfindet es aber als eine Lücke, dass die synthetische Methode von Darboux auf analytischer Betrachtung beruhe, erwähnt als Anfang zu deren Ausfüllung, dass er bereits in 3 Aufsätzen (Math. Ann. XI., Bull. de la Soc. math. de France VIII und Lie Archiv) zwei rein synthetische Methoden in Anwendung gebracht habe, und nimmt in der gegenwärtigen Arbeit zum Ziele deren Wesen darzulegen. Die 3 Capitel derselben sind: I. Neue synthetische Methoden, u. zw. die principiellen Ausgangspunkte, Methode der unbestimmten Exponenten, Allgemeineres über

descriptive Eigenschaften als Specialfälle metrischer Invarianten, Anwendung des dritten Princips über endliche Addenden; II. Grundelemente der metrischen Geometrie, u. zw. metrische Grundelemente der Ebene, Focaldreieck, erste metrische Definitionen, invariante Grössen die Ebene betreffend, metrische Grundelemente des Raumpunktes, dessen erste metrische Invarianten, Geometrie einer focalen Ebene, resp. eines unendlich fernen Punktes, metrische Grundelemente und einfachste Invarianten des Raumes, Momente; III. Anwendung der neuen synthetischen Methoden auf metrische Eigenschaften, u. zw. metrische Sätze, an die sich besondere Punkte der modernen Geometrie anschliessen, gegebene symmetrische Functionen, specielle Anwendung auf algebraische ebene Curven, einige zur Raumpunktstheorie gehörige Constanten. H.

Die Lehre vom Dreikant im Sinne der reinen Geometrie, nach heuristischer Methode entwickelt. Von Dr. L. Mack, Professor a. D. in Ludwigsburg. Mit einer Figurentafel. Neue wohlfeilere Ausgabe. Stuttgart (1885). Albert Koch. 237 S.

Das Buch behandelt die Lehre vom Dreikant in 16 natürlich vorliegenden, principiellen oder einfachen Aufgaben, nämlich aus 3 Bestimmungsstücken die übrigen zu finden, welche sämtlich durch Construction gelöst werden, und zwar ist grössere Strenge und Vollständigkeit, als sie bisher gewöhnlich stattfand, Gesichtspunkt der Bearbeitung. Zu den einfachen Bestimmungsstücken werden ausser Seiten und Winkeln gerechnet der Inhalt (Summe der Winkel) und der Umfang (Summe der Seiten). Die 5 Abschnitte des Buches sind: Das Dreikant in seinen Beziehungen zu den ihm zunächst verwandten; seine Untersuchung in Ansehung der Seiten und Winkel als einfachster Bestimmungsstücke; der Inhalt und seine Bedeutung als fundamentales Bestimmungsstück neben Seiten und Winkeln; der Umfang dito; Umfang und Inhalt, beide zugleich als Bestimmungsstücke auftretend nebst einer Seite oder einem Winkel. Hierauf folgen weitere Betrachtungen und Zusätze. Sorgfältige Vielseitigkeit in der Betrachtung und den gewählten Methoden ist anzuerkennen.

H.

Les figures réciproques en statique graphique. Par Luigi Cremona, Directeur de l'école d'application des ingénieurs, à Rome. Ouvrage précédé d'une introduction du Dr. Giuseppe Jung, Professeur à l'Institut technique de Milan, et suivi d'un appendice extrait des mémoires et des cours de statique graphique de Ch. Sa-

viotti, Professeur à l'école des ingénieurs, à Rome. Traduit par Louis Bossut, Capitaine du Génie. — Texte — Atlas. — Paris 1885. Gauthier-Villars. 103 S.

Die französische Uebersetzung der berühmten graphischen Statik mit Anwendung der reciproken Gebilde von Cremona erscheint hier mit einem Anhang in 5 Capiteln, welcher die Fortschritte der Theorie der reciproken Gebilde seit 1872 enthält und auf Wunsch Cremona's nach Bearbeitung von Saviotti hinzugefügt ist. Voraus geht eine Einleitung von Jung, welche die vorbereitende Gestaltung der Theorie der Kraftsysteme, die auf ein System von Punkten im Raume wirken, gibt. Dann folgt die Schrift von Cremona, welche erst von Kräften am Seilpolygon, weiterhin am Stabsystem (travure) handelt. Der Anhang ist betitelt: Neue Methoden für die Berechnung der Balkennetze und Untersuchung der in beliebiger Weise belasteten Gebälke — die einzelnen Capitel: Kegelschnitte der Kräfte und Kegelschnitte der Seilpolygone, mechanische, geometrische Methode; Erzeugung der nicht deformabeln Balkennetze; Berechnung der in den Knoten belasteten Balkennetze; nicht deformirbare Balkennetze belastet in den Knoten und auf den Stäben; allgemeinere nicht deformabele Balkennetze. — Der Atlas enthält die zugehörigen Figuren. H.

Elements of projective geometry. By Luigi Cremona, LL. D. Edin., For. Memb. R. S. Lond., Hon. F. R. S. Edin., Hon. Memb. Camb. Phil. Soc., Professor of Mathematics in the university of Rome. Translated by Charles Leudesdorf, M. A., Fellow of Pembroke College, Oxford. Oxford 1885. Clarendon Press. 310 S.

Mit der Uebersetzung des Werkes ins Englische sind einige Capitel hinzugekommen. Die Capitel sind nun: Definitionen; Centralprojectionen, Figuren in Perspective; Homologie; homologe Figuren im Raume; geometrische Formen; Princip der Dualität; projective geometrische Formen; harmonische Formen; anharmonische Verhältnisse; Construction projectiver Formen; besondere Fälle und Uebungen; Involution; projective Formen in Beziehung zum Kreise; dito zu den Kegelschnitten; Constructionen und Uebungen; Deductionen aus den Sätzen von Pascal und Brianchon; Satz von Desargues; sich selbst entsprechende Elemente und Doppelelemente; Aufgaben 2. Grades; Pol und Polare; Mittelpunkt und Durchmesser eines Kegelschnitts; polar reciproke Gebilde; Brennpunkte; Zusätze und Constructionen. Voraus gehen zwei Vorreden des Verfassers zur Urschrift und zur Uebersetzung. Erstere gibt ein reichhaltiges Verzeichniss über den Ursprung aller in der projectivischen Geo-

metrie enthaltenen Lehren. Der Verfasser führt eine nicht geringe Zahl derselben auf das Altertum zurück; dagegen lehnt er es ab, in der Schrift selbst den ersten Entdecker jedes einzelnen Satzes zu nennen. H.

Analytische Geometrie des Raumes nebst den Principien der darstellenden Geometrie unter besonderer Berücksichtigung des Imaginären zum Gebrauche an technischen Hochschulen und höheren technischen Schulen, sowie zum Selbstunterricht. Mit zahlreichen Uebungsaufgaben nebst Auflösungen. Von Wilhelm Friedrich Schüler. Erster Band. Erste Hälfte. Mit vier Tafeln in Steindruck. Ansbach 1884. C. Brügel u. Sohn. 223 S.

Die frühern Schriften des Verfassers „Neue Theorie des Imaginären etc." und „Lehrbuch der analyt. Geom. d. Punktes etc." sind im 257. und 262. litt. Bericht besprochen. Die gegenwärtige nimmt, ungeachtet des Gemeinsamen, keinen Bezug darauf. Der Verfasser sagt davon im Prospect: Das Werk bezweckt die Vereinigung der analytischen Geometrie mit der darstellenden Geometrie und der Geometrie der Lage, derart dass die Rechnung die Grundlage abgibt für die Erkenntniss der Eigenschaften der verschiedenen Raumformen und ihren Beziehungen unter einander, sowie für die Ableitung der Regeln der graphischen Darstellung räumlicher Figuren. Es ist zunächst für Techniker bestimmt und soll in erster Reihe vorbereiten auf das Studium der technischen und analytischen Mechanik, insbesondere der graphischen Statik, und für die mathematische Physik. Es soll den angehenden Ingenieur in Stand setzen grössere Arbeiten, namentlich Culmann's „graphische Statik", mit Erfolg zu lesen. Es soll dem Techniker jenes Mass von geometrischer Durchbildung gewähren, das erforderlich ist um die an ihn zur Lösung herantretenden räumlichen und mechanischen Beziehungen zu überschauen und dieselben nicht bloss graphisch, sondern auch rechnerisch zu bemeistern. Es soll ebensowol als Lehrbuch wie als Nachschlagebuch dienen. Die 6 Hauptabschnitte des in Rede stehenden Teiles sind: Geometrische Grundbegriffe; die Lehre von den Coordinatensystemen und den Coordinaten eines Punktes; der Punkt; das Dreieck und das Polygon; die Affinität; die Raumgerade. Auf jeden Abschnitt folgen Uebungsaufgaben mit Auflösung. H.

Ueber geographische Karten-Projectionen. Von Josef Streissler, Professor an der k. k. Staats-Oberrealschule in Graz. Jahresbericht der k. k. Staats-Oberrealschule in Graz für das Schuljahr 1883. Selbstverlag. 18 S.

Im Vorliegenden wird elementare Erläuterung des Wesens der Kartographie gegeben, von den verschiedenen geometrischen Principen derselben die hauptsächlich angewandten und empfohlenen in anschaulicher und verständlicher Weise dargelegt, die Abbildung der Punkte und Linien bestimmt und für das Kartenzeichnen Anweisung erteilt. Die Behandlung erstreckt sich auf 3 directe perspectivische Projectionen auf die zur Centrallinie senkrechte Ebene, aus unendlicher Entfernung, aus der Oberfläche (insbesondere dem Gegenpole) und aus dem Mittelpunkte und mehrere Projectionen auf abzuwickelnde Cylinder und Kegel, zu denen schliesslich noch die „Plattkarten“ mit constanten Längengraden kommen. Der Vortrag ist einfach beschreibend ohne analytische Rechnung. Der Verfasser hat sich in Ausdehnung und Abfassung von dem im zweiten Geographentag zu Halle 1882 empfohlenen Studien und dem Normal-Lehrplan für Realschulen leiten lassen. H.

Kinematik. Von Dr. Jul. Petersen, Docent an der polytechnischen Schule in Kopenhagen, Mitglied der königlich dänischen Akademie der Wissenschaften. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verfassers besorgt von Dr. R. von Fischer-Benzon, Oberlehrer am Gymnasium in Kiel. Kopenhagen 1884. Andr. Fred Höst u. Sohn. 80 S.

Die 2 ersten Sätze der Einleitung sind zu berichtigen, ehe vom Ganzen in klarer Weise die Rede sein kann. Im ersten sagt der Verfasser (mit Berufung auf Ampère): „Die Kinematik stellt sich die Aufgabe, die Bewegung der Körper auf die einfachste Weise zu beschreiben.“ In der Tat charakterisirt es die vorliegende Arbeit, dass sie sich Beschreibung allein zur Aufgabe macht. Auch bietet die Kinematik soviel beschreibenswürdiges dar, dass es schon lohnend erscheinen mag, eine Auswahl daraus vorzuführen und zum Verständniss zu bringen. Unberechtigt ist es aber jedenfalls, der Kinematik als Wissenschaftszweig diese Beschränkung aufzuerlegen. Die Aufgabe der Kinematik ist es vielmehr, die Bewegung der Gebilde, ihre Möglichkeit, ihre Bedingungen, Folgen, Erzeugnisse u. s. w. zu untersuchen und die aller Untersuchung zu Grunde liegenden Begriffe und Ausdrücke zu fixiriren. Der zweite Satz der Einleitung lautet: „Als Wissenschaft bildet dieselbe ein Mittelglied zwischen der reinen Geometrie und der Dynamik, indem sie Rücksicht nimmt auf die Zeit, in der die Bewegungen vor sich gehen, aber nicht auf die Kräfte, durch welche sie hervorgerufen werden.“ Es gehört wol wenig Besinnung dazu um zu gewahren, dass der genannte Unterschied der Kinematik und Geometrie gänzlich hinfällig ist. Die Theorie

bleibt völlig unverändert, wenn wir statt der Zeit einen Parameter, statt eines Parameters, dessen ungleicher Variationssinn nicht in Betracht kommt, die Zeit setzen. Letzteres geschieht zur Erleichterung der Vorstellung. In gleichem Falle ist ein anderes Merkmal der Kinematik, welches hier nicht geltend gemacht wird. Bei der Bewegung eines Gebildes müssen wir stets voraussetzen, dass jeder Punkt desselben während der Verschiebung sich identisch bleibt. Doch begründet auch dieser Umstand keinen Unterschied gegen die Geometrie. In letzterer wird stets einem Punkte eines mit einem Parameter variirenden Gebildes ein bestimmter Punkt des consecutiven entsprechen; das Entsprechen aber und die Identität sind theoretisch ganz gleichbedeutend. Die Wahlfreiheit im Entsprechen ist in der Kinematik so unbeschränkt wie in der Geometrie; erst bei Anwendung auf physische Körper tritt dafür Bestimmung durch physische Eigenschaften ein. In jeder Beziehung also ist die Kinematik nicht ein Mittelglied der Geometrie und Dynamik, sondern ein wesentlicher Bestandteil der Geometrie, deren unentbehrliches Mittel und Organ; man kann höchstens sagen, ein solches, das sich zur Anwendung auf Dynamik besonders eignet. Die vorliegende Arbeit nimmt nicht sichtlich die Umfassung des Ganzen oder eines definirten Teiles der Kinematik zum Ziele: anfänglich sind es zwar fundamentale, weiterhin aber mehr ausgewählte Themata, welche in Betracht gezogen werden; zuletzt wendet sie sich ganz den speciell technischen Fragen zu, was die Absicht vermuten lässt, eben jenen technischen Aufgaben eine mehr wissenschaftliche Basis zu verleihen. Die Themata sind folgende: Geschwindigkeit bei Bewegung eines Punktes, u. zw. Zerlegung und Zusammensetzung von Geschwindigkeiten, zusammengesetzte und relative Bewegung, Roberval's Methode der Tangenten; Geschwindigkeit bei der Bewegung eines unveränderlichen Punktsystems, u. zw. Translation, Rotation, Elementarbewegung, Zusammensetzung elementarer Rotationen, Bestimmung der augenblicklichen Drehaxe aus den Geschwindigkeiten dreier Punkte; Liniencomplexe, Nulllinien, conjugirte Linien, Bestimmung der augenblicklichen Axe; die Charakteristik, Bewegung mit gebundenen Punkten; Beschleunigung eines Punktes, u. zw. Zerlegung und Zusammensetzung von Beschleunigungen, Beschleunigung der zusammengesetzten Bewegung; Beschleunigungen eines Punktsystems, u. zw. Punkte einer geraden Linie, Streckungsbescheunigung einer Geraden, Bewegung in der Ebene, im Raume; über endliche Bewegungen: Reduction der Bewegung auf eine Rollung; gegliederte Systeme, und besonders die Dreistabscurve, der Pantograph, Inversoren, Planimeter; Anwendungen der Praxis entnommen, u. zw. Watt's Parallelogramm, Stephenson's Coulissensteuerung, Cardano's Universalgelenk, Zahnräder. H.

Darstellende und projective Geometrie nach dem gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium. Von Dr. Gustav Ad. V. Peschka, k. k. Regierungsrath, ordentl. öffentl. Hochschul-Professor, Mitglied der k. k. Staats- und Diploms-Prüfungs-Commission an der k. k. technischen Hochschule in Brünn, emerit. o. ö. Professor der Mechanik und Maschinenlehre, des Maschinenwesens und des Maschinenbaues, Mitglied gelehrter, patriotischer und humanitärer Gesellschaften und Vereine, Besitzer der österr. grossen goldenen Medaille für Wissenschaft und Kunst, des goldenen Verdienstkreuzes m. d. Krone, Ritter des h. Sachsen-Ernestinischen Hausordens zweiter Classe, des königl. Serb. St. Sava-Ordens, des Grossh. Hessen'schen Verdienst-Ordens erster Classe Philipp des Grossmüthigen etc. — Dritter Band mit einem Atlas von 42 Tafeln. — Vierter Band mit einem Atlas von 30 Tafeln. — Wien 1884—1885. Carl Gerold's Sohn. 791 + 605 S.

Der erste Band ist im 275. litt. Bericht S. 27. besprochen. Der dritte behandelt in gleicher Weise die Flächen 2. Grades und zwar zuerst die durch gerade Linien erzeugten, nämlich nach einander die Erzeugung und Fundamental-Eigenschaften windschiefer Flächen im allgemeinen, das windschiefe Hyperboloid, das orthogonale Hyperboloid, den gleichseitigen Kegel, das gleichseitige Hyperboloid, das hyperbolische Paraboloid, das gleichseitig-hyperbolische Paraboloid, das windschiefe Rotationshyperboloid, Darstellung in verschiedenen Projectionen und Lösung einiger Aufgaben, Aufgaben und Constructionen betreffend das hyperbolische Paraboloid, Strictionslinien der Regelflächen 2. Grades. Dann folgen die Nichtregelflächen, insbesondere die Kugel, das Kugelgebüsch, das Princip der reciproken Radien, das Kugelbüschel und das Kugelbündel, Theorie der Kugelberührung und der Aehnlichkeitspunkte, die Dupin'sche Cyclide; dann die Rotationsflächen 2. Grades, insbesondere das Sphäroid, das Rotationsparaboloid, die Rotationshyperboloide; dann die dreiaxigen Flächen 2. Grades, u. zw. Entwickelung von Eigenschaften, welche für die graphische Darstellung von Wichtigkeit sind, Constructionen und Aufgaben betreffend: die Flächen 2. Grades, das Rotationsellipsoid, das bifocale Rotationshyperboloid, das Rotationsparaboloid, das dreiaxige Ellipsoid, das elliptische Paraboloid; Schnitt der Flächen 2. Grades, die 2 Flächen 2. Grades gemeinschaftlich umschriebene Developpable, Scharen von Flächen 2. Grades, confocale Flächen, die stereographische Projection, ihre Verallgemeinerung für Flächen 2. Grades und Anwendung als Kartenprojection.

Der 4. Band behandelt windschiefe Flächen höherer Ordnung, insbesondere Regelflächen 3. Grades, allgemeine Eigenschaften der

Konoide, die Theorie der Normalenflächen, die Wölbfläche des schiefen Eingangs, das Kegelschnittskonoid, das Kugelkonoid, das Cylindroid, Normalenflächen längs ebener Schnitte 2. Ordnung; ferner die Theorie der Rotationsflächen; ferner Umhüllungsflächen, insbesondere die Ringfläche; ferner die Schraubenlinie, Schraubenflächen im allgemeinen und Schraubenregelflächen, Constructionen in Bezug auf die developpable Schraubenfläche, die windschiefe Schraubenfläche und das Schraubenkonoid, Constructionen und Aufgaben bezüglich allgemeiner und besonderer ebener Schnitte, Tangentialebenen etc. von windschiefen Schraubenflächen und Schraubenkonoiden; ferner Schattenlehre, u. zw. Construction der Schatten, Schlagschattenbestimmung; ferner Beleuchungsintensitäten, insbesondere Construction der Isophoten für krumme Flächen. H.

Vermischte Schriften.

Proceedings of the Canadian Institute, Toronto, being a continuation of the „Canadian Journal" of Science, Literature and History. Vol. II. Toronto 1884. Copp. Clark and Co.

Wie aus dem Titel zu ersehen, ist die Ausgabe der „Proceedings" kürzlich an die Stelle des früheren „Journal" getreten. Das vorliegende 2. Heft des 2. Bandes enthält zuerst 2 längere mathematische Abhandlungen, nämlich:

P. Young: Principien der Lösung von Gleichungen der höhern Grade. — Lösung lösbarer Gleichungen 5. Grades.

Dann folgen die Berichte der 9. bis 25. Sitzung von Januar bis Mai 1884, nebst Mitteilungen von Arbeiten naturwissenschaftlichen, nicht mathematischen Inhalts. H.

Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario diretto da Davide Besso, Prof. di matematica nel R. Istituto tecnico di Roma. Anno I. Roma 1886. Tipografia delle science matematiche e fisiche.

Von dieser neuen mathematischen Zeitschrift erscheint in je 2 Monaten 1 Heft, so dass also 6 Hefte einen Jahrgang bilden. Den Mitarbeitern sind 25 Freiexemplare ihrer Arbeiten zugesagt. Das erste Heft von 2 Bogen enthält:

D. **Besso**: Ueber das Tetraeder von gleichen Seiten.

A. **Faifofer**: Beweis eines fundamentalen Satzes aus der Theorie der Aequivalenz.

Hierauf folgen Uebungen für die Schule, eine Recension, eine Aufgabe und Bücheranzeigen. H.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

Das Verzeichniss (März 1885) nennt 33 Mitglieder. Die Sitzungsberichte geben kurze Mitteilungen über deren Arbeiten, meist nur Resultate. H.

Journal de Mathématiques spéciales à l'usage des Candidats aux Écoles Polytechniques, Normale et Centrale publié sous la direction de MM. J. **Bourget**, Recteur de l'Académie de Clermont, de **Longchamps**, Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Charlemagne, **Vazeille**, Directeur des études à l'École préparatoire, de Sainte-Barbe. 2ᵉ série, tome quatrième, année 1885. Paris 1885. Ch. Delagrave.

Journal de Mathématiques élémentaires à l'usage de tous les Candidats aux écoles du gouvernement et les Aspirants du Baccalauréat ès sciences etc. wie oben.

Die Hefte beider Journale erscheinen stets gleichzeitig jeden Monat. Sie enthalten eine reiche Sammlung von Sätzen und Aufgaben zur Uebung, in dem einen mehr elementar als im andern.
H.

Mathesis, recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. **Mansion**, Ancien élève de l'École Normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc. et J. **Neuberg**, Ancien élève de l'École Normale des sciences, Professeur à l'Université de Liège, Membre de la Société Royale des sciences de Liège, etc. Avec la collaboration de plusieurs Professeurs belges et étrangers. Tome cinquième. Année 1885. Gand 1885. Ad. Hoste. Paris, Gauthier-Villars.

Der 5. Band enthält folgende Abhandlungen:

G. Petit-Bois: Ueber die angenäherte Inhaltsberechnung der ebenen Flächenstücke.

E. Cesáro et J. Neuberg: Bemerkungen über den Krümmungskreis der Ellipse.

Halsted: Volum eines Prismatoids.

d'Ocagne: Note über die parabolischen Verbindungen. — Transformation der barycentrischen Eigenschaften mittelst der Methode der reciproken Polaren.

E. Cesáro: Ueber die osculirende Helix. — Ueber die Summe der gleichhohen Potenzen der n ersten ganzen Zahlen. — Ueber ein bemerkenswertes symbolisches Gesetz. — Bemerkungen zur elementaren Geometrie. — Ueber den kürzesten Abstand zwischen 2 unendlich nahen Geraden. — Ueber einen Satz von Mansion.

P. Mansion: Definition einer incommensurabeln Zahl. — Ueber den zweiten Mittelwertsatz, nach L. Kronecker. — Eine algebraische Aequivalenz, nach L. Kronecker. — Fundamentalprincip der Grenzmethode. — Allgemeiner Charakter der Convergenz.

H. Brocard: Aufgaben.

C. Bergmans: Sätze über die Parabel.

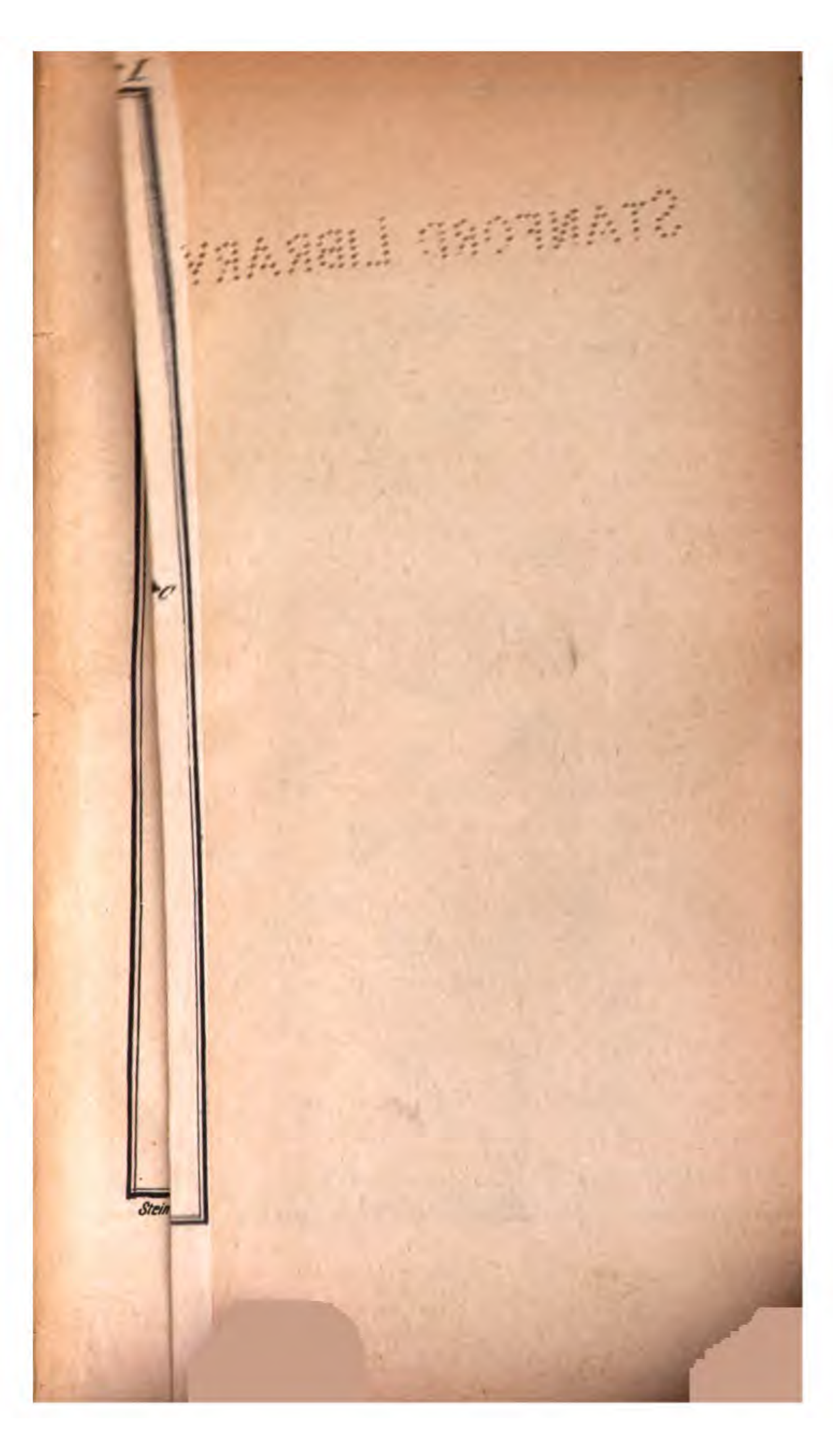
E. Catalan: Ueber die Nabelpunkte der Flächen. — Ueber die Watt'sche Curve.

E. Lemoine: Verschiedene Eigenschaften des Kreises und der Geraden von Brocard.

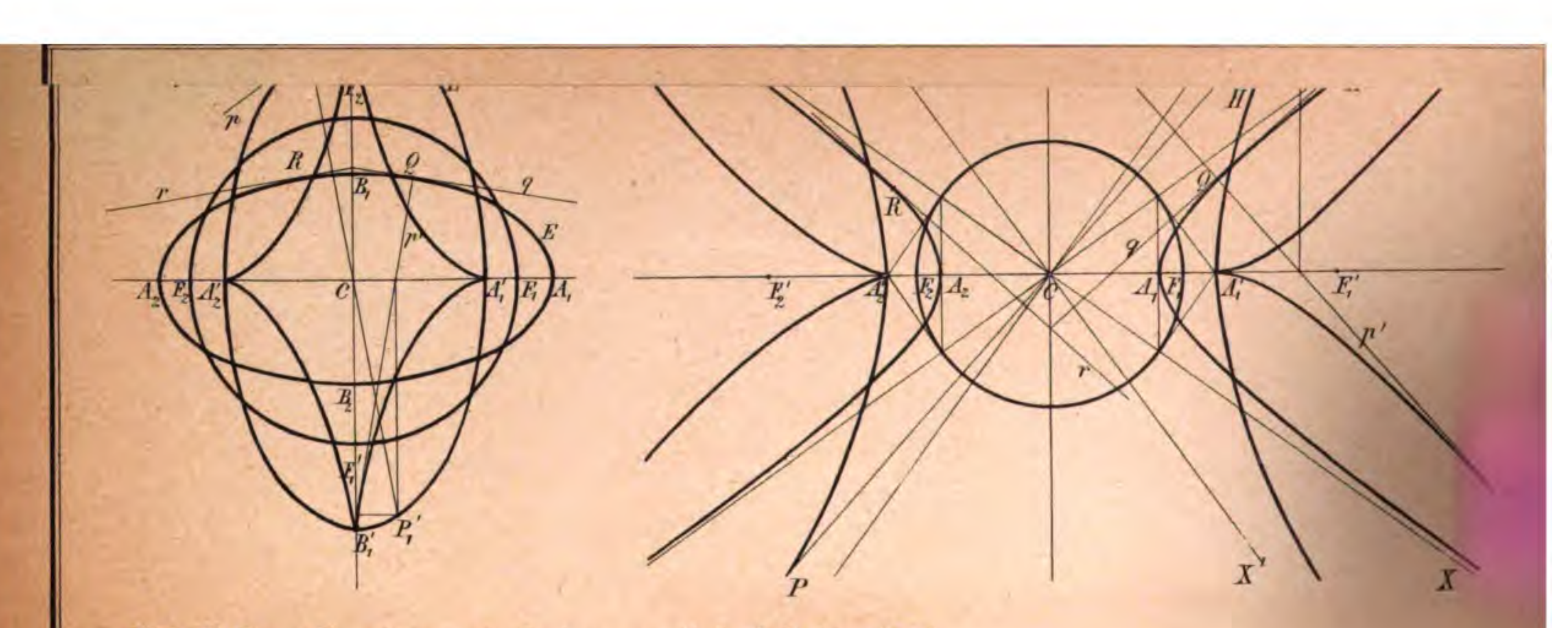
De Tilly: Ueber die simultanen linearen Differentialgleichungen. — Ueber die Centralaxe und die gleitende augenblickliche Axe.

Weill: Einige elementare Aufgaben bezüglich auf das Würfelspiel.

J. Neuberg: Ueber das harmonische Viereck. H.



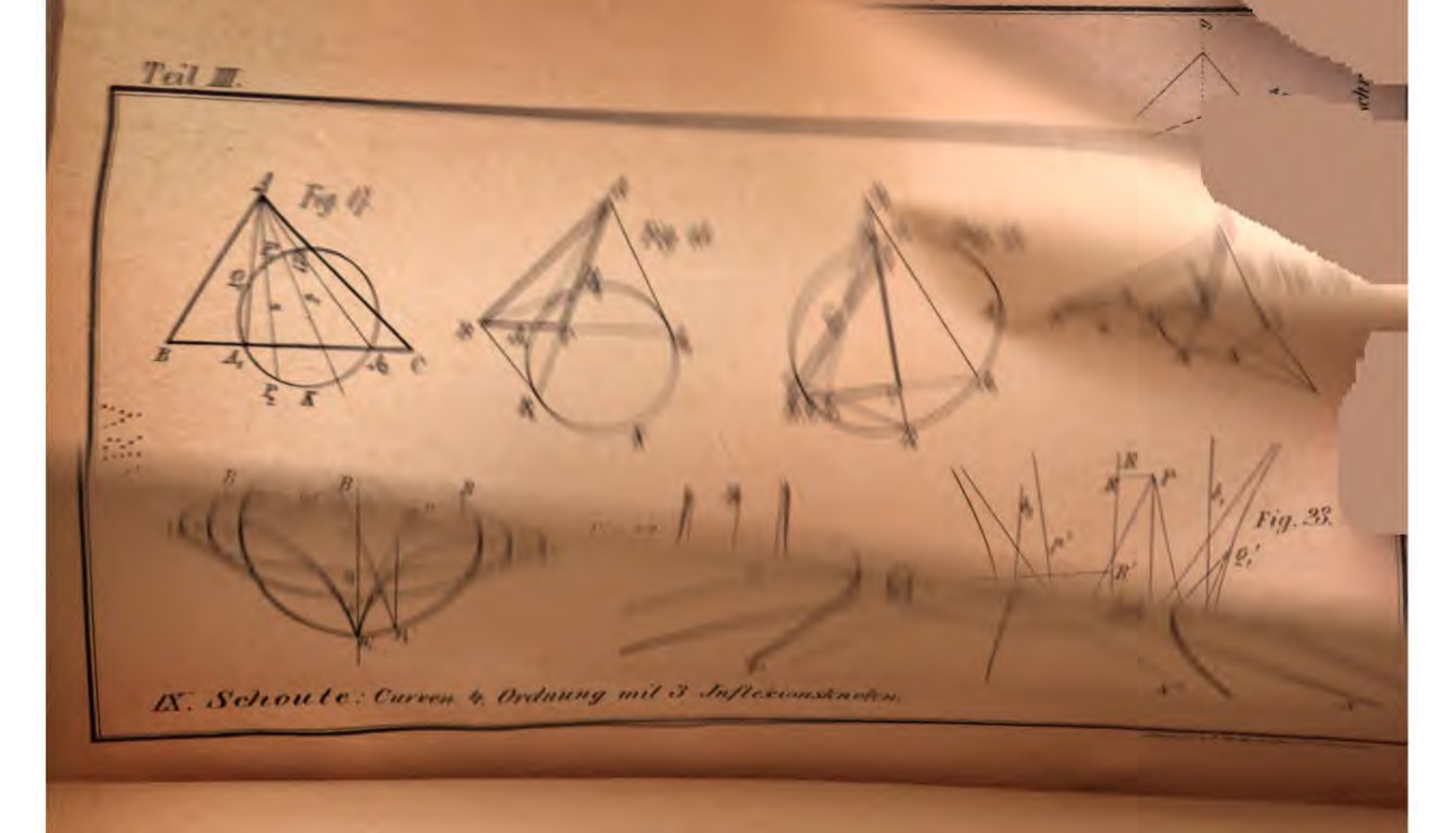




IX. Schoute: Curven 4. Ordnung mit 3 Inflexionsknoten.

Steindr. v. F. W. Kunike, Greifswald.





Teil III.
Fig. 23.
IX. Schoute: Curven 4. Ordnung mit 3 Inflexionsknoten.

Lange: Der Feuerbachsche Satz.

1.

Fig 2.

Fig. 1a.

Fig. 3.



Fig. 1.

XIX. **Bigler:** Potential einer elliptischen Walze.

Steindr. v. F. W. Kunike, Greifsw.

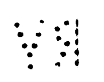


Fig. 3.

Steindr. v. F. W. Kunike, Greifsw.

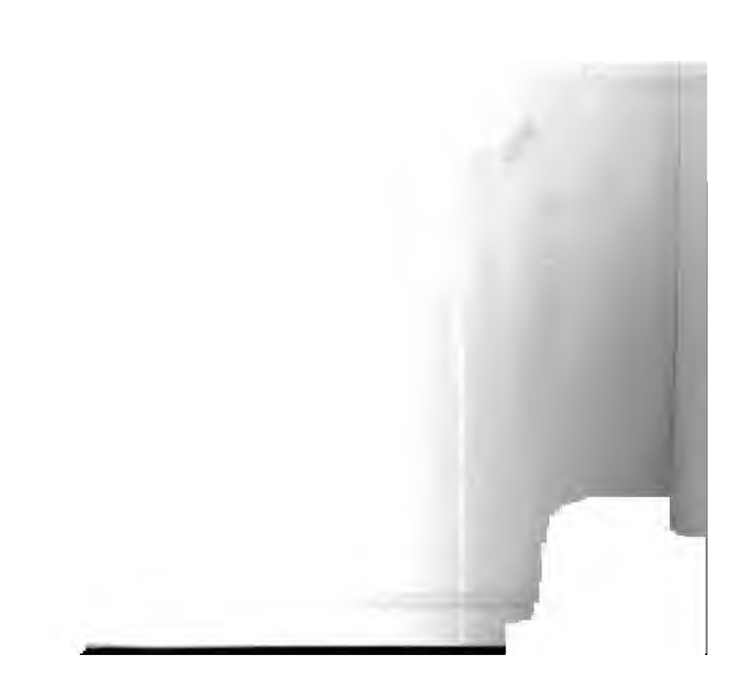
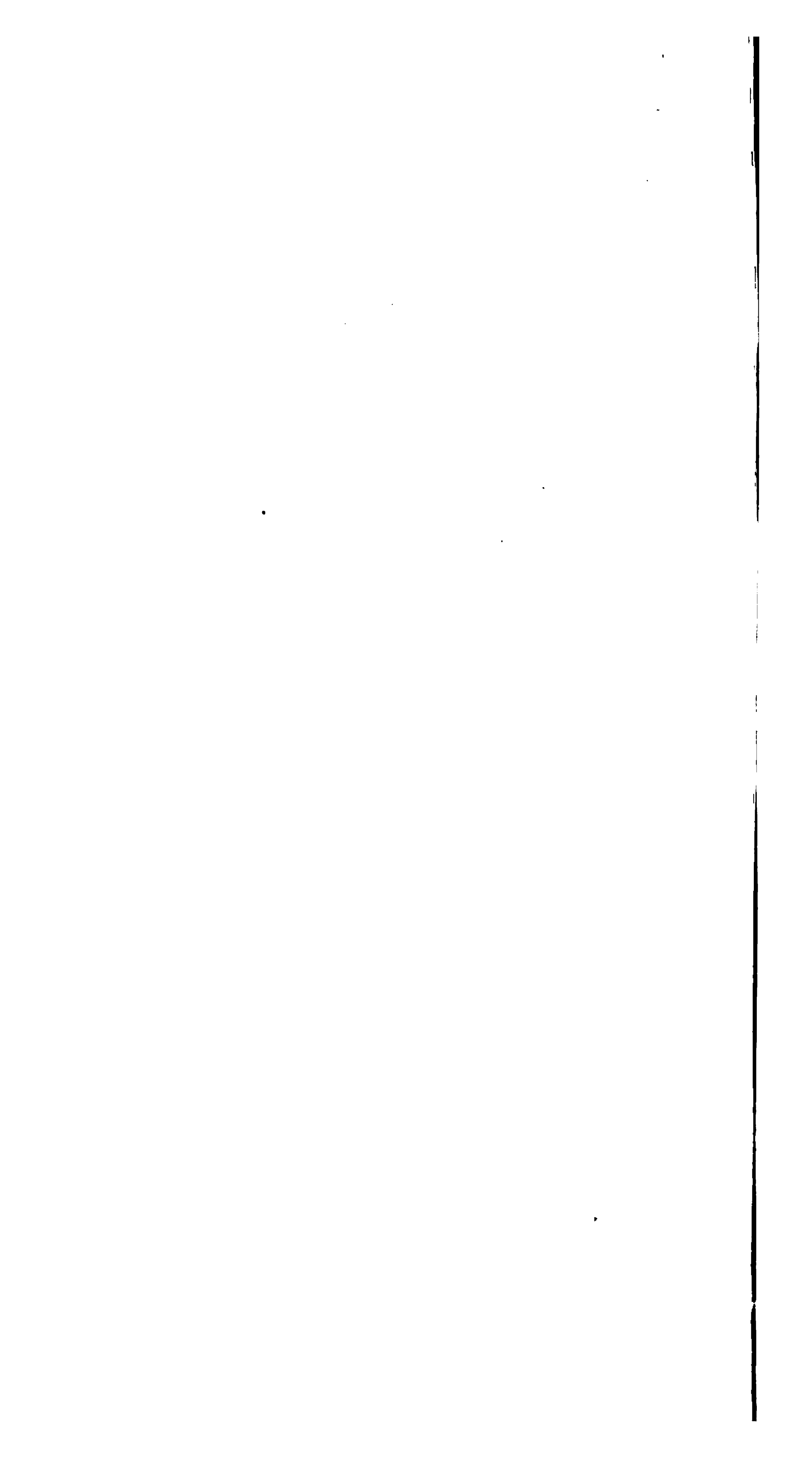


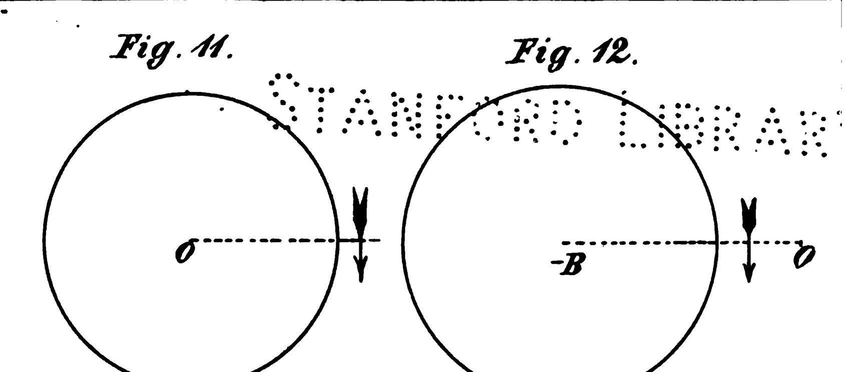
Fig. 5.

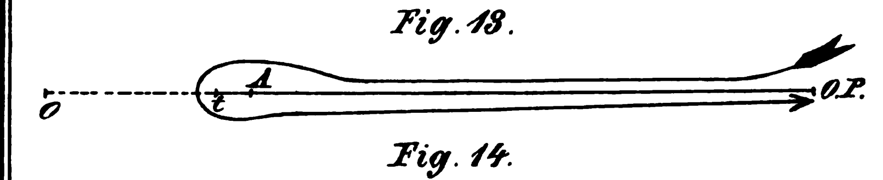
Fig. 9.

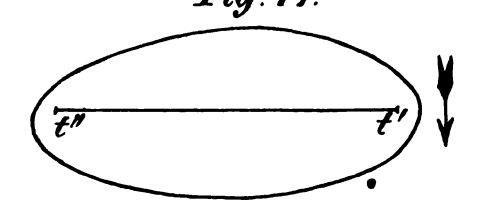
Fig. 10.

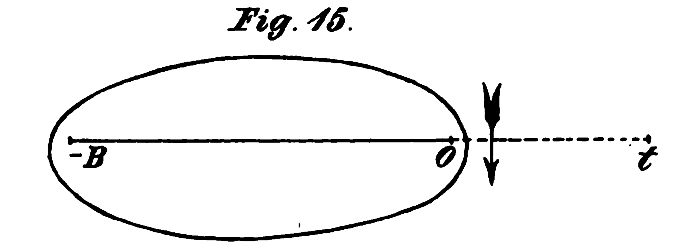
Steindr. F. W. Kunike, Grfsw.

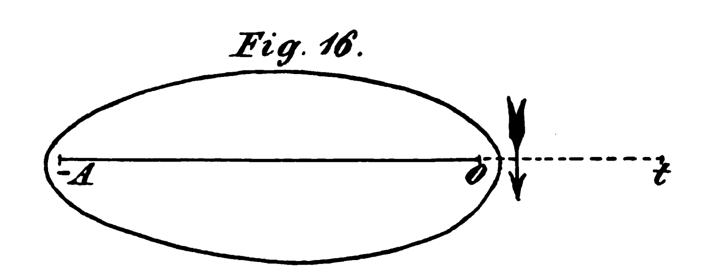


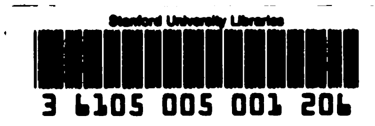

Fig. 11.
Fig. 12.
O
-B
O

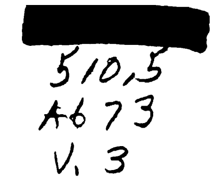

Fig. 13.
A
O
t
O.P.


Fig. 14.
t''
t'


Fig. 15.
-B
O
t


Fig. 16.
-A
O
t


Stanford University Libraries
3 6105 005 001 206


510.5
A673
V. 3

